

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université Mohamed Seddik ben Yahia
Tijel

Faculté Des Sciences Economiques,
Commerciales
Et Sciences De Gestion



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة محمد المدين بن يحيى جيل

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية

و علوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في الإحصاء 3 :

المتغيرات العشوائية وقوانين التوزيعات الاحتمالية

موجهة لطلبة: السنة الثانية

تخصص: ...علوم تجارية...

من إعداد الدكتور: جمال لواتي

قسم: ...العلوم التجارية...

السنة الجامعية: ...2025../...2026.....

فهرس المحتويات

1

25.....	(1-3) دالة الإحتمال
25.....	(2-3) القيمة المتوقعة
25.....	(3-3) التباين
26.....	(3-3) تجميع توزيع ثنائي الحدين
26.....	(4) التوزيع الهندسي
26.....	(1-4) دالة الإحتمال
26.....	(2-4) القيمة المتوقعة
26.....	(3-4) التباين
27.....	(5) التوزيع مافوق الهندسي
28.....	(1-5) دالة الإحتمال
29.....	(2-5) القيمة المتوقعة
29.....	(3-5) التباين
29.....	(6) توزيع بواسون
30.....	(1-6) دالة الإحتمال
30.....	(2-6) القيمة المتوقعة
30.....	(3-6) التباين
31.....	(4-6) تجميع توزيع بواسون
31.....	(5-6) تقريب توزيع ثنائي الحدين من توزيع بواسون
32.....	تمارين الفصل الثاني
43.....	الفصل الثالث: التوزيعات الإحتمالية المستمرة
43.....	(1) التوزيع المنتظم المستمر
43.....	(1-1) دالة الكثافة الإحتمالية
43.....	(2-1) المنحني المنتظم
44.....	(3-1) دالة التوزيع
44.....	(4-1) القيمة المتوقعة

45.....	(5-1) التباين
45.....	(2) التوزيع الأسى
45.....	(1-2) دالة الكثافة الإحتمالية
46.....	(2-2) المنحنى الأسى
46.....	(3-2) دالة التوزيع
47.....	(4-2) القيمة المتوقعة
47.....	(5-2) التباين
48.....	(6-2) علاقة التوزيع الأسى بتوزيع بواسون
49.....	(3) التوزيع الطبىعى
49.....	(1-3) دالة الكثافة الإحتمالية
49.....	(2-3) المنحنى الطبىعى
50.....	(3-3) دالة التوزيع
51.....	(4-3) العزوم
52.....	(5-3) تجميع التوزيع الطبىعى
53.....	(6-3) التوزيع الطبىعى المعيارى
54.....	(37) التقرب للتوزيع الطبىعى
57.....	(4) توزيع كاي تربىع
57.....	(1-4) متغىرة كاي تربىع
57.....	(2-4) دالة الكثافة الإحتمالية
58.....	(3-4) التمثىل البىانى
58.....	(4-4) العزوم
59.....	(5-4) تجميع توزيع كاي تربىع
60.....	(6-4) إستخدام الجدول
61.....	(7-4) تقرب توزيع كاي تربىع من التوزيع الطبىعى
61.....	(5) توزيع ستودنت

61.....	(1-5) متغيرة ستودنت
62.....	(2-5) دالة الكثافة الإحتمالية
62.....	(3-5) التمثيل البياني
63.....	(4-5) العزوم
64.....	(5-5) إستخدام الجدول
65.....	(6-5) تقريب توزيع ستودنت من التوزيع الطبيعي
66.....	(6) توزيع فيشر
66.....	(1-6) متغيرة فيشر
67.....	(2-6) دالة الكثافة الإحتمالية
67.....	(3-6) التمثيل البياني
68.....	(4-6) العزوم
68.....	(5-6) إستخدام الجدول
70.....	(6-6) تبديل درجات الحرية
72.....	_تمارين الفصل الثالث
83.....	الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية ذات بعدين
83.....	(1) حالة المتغيرات المتقطعة
83.....	(1-1) دالة الإحتمال المشترك
84.....	(2-1) جدول التوزيع الإحتمالي المشترك
85.....	(3-1) دالة الإحتمال الحدي
87.....	(4-1) دالة الإحتمال الشرطي
90.....	(5-1) دالة التوزيع
90.....	(6-1) التوقع الشرطي
91.....	(7-1) التباين المشترك ومعامل الارتباط
94.....	(2) حالة المتغيرات المتقطعة
94.....	(1-2) دالة كثافة الإحتمال المشترك

فهرس المحتويات

95.....	2-2) دالة التوزيع لمتغيرين
95.....	2-3) دالة كثافة الإحتمال الحدية
96.....	2-4) دالة التوزيع الحدية
96.....	2-5) دالة الإحتمال الشرطي
97.....	2-6) التوقع الشرطي
97.....	2-7) التباين المشترك ومعامل الارتباط
102.....	تمارين الفصل الرابع
112.....	قائمة المراجع
113.....	الملاحق: الجداول الإحصائية
121.....	مقرر المادة التعليمية: إحصاء 3

مقدمة:

الأساليب الإحصائية لها مكانة هامة في الدراسات العلمية الحديثة، فهي تقنيات تمكن من التعبير عن البيانات الخام للظواهر والأنشطة وتحويلها إلى نماذج وعلاقات رياضية بين عدة متغيرات تعكس العلاقات المتشابكة بين هذه الظواهر والأنشطة كما هي موجودة في الواقع. وهذه التقنيات لها دور كبير في العلوم الاقتصادية والاجتماعية عامة، حيث تمكن من نمذجة الظواهر الاقتصادية التي يحكمها عدم اليقين و التعبير عنها بشكل مبسط كقوانين وعلاقات محتملة الحدوث تحت شروط معينة. وهذا يعطي صورة واضحة عن أي نشاط إقتصادي ويساعد على إتخاذ أفضل القرارات .

الهدف من هذه المطبوعة هو تقديم القوانين الأساسية للتوزيعات الإحتمالية الشائعة الإستخدام في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم الإدارة، وتقديم كيفية عمل إستنتاجات وإستخراج العلاقات بين المتغيرات العشوائية ومميزاتها الأساسية، كالعزوم ودوال الإحتمال ودوال الكثافة ... المطبوعة مقسمة إلى أربعة فصول :

الفصل الأول عبارة عن فصل تمهيدي للتذكير بحساب الإحتمالات وتعريف المتغيرات العشوائية ومميزات العددية .

الفصل الثاني يتناول التوزيعات الإحتمالية المتقطعة الخاصة بالظواهر أو المتغيرات العشوائية التي يمكن التعبير عنها بأعداد صحيحة. هذه التوزيعات تتميز بإستخدام دوال بسيطة، كتوزيع أو ظاهرة برنولي، توزيع ثنائي الحدين، توزيع بواسون ...

الفصل الثالث يتناول التوزيعات الإحتمالية المستمرة أي قوانين المتغيرات العشوائية التي تأخذ عادة قيم أعداد حقيقية وتتميز بإستخدام دوال مستمرة، كالتوزيع الطبيعي، توزيع ستودنت، توزيع فيشر ... هذه التوزيعات تتطلب الإلمام الجيد بالدوال و التحويلات الرياضية كالإشتقاق والتفاضل ...

الفصل الرابع يشمل المتغيرات العشوائية الثنائية ودوالها ذات بعدين أي تحتوي على متغيرين عشوائيين، مثل دالة الإحتمال المشترك، دالة التوزيع الثنائية، ودوال الإحتمال الحدية والشرطية .

الفصل الأول: الإحتمال و المتغيرات العشوائية:1) مفهوم الإحتمال و الحوادث العشوائية:1-1 التجربة العشوائية: Experiment of chance

هي كل عملية نعلم مسبقا كل النتائج الممكنة لها، لكن لانستطيع أن نحدد النتيجة التي سوف تظهر في محاولة معينة. أي هي تجربة لها من بين جميع النتائج الممكنة، نتيجة تظهر عن طريق الحظ .
مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تسمى فضاء العينة Sample Space ، ويرمز لها S . فضاء العينة يتكون من n عنصر (نتيجة ممكنة)، ويرمز لهذه العناصر عادة بالرموز : a,b,c,d...
مثل:

رمي قطعة نقود، النتائج الممكنة : ظهر p ، وجه f . فضاء العينة : $S = \{ p, f \}$.
رمي حجر نرد، النتائج الممكنة أو فضاء العينة : $S = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$.

2-1 الحدث: Event

الحدث أو الحوادث هي كل مجموعة جزئية من فضاء العينة، ويرمز لها عادة بالرموز : A,B,C...
مثل:
حدث ظهور وجه f عند رمي قطعة النقود : $A = \{ f \}$.
حدث ظهور رقم زوجي عند رمي حجر النرد : $A = \{ 2,4,6 \}$.
الحدث البسيط: إذا كانت المجموعة الجزئية تحتوي على عنصر واحد فقط، تسمى حدث بسيط (إبتدائي).
الحدث المستحيل: إذا كانت المجموعة الجزئية تحتوي على عناصر لاتتنتمي إلي فضاء العينة (نتيجة غير ممكنة)، تسمى حدث مستحيل.

