Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques **3ème année Licence, mathématiques**

Examen de rattrapage
Géométrie différentielle
Durée : 2h00

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

Exercice 1. 1. *Soit P_1 une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et P_2 une sous variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2. Montrer que $P_1 \times P_2$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ dont on précisera la dimension. Déduire que $\mathbb{T}^2$ est une sous variété de $\mathbb{R}^4$.*

2. *On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble*

$$M_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2 + 4y^2 = a^2 \text{ et } x^2 - 4y^2 = z\}$$

où a est une constante strictement positive.

(a) *Montrer que M_a est une sous variété de $\mathbb{R}^3$ lorsque $a \neq 0$. Quelle est sa dimension ?*

(b) *Soit $a = 1$, calculer l'espace tangent à M_1 en tout point et en donner une base.*

(c) *Donner les orientations possibles de M_1 en utilisant les bases de M_1 puis en utilisant les bases d'un supplémentaire de M_1 en déterminant le lien entre les orientations. Déduire que M_1 est orientable.*

Exercice 2. 1. *Trouver une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse vérifiant $\varphi(0) = -1$ et telle que la forme différentielle*

$$\alpha(x,y) = \frac{2xy}{1+x^2}dx + \varphi(x)dy$$

soit fermée sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Trouver une fonction f lisse telle que $\alpha = df$.*

3. *Soit la 2-forme différentielle*

$$w = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Calculer $\int_\phi w$ *où*

$$\phi(\theta, \eta) = (\cos\eta\cos\theta, \cos\eta\sin\theta, \sin\eta)$$

avec $(\theta, \eta) \in]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[$.

Scanned with CamScanner

Correction

Exo 1 : 13pts

P_1 une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 i.e., pour tout $x_1 \in P_1$, $\exists U_1$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p_1}$ de classe C^k, submersive tq $U_1 \cap P_1 = g_1^{-1}(\{0\})$ 0,75

P_2 une s.v de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2 i.e., pour tout $x_2 \in P_2$ $\exists U_2$ ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{m-p_2}$ de classe C^k, submersive tq $U_2 \cap P_2 = g_2^{-1}(\{0\})$

Montrons que $P_1 \times P_2$ une s.v. de $\mathbb{R}^{n+m}$.

soit $(x_1, x_2) \in P_1 \times P_2$ 0,25. On définit $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+m)-(p_1+p_2)}$ 0,5 par

$g(x,y) = (g_1(x), g_2(y))$ avec $U = U_1 \times U_2$ 0,25

Puisque g_1 et g_2 sont de classe C^k, il l'est aussi pour 0,25 g. De plus, $d_{(x_1,x_2)} g = \begin{pmatrix} d_{x_1} g_1 & 0 \\ 0 & d_{x_2} g_2 \end{pmatrix}$ 0,25

0,25

Or g_1 et g_2 sont des submersions, donc g l'est aussi

$$g^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in U ;\ g(x,y) = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in U ;\ g_1(x) = 0 \wedge g_2(y) = 0\} \quad 0,5$$
$$= g_1^{-1}(\{0\}) \times g_2^{-1}(\{0\}) = (U_1 \cap P_1) \times (U_2 \cap P_2) = U \cap (P_1 \times P_2).$$

0,5

Sachant que $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ et S^1 est une sous variété de $\mathbb{R}^2$ de dim 1 donc $\mathbb{T}^2$ est une sous variété de $\mathbb{R}^4$ de dim 2.

0,25

a) Soit $a \neq 0$, on définit $g : \mathbb{R}^3 \setminus U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 0,5

$$(x,y,z) \longmapsto (x^2+4y^2-a^2,\ x^2-4y^2-z)$$

avec $U = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ 0,25 . Soit $(x,y,z) \in \Pi_a$. 0,25

Il est clair que g est de classe C^∞. 0,25

$$J_{(x,y,z)}\, g = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 0 \\ 2x & -8y & -1 \end{pmatrix}$$ 0,5

$\det J_{(x,y,z)}\, g \neq 0$ ssi $x.y \neq 0 \Rightarrow rg\, J_{(x,y,z)}\, g = 2$ 0,5

Alors g est une submersion. De plus, 0,25

$$g^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$$

$$= \{(x,y,z) : (x^2+4y^2-a^2,\ x^2-4y^2-z) = (0,0)\}$$ 0,5

$$= \{(x,y,z) : x^2+4y^2 = a^2,\ x^2-4y^2 = z\}$$

$$= \Pi_a \cap (\mathbb{R}^3 \setminus U).$$

Donc Π_a est une sous variété de $\mathbb{R}^3$, de classe C^∞ et de dimension 1. 0,5

b) Soit $a = 1$. Nous avons

$$T_{(x,y,z)}\Pi_1 = \operatorname{Ker} d_{(x,y,z)}\, g$$ 0,25

$$= \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ d_{(x,y,z)}\, g(h_1,h_2,h_3) = 0\}$$ 0,25

$$= \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x h_1 + 4y h_2 = 0,\ x h_1 - 4y h_2 - \tfrac{1}{2} h_3 = 0\}$$ 0,25

2/5

Si $x \neq 0$: On a $h_1 = -\frac{4y}{x} h_2$ et $x\left(-\frac{4y}{x} h_2\right) - 4y h_2 - \frac{1}{2} h_3 = 0$

$\Downarrow$ 0,25

$h_3 = -16 y h_2$

$T_{(x,y,z)} \Pi_1 = \left\{ \left(-\frac{4y}{x} h_2, h_2, -16y h_2 \right) ; h_2 \in \mathbb{R} \right\}$ 0,25