الحدث المكمل: الحدث المكمل للحدث A ، ويرمز له $\bar{A}$ ، هو الحدث الذي يشمل مجموعة عناصر فضاء العينة التي لاتتنتمي إلي الحدث A .

الحوادث المتنافية: يكون حدثين A , B متنافيين إذا كان وقوع أحدهما ينفي أو يمنع وقوع الآخر .

الحوادث المستقلة: يكون حدثين A , B مستقلين إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر .

الإتحاد: إتحاد حدثين A , B و يرمز له $A \cup B$ هو حدث يتكون من العناصر التي تنتمي إلي A أو تنتمي إلي B أو كليهما ، ويعني وقوع أحد الحدثين على الأقل .

التقاطع: تقاطع حدثين A, B و يرمز له $A \cap B$ هو حدث يتكون من العناصر التي تنتمي إلى A و تنتمي إلى B ، أي العناصر المشتركة و يعني وقوع الحدثين معا .

مثال 1:

رمي حجر نرد ، الحدث رقم زوجي : $A = \{ 2,4,6 \}$ ،

الحدث رقم أكبر أو يساوي 4 : $B = \{ 4,5,6 \}$ ،

يمكن تحديد الحوادث: $\bar{A} = \{ 1,3,5 \}$

$$A \cup B = \{ 2,4,5,6 \}$$

$$A \cap B = \{ 4,6 \}$$

3-1 الإحتمال: Probability

1-3-1 إحتمال عنصر وإحتمال حدث:

إذا كان S فضاء عينة يحتوي على n عنصر، فإن إحتمال عنصر a هو : $1/n$.
و إذا كان حدث A يحتوي على k عنصر، فإن إحتمال الحدث A هو : k/n ، أي :
عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث A ، على عدد الطرق التي يقع فيها فضاء العينة S .
وهذا هو التعريف التقليدي للإحتمال : عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة (الكلية) .

تعريف:

إذا كان S فضاء عينة منتهى ويحتوي على n عنصر : $S = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_n \}$

فإنه يمكن تعيين عدد حقيقي $p(a_i)$ للعنصر a_i ويسمى إحتمال هذا العنصر، بحيث يحقق الشرطين:

$$0 \leq p(a_i) \leq 1 \quad (أ)$$

$$\sum_{i=1}^n p(a_i) = 1 \quad (ب)$$

ويعرف إحتمال أي حدث A على أنه مجموع إحتمالات العناصر المكونة له .¹

ليكن S فضاء عينة لتجربة عشوائية، و لتكن $U(S)$ مجموعة الحوادث المعرفة على S ، فإنه يرافق كل

حدث $A \in U(S)$ عدد معين $p(A) \in [0,1]$ يسمى إحتمال الحدث A ، بحيث يحقق المسلمات

التالية :

$$(أ) \quad \text{إذا كانت } A \subset S \text{ ، فإن الإحتمال : } p(A) \geq 0 \text{ ، } 0 \leq p(A) \leq 1$$

¹ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. عمادة شؤون المكتبات، جامعة الملك سعود الرياض 1991. ص 5 .

(ب) إحتمال : $p(S) = 1$

(ج) إذا كانت A_i حيث: $(i = 1, 2, 3, \dots, \infty)$ ، أحداث متنافية ، فإن إحتمال:

$$p(\cup A_i) = \sum_1 p(A_i)$$

من المسلمات السابقة يمكن إثبات النتائج التالية:²

نتيجة 1: إذا كانت $\emptyset$ مجموعة خالية (حدث مستحيل) فإن : $p(\emptyset) = 0$

نتيجة 2: إذا كان $\bar{A}$ مكمل الحدث A ، فإن : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

نتيجة 3: إذا كان $A \subset B$ ، فإن : $p(A) \leq p(B)$

نتيجة 4: إذا كان A, B حدثين ، فإن : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

قاعدة جمع الإحتمالات:

من العلاقات السابقة يمكن أن نجد:

إذا كان A, B متنافيين: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

مثال 2:

رمي حجر نرد، الحدث: $A = \{ 2, 4, 6 \}$ ، الحدث: $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ ،

نحسب الإحتمالات: $p(A) = \frac{3}{6}$ ، $p(B) = \frac{4}{6}$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

2-3-1 الإحتمال الشرطي: Conditional Probability

إحتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B ، يسمى الإحتمال الشرطي ويرمز له $p(A/B)$ ، ويعرف

كما يلي:

إذا كان A, B حدثين في فضاء عينة ، وكان : $p(B) \neq 0$ ، فإن إحتمال الحدث A بشرط حدوث B :

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

قاعدة ضرب الإحتمالات:

من العلاقة السابقة يمكن أن نجد :

أو أيضا : $p(A \cap B) = p(A) * p(B / A)$

² نفس المرجع، نفس الصفحة .

مثال 3:

مجتمع مكون من 48% رجال و 52% نساء، نسبة 3% من الرجال و نسبة 5% من النساء بطالين. نأخذ شخص واحد عشوائيا ، الحدث H رجل ، الحدث F امرأة ، الحدث C شخص بطل .

إحتمال أن الشخص بطل : بطل وهو رجل + بطل وهو امرأة :

$$p(C) = p(H) * p(C/H) + p(F) * p(C/F) \\ = 0.48 * 0.03 + 0.52 * 0.05 = 0.0404$$

إحتمال أن الشخص رجل علما أنه بطل :

$$p(H / C) = \frac{p(H \cap C)}{p(C)} = \frac{p(H) * p(C/H)}{p(C)} = \frac{0.48 * 0.03}{0.0404} = 0.3564$$

3-3-1) الحوادث المستقلة: Independent Events

يكون حدثين مستقلين إذا كان إحتمال حدوث أحدهما لا يتأثر بحدوث الآخر .

إذا كان A , B حدثين مستقلين، إحتمال حدوث A لا يتأثر بحدوث B ،

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{أي :}$$

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B) \quad \text{في هذه الحالة يكون :}$$

وهذه العلاقة هي التعريف الرياضي لإستقلال حدثين.³

مثال 4:

نرمي حجر نرد مرتين، الحدث A رقم 5 في المحاولة الأولى، الحدث B رقم فردي في المحاولة الثانية،

$$p(A) = \frac{1}{6} , \quad p(B) = \frac{3}{6} \quad \text{إحتمال كل حدث :}$$

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B) = \frac{1}{6} * \frac{3}{6} = \frac{3}{36} \quad \text{الحدثين مستقلين :}$$

(2) المتغيرات العشوائية:**المتغير العشوائي: Random Variable**

المتغير العشوائي هو متغير يأخذ قيم في مجال معين بطريقة غير منتظمة (عشوائية) ، فإذا أخذ قيمة ما

في لحظة ما فلا يمكننا أن نعرف مسبقا القيمة التي سوف يأخذها فيما بعد . عكس المتغير العادي الذي

³ Khaldi khaled, Probabilités :rappels de cours et exercices corrigés. OPU alger 1999. P 10.

يتغير بشكل منتظم (في مجال يحتوي على قيم ممنوحة مسبقاً) من قيمة إلى قيمة أخرى، فإذا مر بقيمة ما في لحظة ما لن يعود ليأخذها مرة ثانية .

تعريف:

لنكن تجربة عشوائية مع فضاء عينة S ، نسمي الدالة X التي ترفق بكل عنصر $a \in S$ ، عدداً حقيقياً واحداً و واحداً فقط ، تسمى $x=X(a)$ متغير عشوائي.⁴
فضاء المتغير العشوائي هو: $\mathcal{A} = \{x ; x = X(a) , a \in S\}$

1-2 المتغيرات العشوائية المتقطعة: Discrete Random Variables

متغير عشوائي متقطع X هو متغير قيمه الممكنة تكون على شكل نقاط أو قيم منفصلة .

1-1-2 قانون الإحتمال:

ليكن متغير عشوائي متقطع X له n قيمة ممكنة : $x_1, x_2, \dots, x_n$
كل حدث من هذه الحوادث يتحقق بإحتمال خاص : $pr(X = x_i) = p_i , i = 1, 2, \dots, n$
قانون الإحتمال هو العلاقة التي تربط بين القيم الممكنة للمتغير X و الإحتمالات المرافقة لها p_i ، على شكل جدول :

X	$Pr(X=x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
$\dots$	$\dots$
x_n	p_n
	1

أو على شكل دالة تسمى دالة الإحتمال : $f(x) = pr(X = x_i)$

دالة الإحتمال Probability Function تحقق الشرطين :

أ) لكل قيم X : $0 \leq f(x) \leq 1$

ب) مجموع الإحتمالات : $\sum_1^n f(x_i) = 1$

مثال 4:

نرمي قطعة نقود مرتين ، المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور وجه (وجه 1 ، ظهر 0) ،

النتائج الممكنة: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$

⁴ Idem, p38.

قيم المتغير العشوائي: $X = 0, 1, 2$

قيم دالة الإحتمال:

$$\begin{aligned} f(0) &= pr(x = 0) = \frac{1}{4} \\ f(1) &= pr(x = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \\ f(2) &= pr(x = 2) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2-1-2 دالة التوزيع : Distribution Function

دالة التوزيع أو دالة الإحتمال التجميعي Cumulative Probability Function هي الدالة التي

تعطينا إحتمال X عند أية نقطة أو قيمة يأخذها x_k ،

ليكن متغير عشوائي متقطع X يأخذ القيم: $x_1, x_2, \dots, x_n$

دالة التوزيع تعرف بالشكل:

$$F(x_k) = pr(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k f(x_i) , k \leq n$$

أي دالة تراكمية تعطينا مجموع الإحتمالات إلى غاية القيمة x_k .⁵

إذا وضعنا $x_k = a$ ، فإن دالة التوزيع :

$$F(a) = pr(X \leq a) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(a)$$

$$pr(X > a) = 1 - pr(X \leq a) = 1 - F(a)$$

لتكن a, b من مجال قيم المتغير X بحيث : $a \leq b$, $a, b \in [x_1, x_n]$

$$pr(a \leq X \leq b) = pr(X \leq b) - pr(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

خواص:

°1 دالة التوزيع متزايدة: $F(x_k) \leq F(x_{k+1})$

°2 دالة التوزيع ثابتة عند أية نقطة أو مجال جزئي: $[x_k, x_{k+1}]$

°3 دالة التوزيع مستمرة على يمين كل نقطة x_k

°4 دالة التوزيع محصورة بين : $0 \leq F(x) \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 , \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad \text{أي :}$$

مثال 5:

المثال السابق، رمي قطعة نقود مرتين، المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور وجه: $X = 0, 1, 2$

⁵ سيمور ليبشنتز، الإحتمالات. ترجمة سامح داود. الطبعة الخامسة الدار الدولية، القاهرة 2004 . ص 116 .

نحسب الإحتمالات:

$$F(0) = pr(x \leq 0) = f(0) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = pr(x \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(2) = pr(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

2-2 المتغيرات العشوائية المستمرة: Continuous Random Variables

متغير عشوائي مستمر X هو متغير قيمه الممكنة تكون على شكل مجالات من القيم المستمرة، قد تكون محدودة أو غير محدودة .

1-2-2 دالة الكثافة الإحتمالية: Probability Density Function

ليكن متغير عشوائي مستمر X معرف على مجال محدود: $[x_1, x_n]$ أو غير محدود: $]-\infty, +\infty[$. نسمي دالة كثافة إحتمالية للمتغير X الدالة $f(X)$ ، التي تحقق الشروط :

(أ) دالة غير سالبة : $f(x) \geq 0$

(ب) دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ماعدا لعدد محدود من النقاط .

(ج) تكامل الدالة على كل المجال يساوي واحد : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

منحني دالة الكثافة مستمر، كل نقطة على المنحني تمثل إرتفاع المنحني عند فئة أو مجال جزئي من مجال تعريف المتغير المستمر، هذا الإرتفاع و المجال الجزئي يحددان الإحتمال بتكامل محدود أو مساحة تحت منحني دالة الكثافة . إذن الإحتمال عند مجال جزئي هو مساحة أو تكامل محدود لدالة الكثافة الإحتمالية ، أما الإحتمال عند نقطة أو قيمة واحدة فهو صفر (لا توجد مساحة) . الإحتمال على المجال الكلي للمتغير المستمر ، هو المساحة الكلية تحت منحني دالة الكثافة وتساوي واحد.

مثال 6:

متغير مستمر X معرف بدالة الكثافة الإحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 , x > 1 \end{cases}$$

هذه الدالة تحقق الشروط :

دالة مستمرة و غير سالبة : $2(1-x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$

التكامل المحدود : $\int_0^1 2(1-x) \cdot dx = [2x - x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1$

2-2-2 دالة التوزيع: Distribution Function

دالة التوزيع أو دالة الإحتمال التجميعي هي الدالة التي تعطينا الإحتمال على أي مجال يتغير فيه X .
ليكن متغير عشوائي مستمر X معرف على مجال محدود: $[X_1, X_n]$ أو غير محدود: $]-\infty, +\infty[$
دالة التوزيع تعرف بالشكل:

$$F(x) = pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(X) \cdot dX$$

دالة التوزيع تراكمية من أول قيمة لمجال تعريف المتغير المستمر إلى غاية قيمة معينة x .
هذه الدالة تحقق :

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

إذا وضعنا $x=a$ ، دالة التوزيع :

$$F(a) = pr(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(X) \cdot dX = [F(X)]_{-\infty}^a = F(a) - 0$$

لتكن a, b بحيث : $a \leq b, a, b \in]-\infty, +\infty[$

$$pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(X) dX = [F(X)]_a^b = F(b) - F(a)$$

و أيضا :

$$pr(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

الإحتمال عند نقطة واحدة:

$$pr(X = a) = pr(a \leq X \leq a) = [F(X)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

خواص:

°1 دالة التوزيع متزايدة : $F(a) \leq F(b), a \leq b$

°2 دالة التوزيع مستمرة على $\mathbb{R}$.

3 دالة قابلة للإشتقاق و المشتقة : $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$

°4 دالة التوزيع محصورة بين : $0 \leq F(x) \leq 1$

أي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

مثال 7:

المثال السابق، دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير المستمر x :

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) , & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 , & x < 0 , x > 1 \end{cases}$$

دالة التوزيع :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(X) dX = \int_{-\infty}^x (2 - 2X) dx = [2X - X^2]_{-\infty}^x = 2x - x^2$$

وتكتب بالشكل:

$$F(x) = \begin{cases} 0 , & x < 0 \\ (2x - x^2) , & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 , & x > 1 \end{cases}$$

الإحتمالات:

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = pr\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$pr\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

(3) المميزات العددية للمتغيرات العشوائية (العزوم):

العزوم Moments هي خصائص أو مميزات عددية للمتغيرات العشوائية ، تستخدم لتحديد المتوسطات وقياس التشتت، الإلتواء و التفرطح ، كما أنها تعتبر أدلة رقمية لوصف التوزيعات الإحتمالية.

1-3 العزوم الابتدائية و العزوم المركزية:

1-1-3 العزوم الابتدائية:

تسمى عزوم ابتدائية أو عزوم حول الصفر Moments around the origin .

تعريف:

يعرف العزم من الرتبة r حول الصفر، لمتغير عشوائي X بالعلاقة التالية: ⁶

$$MO_r = E(X^r) = \sum x^r * f(x) \quad \text{متغير متقطع:}$$

$$MO_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r * f(x) dx \quad \text{متغير مستمر:}$$

⁶ Khaldi khaled, probabilités. Op-cit, p 42.

باستخدام هذه العلاقات يمكن تعريف عدد لانهائي من العزوم :

$$MO_0 = E(X^0) = \sum f(x) = 1 \quad : \text{ فإن } r=0 \text{ ، إذا كان}$$

أي أن العزم الابتدائي من الرتبة 0 يساوي واحد.

$$MO_1 = E(X) = \sum x * f(x) = \mu \quad : \text{ فإن } r=1 \text{ ، إذا كان}$$

أي أن العزم الابتدائي من الرتبة 1 هو القيمة المتوقعة أو القيمة المتوسطة.

$$MO_2 = E(X^2) = \sum x^2 * f(x) \quad : \text{ العزم الابتدائي من الرتبة 2: إذا كان } r=2 \text{ ،}$$

... و هذه الحالات تنطبق أيضا على المتغير المستمر .

2-1-3 العزوم المركزية:

العزوم المركزية تكون حول قيمة مركزية (متوسط ، وسيط ...)، إذا كانت العزوم حول القيمة المتوسطة

تسمى عزوم حول المتوسط Moments around the mean .

تعريف:

يعرف العزم المركزي من الرتبة r حول المتوسط، لمتغير عشوائي X بالعلاقة التالية:

$$MC_r = E[(X - \mu)^r] = \sum (x - \mu)^r * f(x) \quad : \text{ متغير متقطع}$$

$$MC_r = E[(X - \mu)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^r * f(x) dx \quad : \text{ متغير مستمر}$$

باستخدام هذه العلاقات يمكن تعريف عدد لانهائي من العزوم المركزية :

$$MC_1 = E(X - \mu) = \sum (X - \mu) * f(x) = 0 \quad : \text{ فإن } r=1 \text{ ، إذا كان}$$

أي أن العزم المركزي من الرتبة 1 هو مجموع الانحرافات عن المتوسط ويساوي صفر .

$$MC_2 = E[(X - \mu)^2] = \sum (x - \mu)^2 * f(x) = \sigma^2 \quad : \text{ فإن } r=2 \text{ ، إذا كان}$$

أي أن العزم المركزي من الرتبة 2 حول المتوسط هو التباين.

$$MC_3 = E[(X - \mu)^3] = \sum (x - \mu)^3 * f(x) \quad : \text{ العزم المركزي من الرتبة 3: إذا كان } r=3 \text{ ،}$$

... وكذلك بالنسبة للمتغير المستمر .

3-1-3 تطبيقات على العزوم:

- معامل الالتواء : Skewness Coefficient

التوزيع المتناظر مثل التوزيع الطبيعي يكون فيه: المتوسط يساوي الوسيط، يساوي المنوال. التوزيعات

غير المتناظرة تكون إما موجبة الالتواء أو سالبة الالتواء .