$= \left\{ -\frac{h_2}{x} (4y, -x, 16xy) ; h_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle (4y, -x, 16xy) \rangle$ 0,25

0,25

Si $y \neq 0$: On a $h_2 = \frac{-x}{4y} h_1$ et $x h_1 - 4y \left(\frac{-x}{4y} h_1 \right) - \frac{1}{2} h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = 4x h_1$ 0,25

$T_{(x,y,z)} \Pi_1 = \left\{ \left(h_1, \frac{-x}{4y} h_1, 4x h_1 \right) \mid h_1 \in \mathbb{R} \right\}$ 0,25

0,25

$= \left\{ \frac{h_1}{4y} (4y, -x, 16xy) ; h_1 \in \mathbb{R} \right\} = \langle (4y, -x, 16xy) \rangle$

0,25

On définit une base du supplémentaire comme suit :

$T_{(x,y,z)} \Pi_1 = \{ (x, 4y, 0), (2x, -8y, -1) \}$ 0,5

c) Les orientations possibles de l'espace tangent sont définies par la base ordonnée $\{ (y, -x, 16xy) \}$

0,25

ou par la base $\{ (x, 4y, 0), (2x, -8y, -1) \}$ ou

0,25

$\{ (2x, -8y, -1), (x, 4y, 0) \}$ 0,25

$$\det \begin{pmatrix} y & x & 2x \\ -x & 4y & -8y \\ 16xy & 0 & -1 \end{pmatrix} = -4y^2 - x(x + 128xy^2) - 128x^2y^2$$

0,5

$$= -(4y^2 + x^2 + 256 x^2y^2) < 0$$

Donc l'orientation définie par $\{ (x, 4y, 0) \}$ est inverse à celle

0,5

donnée par $\{ (2x, -8y, -1), (x, 4y, 0) \}$

3

Soit $N : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (0,5) continue

$$(x,y,z) \longmapsto \big((x,4y,0),(2x,-8y,-1)\big)$$

donc elle définit une orientation pour Π_1 (0,25)

Exercice 2 : 07pts

1) α est fermée $\Leftrightarrow d\alpha = 0$ (0,5)

Or $d\alpha = d\left(\frac{2xy}{1+x^2}\right) \wedge dx + d(\varepsilon(x)) \wedge dy$

(0,75) $= \frac{2x}{1+x^2} dy \wedge dx + \varepsilon'(x) dx \wedge dy$ avec $dx \wedge dx = 0$ (0,25)

$= \left(\varepsilon'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\right) dx \wedge dy$ tq. $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ (0,25)

$= 0$ ssi $\varepsilon'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ (0,25)

donc $\varepsilon(x) = \ln|1+x^2| + c$ (0,25)

On a $\varepsilon(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1$

Alors $\varepsilon(x) = \ln|1+x^2| - 1$ (0,25)

2) Sachant que $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ donc $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^2)$ (0,25)

$df = \partial_x f \, dx + \partial_y f \, dy = \alpha$ (0,25)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^2} & (0,25) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ln|1+x^2| - 1 & (0,25) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^2} \Leftrightarrow f(x,y) = y\ln|1+x^2| + g(y) \quad 0,25$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \ln|1+x^2| + g'(y) \quad 0,25$$

$$\Rightarrow g'(y) = -1 \quad 0,25$$

$$\Rightarrow g(y) = -y + c \quad 0,25$$

donc $f(x,y) = y\ln|1+x^2| - y + c$

3) On a $\displaystyle\int_\phi w = \int_{]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \phi^*(w)$ 0,5

$$\phi^*(w) = \cos\eta\cos\theta \, d(\cos\eta\sin\theta) \wedge d(\sin\eta)$$

$$+ \cos\eta\sin\theta \, d(\sin\eta) \wedge d(\cos\eta\cos\theta) + \sin\eta \, d(\cos\eta\cos\theta) \wedge d(\cos\eta\sin\theta)$$

$$= \cos\eta\cos\theta(-\sin\eta\sin\theta\, d\eta + \cos\eta\cos\theta\, d\theta) \wedge (\cos\eta\, d\eta)$$

1

$$+ \cos\eta\sin\theta(\cos\eta\, d\eta) \wedge (-\sin\eta\cos\theta\, d\eta - \cos\eta\sin\theta\, d\theta)$$

$$+ \sin\eta(-\sin\eta\cos\theta\, d\eta - \cos\eta\sin\theta\, d\theta) \wedge (-\sin\eta\sin\theta\, d\eta + \cos\eta\cos\theta\, d\theta)$$

$$= \cos^3\eta\cos^2\theta\, d\theta \wedge d\eta - \cos^3\eta\sin^2\theta\, d\eta \wedge d\theta$$

$$- \sin^2\eta\cos\eta\cos^2\theta\, d\eta \wedge d\theta + \cos\eta\sin^2\eta\sin^2\theta\, d\theta \wedge d\eta$$

$$= (\cos^3\eta\cos^2\theta + \cos^3\eta\sin^2\theta + \sin^2\eta\cos\eta\cos^2\theta + \sin^2\eta\sin^2\theta\cos\eta)\, d\theta \wedge d\eta$$

$$= (\cos^3\eta + \sin^2\eta\cos\eta)\, d\theta \wedge d\eta = \cos\eta\, d\theta \wedge d\eta$$

$$\int w = \int \cos\eta\, d\theta\, d\eta = \left(\int^{\pi} d\theta\right)\left(\int^{\frac{\pi}{2}} \cos\eta\, d\eta\right) = 4\pi \quad 0,75$$

Scanned with CamScanner