معامل فيشر Fisher للإلتواء، ويرمز له γ_1 يساوي العزم المركزي من الرتبة 3 ، مقسوماً على الانحراف المعياري مرفوعاً للقوة 3 :

$$\gamma_1 = MC_3 / \sigma^3$$

توزيع متناظر $\gamma_1 = 0$

توزيع موجب الإلتواء $\gamma_1 > 0$ ، توزيع سالب الإلتواء $\gamma_1 < 0$

- معامل التفرطح: Kurtosis Coefficient

مقارنة بالتوزيع الطبيعي المعتدل الذي يكون فيه المنحني متناظر وعلى شكل جرس، فإن التوزيع يكون إما أقل تفرطحاً (مدبب) ، أو أكثر تفرطحاً (منبسط) .

معامل التفرطح ويرمز له γ_2 يساوي العزم المركزي من الرتبة 4 ، مقسوماً على الانحراف المعياري مرفوعاً للقوة 4 ، هذه النسبة مطروحة منها 3 :⁷

$$\gamma_2 = \frac{MC_4}{\sigma^4} - 3$$

توزيع طبيعي معتدل $\gamma_2 = 0$

توزيع مدبب (تشنت ضعيف) $\gamma_2 > 0$ ، توزيع متفرطح (تشنت كبير) $\gamma_2 < 0$

2-3 القيمة المتوقعة: Expected Value

تعريف :

القيمة المتوقعة أو التوقع الرياضي لمتغير عشوائي X هي العزم الابتدائي من الرتبة 1 ، وهي تدل على متوسط قيم المتغير .

متغير متقطع : $E(X) = \mu = \sum x * f(x)$

متغير مستمر : $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x) dx$

إذا كانت $g(X)$ دالة للمتغير X ، فإن القيمة المتوقعة لهذه الدالة :

X متقطع : $E[g(X)] = \sum g(x) * f(x)$

X مستمر : $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) * f(x) dx$

⁷ موراي شبيغل، الإحصاء. ترجمة شعبان عبد الحميد. الطبعة السابعة الدار الدولية القاهرة 2004 . ص 143 .

خواص:

(1) إذا كان a ثابت، التوقع هو :

$$E(a) = a$$

البرهان :

$$E(a) = \sum a * f(x) = a * \sum f(x) = a$$

(2) إضافة ثابت a للمتغير X ، التوقع هو:

$$E(X + a) = E(X) + a$$

البرهان :

$$E(X + a) = \sum (x + a) * f(x) = \sum x * f(x) + \sum a * f(x) = E(X) + a$$

(3) ضرب ثابت a بالمتغير X ، التوقع هو:

$$E(aX) = a * E(X)$$

البرهان :

$$E(aX) = \sum (a * x) * f(x) = a * \sum x * f(x) = a * E(X)$$

(4) إذا كان X, Y متغيرين، توقع المجموع هو :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

البرهان :

$$E(X + Y) = \sum (x + y) * f(x, y) = \sum x * f(x) + \sum y * f(y) = E(X) + E(Y)$$

بنفس الطريقة يمكن البرهان أن توقع الفرق هو:

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

(5) إذا كان X, Y متغيرين مستقلين، توقع الجداء هو:

$$E(X.Y) = E(X) * E(Y)$$

البرهان :

$$E(X.Y) = \sum (x.y) * f(x, y) = \sum x * f(x) * \sum y * f(y) = E(X) * E(Y)$$

هذه الخواص تنطبق أيضا على حالة المتغير المستمر، وبنفس الطريقة يمكن البرهان بإستخدام التكامل.

3-3) التباين: Variance**تعريف :**

تباين متغير عشوائي X هو العزم المركزي حول المتوسط من الرتبة 2 ، وهو يدل على التشتت أو إبتعاد قيم المتغير عن المتوسط .

$$V(X) = \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 * f(x) \quad \text{متغير متقطع :}$$

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] \quad \text{التباين بدلالة التوقع :}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum x^2 * f(x) - \mu^2 \quad \text{أو :}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 * f(x) dx \quad \text{متغير مستمر :}$$

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] \quad \text{التباين بدلالة التوقع :}^8$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f(x) dx - \mu^2 \quad \text{أو :}$$

خواص:

(1) إذا كان a ثابت، التباين هو :

$$V(a) = 0$$

البرهان :

$$V(a) = E(a^2) - [E(a)]^2 = a^2 - a^2 = 0$$

(2) إضافة ثابت a للمتغير X ، التباين هو :

$$V(X + a) = V(X)$$

البرهان :

$$V(X + a) = E \left[((X + a) - (\mu + a))^2 \right] = E[(X + a - \mu - a)^2] = E[(X - \mu)^2] = V(X)$$

(3) ضرب ثابت a بالمتغير X ، التباين هو :

$$V(aX) = a^2 * V(X)$$

البرهان :

$$V(aX) = E[(aX - a\mu)^2] = E[a^2 * (X - \mu)^2] = a^2 * V(X)$$

⁸ Walder Masiéri, Statistique et calcul des probabilités. Edition Dalloz Paris 2001. P 323 .

(4) إذا كان X, Y متغيرين مستقلين، تبين المجموع هو :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

البرهان :

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 = E[X^2 + Y^2 + 2XY] - \\ &[E(X) + E(Y)]^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - [E(X)]^2 + [E(Y)]^2 + \\ &2E(X)E(Y) = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(X)E(Y) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - \\ &2E(X)E(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2E(X)E(Y) - \\ &2E(X)E(Y) = V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

وتبين الفرق هو : $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$

البرهان :

$$\begin{aligned} V(X - Y) &= E[(X - Y)^2] - [E(X - Y)]^2 = E[X^2 + Y^2 - 2XY] - \\ &[E(X) - E(Y)]^2 = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY) - [E(X)]^2 + [E(Y)]^2 - \\ &2E(X)E(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 - 2E(X)E(Y) + \\ &2E(X)E(Y) = V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

(5) إذا كان X, Y متغيرين مستقلين، تبين الجداء هو :

$$V(X.Y) = E(X^2).E(Y^2) - [E(X)]^2.[E(Y)]^2$$

البرهان :

$$\begin{aligned} V(X.Y) &= E[(X.Y)^2] - [E(X.Y)]^2 = E[X^2.Y^2] - [E(X).E(Y)]^2 = \\ &= E(X^2).E(Y^2) - [E(X)]^2.[E(Y)]^2 \end{aligned}$$

تمارين الفصل الأول:

تمرين 1:

مستودع تخزين فيه منتجات مصدرها من ثلاثة مصانع حيث الحصص كالتالي: المصنع الأول 50% ، المصنع الثاني 30% ، المصنع الثالث 20% .نسبة المنتجات التالفة في هذه المصانع هي على التوالي: 2% ، 3% ، 5% . أخذ منتج عشوائيا من المستودع ؛

1_ماهو إحتمال أن يكون غير تالف؟

2_إذا كان هذا المنتج غير تالف، ماهو إحتمال أن يكون من المصنع الأول ؟

تمرين 2:

قناص أول يصيب في العادة بمعدل $2/10$ ، قناص ثاني يصيب في العادة بمعدل $1/10$. يطلق كل منهما طلقة على هدف في آن واحد.

1_ماهو إحتمال عدم إصابة الهدف؛

2_ماهو إحتمال إصابة الهدف مرة واحدة؛

3_ماهو إحتمال إصابة الهدف مرتين؟

4_علما أن الهدف أصيب مرة واحدة، ماهو إحتمال إصابته من طرف القناص الأول؟

تمرين 3:

ليكن التوزيع الإحتمالي للمتغير X :

x	f(x)
1	1/4
2	a
3	1/4
4	1/4

1_أوجد قيمة a ؛

2_أوجد تابع التوزيع؛

3_أحسب $E(X)$, $V(X)$.

تمرين 4:

1°) لاعب يرمي حجر نرد بحيث : إذا كان الرقم 1 يسجل 2 نقطتين ، إذا كان الرقم 6 يسجل 3 نقاط ،

إذا كان الرقم من 2 إلي 5 يسجل نقطة واحدة. ليكن X متغير عشوائي يمثل نقاط اللاعب.

_أوجد جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير X ، أحسب $E(X)$, $V(X)$.

2°) لنفرض أن اللاعب دفع مسبقا 3 دينار، وعندما يسجل نقطة يكسب 2 دينار. ليكن Y متغير عشوائي يمثل ربح اللاعب.

_أوجد $E(Y)$, $V(Y)$.

تمرين 5:

متغير مستمر X معرف بالدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64} * x^2 , & 0 < x < 4 \\ 0 , & x \leq 0 , x \geq 4 \end{cases}$$

1_ تأكد من أن هذه الدالة هي دالة كثافة إحتمالية؛

2_ أوجد دالة التوزيع؛

3_ أحسب الإحتمالات: $pr(x \leq 3)$, $pr(1 < x < 2)$

تمرين 6:

لتكن دالة الكثافة الإحتمالية لمتغير مستمر X :

$$f(x) = \begin{cases} a.x^2 , & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 , & x < 0 , x > 1 \end{cases}$$

1_ أوجد قيمة a ؛

2_ أوجد دالة التوزيع؛

3_ أحسب الإحتمالات: $pr(x \leq \frac{1}{2})$, $pr(x > \frac{3}{4})$

4_ أحسب : $E(X)$, $V(X)$

حل التمرين 1:

نرمز الحدث A_1 المنتج من المصنع الأول، الحدث A_2 المنتج من المصنع الثاني، الحدث A_3 المنتج من المصنع الثالث. نرمز الحدث B المنتج غير تالف.

إحتمالات كل مصنع (الحصص):

$$p(A_1) = 0.5 , p(A_2) = 0.3 , p(A_3) = 0.2$$

إحتمالات التالف (النسب) :

المصنع الأول 0.02 ، المصنع الثاني 0.03 ، المصنع الثالث 0.05 .

إحتمالات غير تالف على التوالي:

$$p(B/A_1) = 1 - 0.02 = 0.98 \quad , \quad p(B/A_2) = 1 - 0.03 = 0.97$$

$$p(B/A_3) = 1 - 0.05 = 0.95$$

1_ إحتمال المنتج غير تالف:

$$p(B) = p(A_1) * p(B/A_1) + p(A_2) * p(B/A_2) + p(A_3) * p(B/A_3) \\ = 0.5 * 0.98 + 0.3 * 0.97 + 0.2 * 0.95 = 0.97$$

2_ إحتمال شرطي: إحتمال من المصنع الأول علما أنه غير تالف؛

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_1) * p(B/A_1)}{p(B)} = \frac{0.5 * 0.98}{0.97} = 0.505$$

حل التمرين 2:

نرمز إصابة القناص الأول A_1 ، عدم إصابة $\bar{A}_1$. نرمز إصابة القناص الثاني A_2 ، عدم إصابة $\bar{A}_2$.
نرمز إصابة الهدف مرة واحدة B .

1_ إحتمال عدم إصابة الهدف:

$$p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = p(\bar{A}_1) * p(\bar{A}_2) = 0.8 * 0.9 = 0.72$$

2_ إحتمال إصابة الهدف مرة واحدة:

$$p(B) = p(A_1 \cap \bar{A}_2) + p(\bar{A}_1 \cap A_2) = 0.2 * 0.9 + 0.1 * 0.8 = 0.26$$

3_ إحتمال إصابة الهدف مرتين:

$$p(A_1 \cdot A_2) = p(A_1) * p(A_2) = 0.2 * 0.1 = 0.02$$

4_ إحتمال شرطي: إصابة القناص الأول علما مرة واحدة؛

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_1) * p(B/A_1)}{p(B)} = \frac{p(A_1) * p(A_1 \cdot \bar{A}_2)}{p(B)} = \frac{p(A_1) * p(A_1) * p(\bar{A}_2)}{p(B)} \\ = \frac{0.2 * 0.2 * 0.9}{0.26} = \frac{0.036}{0.26} = 0.1384$$

حل التمرين 3:

x	f(x)	F(x)	x.f(x)	x ² .f(x)
1	1/4	1/4	1/4	1/4
2	a	2/4	2/4	4/4
3	1/4	3/4	3/4	9/4
4	1/4	1	4/4	16/4
	1		E(x)=10/4	E(x ²)=30/4

$$\sum f(x) = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \quad 1_ \text{ لدينا :}$$

$$F(x) = 0, \quad x < 1 \quad 2_ \text{ تابع التوزيع:}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0.25, & 1 \leq x < 2 \\ 0.5, & 2 \leq x < 3 \\ 0.75, & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$F(x) = 1, \quad x \geq 4$$

$$E(X) = \mu = \sum x \cdot f(x) = \frac{10}{4} = 2.5 \quad 3_ \text{ التوقع الرياضي:}$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{30}{4} - \left(\frac{10}{4}\right)^2 = \frac{20}{16} = 1.25 \quad \text{التباين :}$$

حل التمرين 4:

1)_ جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير X :

الرقم 1 : 2 نقاط ، الإحتمال $\frac{1}{6}$

الرقم 6 : 3 نقاط ، الإحتمال $\frac{1}{6}$

الرقم (2,3,4,5) : 1 نقطة ، الإحتمال $\frac{4}{6}$

x	F(x)	x.f(x)	X ² .f(x)
1	4/6	4/6	4/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
	1	E(x)=9/6	E(x ²)=17/6

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = \frac{9}{6} \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{7}{12} \quad \text{التباين:}$$

$$Y = 2 \cdot X - 3 \quad 2_ \text{ ربح اللاعب Y ، يتغير مع عدد النقاط:}$$

التوقع الرياضي:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2 \cdot X - 3) = E(2X) - E(3) = 2E(X) - 3 \\ &= 2 \cdot \frac{9}{6} - 3 = 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

التباين:

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(2 \cdot X - 3) = V(2X) + V(3) = 4V(X) + 0 \\ &= 4 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

حل التمرين 5:

1_ دالة كثافة إحصائية:

$$f(x) = \frac{3}{64} * x^2 \geq 0, \quad 0 < x < 4$$

$$\int_0^4 f(x).dx = 1$$

$$\int_0^4 \frac{3}{64} x^2 . dx = \left[\frac{1}{64} * x^3 \right]_0^4 = \frac{1}{64} * 4^3 - 0 = 1$$

2_ دالة التوزيع:

$$F(x) = \int_0^x f(X).dX = \int_0^x \frac{3}{64} X^2 . dX = \left[\frac{1}{64} * X^3 \right]_0^x = \frac{1}{64} * x^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{64} . x^3 & , \quad 0 < x < 4 \\ 1 & , \quad x \geq 4 \end{cases}$$

3_ الإحتمال:

$$pr(x \leq 3) = F(3) = \frac{1}{64} . 3^3 = \frac{27}{64}$$

$$pr(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{64} . 2^3 - \frac{1}{64} . 1^3 = \frac{7}{64}$$

حل التمرين 6:

1_ لدينا دالة كثافة إحصائية، يعني:

$$\int_0^1 f(x).dx = 1$$

$$\int_0^1 ax^2 . dx = \left[\frac{a}{3} . x^3 \right]_0^1 = \frac{a}{3} * 1^3 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3$$

وتكتب:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x < 0, x > 1 \end{cases}$$

2_ دالة التوزيع:

$$F(x) = \int_0^x f(X).dX = \int_0^x 3X^2 . dX = [X^3]_0^x = x^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^3 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

3_ حساب الإحتمالات:

$$\begin{aligned} pr\left(x \leq \frac{1}{2}\right) &= F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \\ pr\left(x > \frac{3}{4}\right) &= 1 - F\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \end{aligned}$$

4_ حساب التوقع الرياضي و التباين:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 3x^3 \cdot dx \\ &= \left[\frac{3}{4} * x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4} \\ E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 3x^4 \cdot dx \\ &= \left[\frac{3}{5} * x^5\right]_0^1 = \frac{3}{5} \\ V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80} \end{aligned}$$

الفصل الثاني: التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة أو قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة لها صيغ عامة معروفة، قد تكون على شكل جدول توزيع احتمالي أو على شكل دالة احتمال. المتغيرات العشوائية المتقطعة التي تتبع قانون معين تحقق شروط دالة الاحتمال .

التوزيعات المتقطعة التي لها أهمية سواء من الناحية النظرية أو من الناحية التطبيقية، هي:
-التوزيع المنتظم -توزيع برنولي -توزيع ثنائي الحدين -التوزيع الهندسي -التوزيع مافوق الهندسي -توزيع بواسون .

1) التوزيع المنتظم المتقطع: U(n) Uniform Distribution

التوزيع المنتظم توزيع احتمالي بسيط يلائم الظواهر التي تكون فيها جميع قيم المتغير المتقطع لها احتمالات متساوية .

مثال 1: نرمي حجر النرد، المتغير العشوائي الرقم الذي يظهر : $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$
كل رقم له احتمال $1/6$.

1-1) قانون التوزيع:

معطي بالدالة : $f(x) = 1/n$, $x = 1, 2, 3, \dots, n$

حيث n عدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي .

و نكتب: $X \sim U(n)$

1-2) القيمة المتوقعة:

القيمة المتوقعة لمتغير منتظم: $\mu = \frac{n+1}{2}$

1-3) التباين:

التباين: $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$

مثال 2:

نأخذ عشوائيا شخص من بين 4 أشخاص، المتغير العشوائي رقم الشخص : $x=1, 2, 3, 4$
كل شخص له احتمال $1/4$.

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad \text{دالة الإحتمال:}$$

$$E(X) = \sum x * f(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{القيمة المتوقعة:}$$

$$V(X) = \sum x^2 * f(x) - \mu^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} + \frac{16}{4} - \left[\frac{5}{2}\right]^2 = \frac{15}{12} \quad \text{التباين:}$$

(2) توزيع برنولي: Bernoulli B(1,ρ)

توزيع إحصائي متقطع يلائم الظواهر التي تشمل على حدثين ممكنين فقط (نتيجتين فقط):

حدث نسميه نجاح ويرمز له 1 ، والحدث الآخر نسميه فشل ويرمز له 0 .

إحتمال النجاح ويرمز له ρ ، وإحتمال الفشل: q=1-ρ

مجموع الإحتمالات: ρ+q=1

مثال 1: رمي قطعة نقود، النتيجة وجه: نجاح 1 ، النتيجة ظهر: فشل 0

إحتمال النجاح: ρ=1/2 ، وإحتمال الفشل: q=1/2

مثال 2: إطلاق طلقة على هدف، إصابة الهدف: نجاح 1 ، عدم إصابة الهدف: فشل 0

إحتمال النجاح ρ= 0.8 ، وإحتمال الفشل q= 0.2

(1-2) قانون التوزيع:

معطى بالدالة:

$$f(x) = \rho^x * q^{(1-x)}$$

$$x = 1, 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad q = 1 - \rho$$

أو بالجدول:

x	f(x)
1	ρ
0	q
	1

و نكتب: $X \sim B(1, \rho)$

(2-2) القيمة المتوقعة:

تحسب بالعلاقة: $E(X) = \sum x * f(x)$

$$E(X) = 1 * \rho + 0 * q = \rho \quad \text{وتساوي :}$$

$$\mu = \rho \quad \text{أي إحتمال النجاح :}$$

(3-2) التباين:

$$V(X) = \sum x^2 * f(x) - \mu^2 \quad \text{يحسب بالعلاقة :}$$

$$V(X) = 1 * \rho + 0 * q - \rho^2 = \rho - \rho^2 = \rho(1 - \rho) = \rho * q \quad \text{ويساوي :}$$

$$\sigma^2 = \rho * q \quad \text{أي جداء إحتمال النجاح في إحتمال الفشل :}$$

مثال 3:

نرمي حجر نرد، نسمي ظهور الرقم (4) نجاح 1، ظهور رقم آخر فشل 0 .

إحتمال النجاح $\rho = 1/6$ ، إحتمال الفشل $q = 5/6$ ،

$$E(X) = \rho = \frac{1}{6} \quad , \quad V(X) = \rho * q = \frac{5}{36} \quad \text{القيمة المتوقعة و التباين :}$$

(3) توزيع ثنائي الحدين: Binomial Distribution B(n,ρ)

توزيع إحتمالي متقطع يستخدم في الظواهر التي نهتم فيها بظهور حدث معين (نجاح 1) ، عدد من

المرات x من بين جملة من المحاولات عددها n .

وتكون:⁹

_ كل محاولة لها نتيجتين فقط : نجاح 1 ، فشل 0 ؛

_ المحاولات عددها n ، مستقلة عن بعضها البعض ؛

_ إحتمال النجاح ثابت ρ من محاولة لأخرى ؛

_ عدد مرات النجاح هو المتغير العشوائي x ، الذي يتراوح بين 0 (صفر نجاح أي المحاولات كلها فشل) و

n (المحاولات كلها نجاح) .

مثال 1: رمي قطعة نقود 3 مرات ، النتيجة وجه: نجاح ، عدد مرات النجاح: $x=0,1,2,3$.

مثال 2: إطلاق 4 طلقات على هدف، في كل طلقة إصابة الهدف: نجاح ،

إحتمال النجاح $\rho = 0.8$ ، عدد مرات الإصابة: $x=0,1,2,3,4$.

⁹ جورج كانافوس، دون ميلر. الإحصاء للتجاربيين مدخل حديث. ترجمة سلطان محمد عبد الحميد. دار المريخ الرياض 2004 . ص 200 .

توزيع ثنائي الحدين هو تكرار لتجربة برنولي n مرة : تكرار 1 (أو 0) n مرة ، بحيث يصبح المتغير العشوائي x هو مجموع $(1$ أو $0)$ n مرة .

3-1 دالة الاحتمال:

الصيغة العامة لدالة الاحتمال :

$$f(x) = C_n^x * \rho^x * q^{(n-x)}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

C_n^x توفيقية تمثل عدد حالات (مرات) الحصول على x نجاح و بدون ترتيب .

ρ احتمال النجاح في كل مرة ، q احتمال الفشل.

$$X \sim B(n, \rho) \quad \text{و نكتب:}$$

مثال 3:

نأخذ المثال 2 السابق، إطلاق 4 طلقات على هدف؛

$$f(x) = C_4^x * 0.8^x * 0.2^{(4-x)} \quad \text{دالة الاحتمال:}$$

$$x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$pr(x = 0) = f(0) = C_4^0 * 0.8^0 * 0.2^4 = 0.0016 \quad \text{احتمال إصابة الهدف 0 مرة:}$$

$$pr(x = 3) = f(3) = C_4^3 * 0.8^3 * 0.2^1 = 0.4096 \quad \text{احتمال إصابة الهدف 3 مرات:}$$

3-2 القيمة المتوقعة:

$$\mu = n * \rho \quad \text{القيمة المتوقعة لمتغير ثنائي الحدين:}$$

أي جداء عدد المحاولات في احتمال النجاح.

3-3 التباين:

$$\sigma^2 = n * \rho * q \quad \text{التباين:}$$

أي جداء عدد المحاولات في احتمال النجاح في احتمال الفشل.

مثال 4:

نأخذ المثال 2 ؛

$$\mu = 4 * 0.8 = 3.2 \quad \text{القيمة المتوقعة:}$$

$$\sigma^2 = 4 * 0.8 * 0.2 = 0.64 \quad \text{التباين:}$$

(4-3) تجميع توزيع ثنائي الحدين:

ليكن متغيرين عشوائيين مستقلين X_1 , X_2 يتبعان توزيع ثنائي الحدين بنفس نسبة النجاح ρ :

$$X_1 \sim B(n_1, \rho)$$

$$X_2 \sim B(n_2, \rho)$$

المتغير: $Y = X_1 + X_2$ يتبع توزيع ثنائي الحدين بنسبة نجاح ρ ، وعدد: $n = n_1 + n_2$

$$Y \sim B(n, \rho)$$

(4) التوزيع الهندسي: $G(\rho)$ Geometric Distribution

يعتمد على فرضيات تجربة برنولي:¹⁰

نجاح ، فشل . بمعدل نجاح ثابت ρ ، ومعدل فشل $q=1-\rho$.

نكرر محاولات برنولي إلى غاية الحصول على نجاح في المحاولة k ، وتكون:

_المحاولات مستقلة عن بعضها ؛

_المتغير العشوائي X هو رقم المحاولة التي تحقق نجاح .

(1-4) دالة الإحتمال:

تعطي بالشكل :

$$f(x) = \rho * q^{x-1}$$

$$x = 1, 2, 3, \dots, k$$

ونكتب: $X \sim G(\rho)$

(2-4) القيمة المتوقعة:

القيمة المتوقعة تعرف بأنها مقلوب: $\mu = \frac{1}{\rho}$

أي مقلوب إحتمال النجاح .

(3-4) التباين:

التباين يعرف أيضا بأنه جداء المقلوب: $\sigma^2 = \frac{1}{\rho} * \frac{q}{\rho} = \frac{q}{\rho^2}$

أي جداء مقلوب إحتمال النجاح في إحتمال الفشل مقسوم على إحتمال النجاح .

¹⁰ Khaldi khaled, Probabilités. Op-cit, p 69 .

مثال:

شخص يحاول إصابة هدف، معدل إصابته 0.8 ؛

دالة الاحتمال: $f(x) = 0.8 * 0.2^{x-1}$

$$x = 1, 2, 3 \dots$$

احتمال أن يصيب الهدف في المحاولة 3 : $f(3) = 0.8 * 0.2^2 = 0.032$

القيمة المتوقعة: $\mu = \frac{1}{0.8} = 1.25$

التباين: $\sigma^2 = \frac{0.2}{0.8^2} = 0.3125$

(5) التوزيع مافوق الهندسي: Hypergeometric Distribution H(N,n,r)

يرتبط كثيرا بتوزيع ثنائي الحدين: ظهور حدث معين (نجاح) عدد من المرات x من بين جملة من المحاولات عددها n .

الإختلاف بينهما، هو أنه في التوزيع مافوق الهندسي تكون:

المحاولات غير مستقلة عن بعضها ؛

احتمال النجاح يتغير من محاولة لأخرى .

مثال 1:

ليكن مجتمع مكون من $N=5$ ، أشخاص : $\{ H, H, F, F, F \}$

3 ثلاث نساء و 2 رجلين .

نأخذ $n=2$ شخصين عشوائيا بدون إرجاع ،

نسمي ظهور امرأة في كل سحب نجاح ، عدد مرات النجاح : $x = 0, 1, 2$

عدد النساء $r=3$ ، عدد العناصر التي تقابل نجاح من بين $N=5$ عنصر ،

إحتمال النجاح :

السحب الأول : $3/5$ ، السحب الثاني : $3/4$ أو $2/4$. إحتمال النجاح غير ثابت .

عدد مرات الفشل : $n-x=2-x$.

عدد الرجال $N-r=2$ عدد العناصر التي تقابل فشل من بين $N=5$ عنصر .

المفهوم المعتاد في ظواهر التوزيع مافوق الهندسي هو كالتالي : ¹¹

r يقابل عدد العناصر التي تفترض كنجاحات؛

N عدد عناصر المجتمع؛

$N-r$ يقابل عدد العناصر التي تفترض كفشل.

في عينة من n عنصر تؤخذ بدون إرجاع ، يمكن الحصول على x عنصر تمثل عدد مرات النجاح ، و

$n-x$ عنصر تمثل عدد مرات الفشل . لكي يتحقق هذا يجب:

أن نأخذ x نجاح من بين r عنصر، أي : C_r^x

ونأخذ $n-x$ فشل من بين $N-r$ عنصر، أي : C_{N-r}^{n-x}

وهذه تمثل عدد الحالات الملائمة للظاهرة .

أما عدد الحالات الممكنة (الكلية) ، فهي : C_N^n

أي في جميع الحالات نأخذ n عنصر من بين N .

الإحتمال هو عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة .

1-5 دالة الإحتمال:

$$f(x) = \frac{C_r^x * C_{N-r}^{n-x}}{C_N^n} \quad \text{دالة الإحتمال تأخذ الشكل:}$$

$$x = 0, 1, 2 \dots n$$

حيث: N عدد عناصر المجتمع ،

n عدد المحاولات أو عناصر العينة ،

r عدد العناصر التي تفترض كنجاحات .

و نكتب: $X \sim H(N, n, r)$

مثال 2:

نأخذ المثال 1 السابق،

$$f(x) = \frac{C_3^x * C_2^{2-x}}{C_5^2} \quad \text{دالة الإحتمال:}$$

$$x = 0, 1, 2$$

¹¹ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. مرجع سبق ذكره ، ص 156 .

$$f(0) = \frac{C_3^0 * C_2^2}{C_5^2} = \frac{1*1}{10} = \frac{1}{10} \quad \text{إحتمال 0 امرأة :}$$

$$pr(x \geq 1) = f(1) + f(2) \quad \text{إحتمال على الأقل امرأة واحدة 1 :}$$

$$pr(x \geq 1) = \frac{C_3^1 * C_2^1}{C_5^2} + \frac{C_3^2 * C_2^0}{C_5^2} = \frac{3*2}{10} + \frac{3*1}{10} = \frac{9}{10}$$

5-2) القيمة المتوقعة:

$$\mu = n * \frac{r}{N} \quad \text{القيمة المتوقعة هي جداء عدد المحاولات في إحتمال النجاح :}$$

$$\left(\frac{r}{N}\right) \quad \text{إحتمال النجاح للمحاولة الأولى}$$

5-3) التباين:

التباين هو جداء عدد المحاولات في إحتمال النجاح في إحتمال الفشل في معامل عدم الإرجاع :

$$\sigma^2 = n * \frac{r}{N} * \frac{(N-r)}{N} * \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{n*r*(N-r)*(N-n)}{N^2*(N-1)}$$

مثال 3:

نأخذ المثال 1 السابق،

$$\mu = 2 * \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \quad \text{القيمة المتوقعة:}$$

$$\sigma^2 = \frac{2*3*(5-3)*(5-2)}{5^2*(5-1)} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25} \quad \text{التباين:}$$

6) توزيع بواسون: $P(\lambda)$

قانون بواسون هو توزيع إحصائي متقطع يلائم الظواهر التي تقع فيها أحداث (نجاحات) بمعدل ثابت في

وحدة أو مجال من : الزمن ، المسافة ، المساحة ، الحجم ...

وتكون: ¹²

_الأحداث أو النجاحات نادرة ؛

_الأحداث مستقلة عن بعضها من مجال لأخر؛

_المجال يؤخذ عشوائياً، و المتغير العشوائي X هو عدد النجاحات في المجال .

¹² جورج كانافوس، دون ميلر، الإحصاء للتجاربيين مدخل حديث. مرجع سبق ذكره. ص 237 .

أمثلة:

°1 عدد المسافرين الذين يصلون إلى محطة قطار في ساعة.

°2 عدد المكالمات الهاتفية في ساعة.

°3 عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من كتاب.

°4 عدد العيوب التقنية في كل 100 كلم من طريق.

(1-6) دالة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!}$$

الصيغة العامة لدالة بواسون:

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

حيث: λ معدل أو متوسط النجاحات في المجال،

$e = 2.718$ القيمة الأسية.

$$X \sim P(\lambda) \quad \text{ونكتب:}$$

(2-6) القيمة المتوقعة:

القيمة المتوقعة هي معدل النجاحات في المجال: $\mu = \lambda$

(3-6) التباين:

التباين أيضا هو معدل النجاحات: $\sigma^2 = \lambda$

مثال 1:

يتلقى قسم إستجالات في المتوسط 5 مكالمات في الساعة، x متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات في ساعة أخذت عشوائيا .

$$f(x) = \frac{5^x * e^{-5}}{x!}$$

دالة الاحتمال:

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(0) = \frac{5^0 * e^{-5}}{0!} = 0.00673$$

إحتمال تلقي 0 مكالمات في ساعة:

$$f(3) = \frac{5^3 * e^{-5}}{3!} = 0.1403$$

إحتمال تلقي 3 مكالمات في ساعة:

$$\mu = 5$$

القيمة المتوقعة:

$$\sigma^2 = 5$$

التباين:

(4-6) تجميع توزيع بواسون:

ليكن متغيرين عشوائيين مستقلين X_1 , X_2 يتبعان توزيع بواسون:

$$X_1 \sim P(\lambda_1)$$

$$X_2 \sim P(\lambda_2)$$

المتغير: $Y = X_1 + X_2$ يتبع توزيع بواسون بمتوسط: $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$Y \sim P(\lambda)$$

(5-6) تقريب توزيع ثنائي الحدين من بواسون: Poisson approximation

عندما تكون n كبيرة $n \geq 30$ ،

و p صغيرة ، أي: $n.p \leq 5$ ،

يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين من بواسون، بحيث: ¹³ $\lambda = n.p$

مثال 2:

مصنع ينتج مصابيح كهربائية، نسبة المعيب $p = 1\%$ ، أخذنا عينة $n=30$ نسمي مصباح معيب

نجاح، X متغير عشوائي يمثل عدد المصابيح المعيبة في العينة.

توزيع ثنائي الحدين:

$$f(x) = C_{30}^x * 0.01^x * 0.99^{30-x} \quad \text{دالة الاحتمال:}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, 30$$

$$f(1) = C_{30}^1 * 0.01^1 * 0.99^{29} = 0.224151 \quad \text{إحتمال 1 مصباح معيب:}$$

توزيع بواسون:

$$\lambda = n.p = 30 * 0.01 = 0.3 \quad \text{المتوسط:}$$

$$f(x) = \frac{0.3^x * e^{-0.3}}{x!} \quad \text{دالة الاحتمال:}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(1) = \frac{0.3^1 * e^{-0.3}}{1!} = 0.222245 \quad \text{إحتمال 1 مصباح معيب:}$$

¹³ نفس المرجع، ص 243 .

تمارين الفصل الثاني:تمرين 1:

متغير عشوائي منقطع معرف بدالة الاحتمال: $f(x) = \frac{1}{n}$

حيث: $x = 1, 2, 3, \dots, n$ ، n عدد طبيعي.

1_ بين أن $f(x)$ قانون توزيع احتمالي؛

2_ بين أن: $E(X) = \frac{n+1}{2}$ ، $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

تعطي:

مجموع الحدود: $(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$

مجموع السلسلة: $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{n(2n+1)(2n+2)}{12}$

تمرين 2:

قناصان يطلق كل واحد منهما طلقة واحدة على هدف، الأول يصيب بمعدل 0.45 ، الثاني يصيب بمعدل 0.7 . المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات الإصابة للقناص الأول، المتغير العشوائي Y يمثل عدد مرات الإصابة للقناص الثاني.

1_ أوجد التوزيع الاحتمالي لكل متغير X ، Y ، وأوجد التوقع الرياضي و التباين ،

2_ ليكن المتغير العشوائي $d = X - Y$ ، أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير d ،

3_ أحسب ثم إستنتج التوقع الرياضي و التباين للمتغير d .

تمرين 3:

شحنة كبيرة من منتج تحتوي على 20% وحدات معيبة ، أخذت عينة $n=10$ وحدات، نسمي متغير عشوائي X عدد الوحدات المعيبة في العينة.

1_ حدد شكل هذا التوزيع،

2_ ماهو احتمال أن يكون العدد المعيب أقل أو يساوي 2 ،

3_ ماهو احتمال أن يكون العدد المعيب أكبر من 1 .

4_ ماهو احتمال أن يكون العدد المعيب من : $1 \leq x \leq 3$

5_ أوجد التوقع الرياضي و التباين .

تمرين 4:

باعت مؤسسة معتمدة 6 ست بطاريات من نفس الصنع، إذا كان هذا النوع من البطاريات يبقى صالحا بعد سنتين من بدء الإستعمال بإحتمال قدره 0.7 ، أحسب إحتمال :

- 1_ أن تكون البطاريات 6 الستة صالحة؛
- 2_ أن تكون البطاريات 6 غير صالحة؛
- 3_ أن تكون 3 بطاريات غير صالحة؛
- 4_ أن تكون 2 بطاريتان على الأكثر غير صالحتين.
- 5_ أوجد $E(X)$, $V(X)$.

تمرين 5:

لتكن دالة الإحتمال للمتغير الهندسي géométrique : $f(x) = \rho \cdot q^{(x-1)}$

حيث : $x = 1, 2, 3, \dots, k$

$$\rho + q = 1 , \quad 0 \leq \rho , q \leq 1$$

1_ بين أن $f(x)$ قانون توزيع إحتمالي؛

$$2_ \text{ بين أن : } E(X) = \frac{1}{\rho} , \quad V(X) = \frac{q}{\rho^2}$$

تعطي قيم :

$$\sum q^x = \frac{q}{\rho} , \quad \sum x \cdot q^x = \frac{q}{\rho^2} , \quad \sum x^2 \cdot q^x = \frac{q(1+q)}{\rho^3}$$

تمرين 6:

قناص يصيب في العادة بمعدل 90% يطلق طلقات على هدف متحرك إلي غاية إصابة الهدف، نسمي متغير عشوائي X رقم الطلقة التي يصيب فيها الهدف.

- 1_ حدد شكل هذا التوزيع،
- 2_ ماهو إحتمال إصابة الهدف في الطلقة 2 ،
- 3_ ماهو إحتمال إصابة الهدف بعد الطلقة 2 .
- 4_ أوجد التوقع الرياضي و التباين .

تمرين 7:

وحدة إنتاجية يعمل فيها 6 ست عمال ، 3 منهم لهم أقدمية تفوق 10 سنوات .

أخذنا 4 عمال عشوائيا بدون إرجاع، نسمي الصفة أقدمية تفوق 10 سنوات نجاح.
 _ماهو إحتمال أن يكون 2 عاملان لهما هذه الصفة في العينة $n=4$.

تمرين 8:

شحنة تتكون من $N=50$ وحدة من منتج ، بها 10 وحدات معيبة ، أخذت عينة $n=3$ وحدات بدون إرجاع، نسمي متغير عشوائي X عدد الوحدات المعيبة في العينة.

1_حدد شكل التوزيع،

2_ماهو إحتمال أن يكون العدد المعيب يساوي 2

3_ماهو إحتمال أن يكون العدد المعيب أقل أو يساوي 1 .

4_أوجد التوقع الرياضي و التباين .

تمرين 9:

متوسط عدد السيارات التي تمر على مقطع معين من طريق هو 1.8 سيارة في الدقيقة، عدد السيارات التي تمر في دقيقة أخذت عشوائيا متغير عشوائي X .

1_حدد شكل توزيع هذا المتغير،

2_ماهو إحتمال عدم مرور أية سيارة،

3_ماهو إحتمال مرور سيارتين 2 ،

4_ماهو إحتمال مرور على الأقل سيارة 1 ،

5_ماهو إحتمال مرور أكثر من سيارة ،

6_ماهو إحتمال مرور من 2 إلي 4 سيارات .

تمرين 10:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

لتكن دالة الإحتمال لمتغير poisson :

حيث : $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

1_بين أن $f(x)$ قانون توزيع إحتمالي؛

2_بين أن: $E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$

تعطي: قيم المجاميع:

$$\sum \frac{\lambda^x}{x!} = \sum \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} = \sum \frac{\lambda^{(x-2)}}{(x-2)!} = \dots = e^{\lambda}$$

تمرين 11:

في مصنع للمصابيح 1% معيبة ، أخذت عينة $n=30$ مصباح . المتغير العشوائي x عدد المصابيح المعيبة في العينة.

_ما هو احتمال أن يكون العدد المعيب أكبر من 1 . إستخدم توزيعين : binomiale , poisson

حل التمرين 1:

$$f(x) = \frac{1}{n} \geq 0 \quad \text{1_ قانون توزيع احتمالي: } n \text{ موجب إذن:}$$

$$\sum f(x) = 1$$

$$\sum f(x) = \sum_1^n \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = n * \frac{1}{n} = 1$$

2_ نبين أن، التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum x f(x) = \sum_1^n x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_1^n x$$

نعوض مجموع حدود المتتالية:

$$E(X) = \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 \dots + n) = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n+1}{2}$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot f(x) = \sum_1^n x^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_1^n x^2$$

نعوض مجموع حدود السلسلة:

$$E(X^2) = \frac{1}{n} (1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2) = \frac{1}{n} \left(\frac{n(2n+1)(2n+2)}{12} \right) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{12}$$

$$V(X) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{12} - \left[\frac{n+1}{2} \right]^2 = \frac{4n^2+4n+2n+2}{12} - \frac{n^2+2n+1}{4}$$

$$V(X) = \frac{4n^2+6n+2}{12} - \frac{3n^2+6n+3}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

حل التمرين 2:

1_ التوزيع الإحصائي:

القنص الأول: x متغيرة برنولي عدد مرات الإصابة $x = 1, 0$

إحتمال الإصابة (النجاح): $\rho_1 = 0.45$. إحتمال عدم الإصابة (الفشل): $q_1 = 0.55$

جدول التوزيع الإحصائي:

x	f(x)
1	0.45
0	0.55
	1

التوقع الرياضي: $E(X) = \rho_1 = 0.45$

التباين: $V(X) = \rho_1 * q_1 = 0.2475$

القنص الثاني: y متغيرة برنولي عدد مرات الإصابة $y = 1, 0$

إحتمال الإصابة (النجاح): $\rho_2 = 0.7$. إحتمال عدم الإصابة (الفشل): $q_2 = 0.3$

جدول التوزيع الاحتمالي:

y	f(y)
1	0.7
0	0.3
	1

التوقع الرياضي: $E(Y) = \rho_2 = 0.7$

التباين: $V(Y) = \rho_2 * q_2 = 0.21$

2_ المتغير: $d = x - y$

التوزيع الاحتمالي المشترك:

Y \ X	1	0
1	0.45 $f(1,1)=f(1).f(1)$ $=0.45*0.7=0.315$	0.55 $f(0,1)=f(0).f(1)$ $=0.55*0.7=0.385$
0	0.45 $f(1,0)=f(1).f(0)$ $=0.45*0.3=0.135$	0.55 $f(0,0)=f(0).f(0)$ $=0.55*0.3=0.165$

قيم المتغير d : $-1, 0, 1$

الإحتمالات: $0.385, 0.48, 0.135$

جدول التوزيع الاحتمالي:

d	f(d)	d.f(d)	d ² .f(d)
-1	0.385	-0.385	0.385
0	0.48	0	0
1	0.135	0.135	0.135
	1	$E(d)=-0.25$	$E(d^2)=0.52$

3_ التوقع الرياضي و التباين، من الجدول:

$$E(d) = \sum d \cdot f(d) = -0.25$$

$$V(d) = E(d^2) - [E(d)]^2 = 0.52 - (-0.25)^2 = 0.4575$$

إستنتاج التوقع والتباين: x, y مستقلين، إذن:

$$E(d) = E(x - y) = E(x) - E(y) = 0.45 - 0.7 = -0.25$$

$$V(d) = V(x - y) = V(x) + V(y) = 0.2475 + 0.21 = 0.4575$$

حل التمرين 3:

1_ شكل التوزيع: شحنة كبيرة N كبير، نسبة النجاح (معيبة) ثابتة: $\rho = 0.2$

توزيع ثنائي الحدين: $f(x) = c_n^x \cdot \rho^x \cdot q^{n-x}$

$$f(x) = c_{10}^x \cdot 0.2^x \cdot 0.8^{10-x}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

2_ احتمال أن العدد المعيب أقل أو يساوي 2 :

$$\begin{aligned} pr(x \leq 2) &= f(0) + f(1) + f(2) = c_{10}^0 \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^{10} + c_{10}^1 \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^9 \\ &+ c_{10}^2 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^8 = 0.107374 + 0.268435 + 0.301989 = 0.67779 \end{aligned}$$

3_ احتمال أن العدد المعيب أكبر من 1 :

$$pr(x > 1) = 1 - pr(x \leq 1) = 1 - f(0) - f(1) = 1 - 0.375809 = 0.62419$$

4_ احتمال أن يكون العدد المعيب من 1 إلى 3:

$$\begin{aligned} pr(1 \leq x \leq 3) &= f(1) + f(2) + f(3) = 0.570424 + c_{10}^3 \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^7 \\ &= 0.570424 + 0.201326 = 0.77175 \end{aligned}$$

5_ التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = n \cdot \rho = 10 \cdot 0.2 = 2$$

$$V(X) = n \cdot \rho \cdot q = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.6$$

حل التمرين 4:

التوزيع ثنائي الحدين $n=6$ ، بإحتمال نجاح (صالحة) : $\rho=0.7$

عدد البطاريات الصالحة متغير عشوائي x ،

دالة الإحتمال :

$$f(x) = c_6^x \cdot 0.7^x \cdot 0.3^{6-x}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, 6$$

1_ احتمال أن تكون البطاريات 6 الستة صالحة: $x=6$

$$f(6) = c_6^6 \cdot 0.7^6 \cdot 0.3^0 = 0.117649$$

2_احتمال أن تكون البطاريات 6 غير صالحة: إذن الصالحة $x=0$

$$f(0) = c_6^0 \cdot 0.7^0 \cdot 0.3^6 = 0.000729$$

3_احتمال أن تكون 3 بطاريات غير صالحة: إذن الصالحة $n-3=6-3=3$

$$f(3) = c_6^3 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^3 = 0.018522$$

4_احتمال أن تكون 2 بطاريات على الأكثر غير صالحتين:

على الأكثر 2 غير صالحتين: $0, 1, 2 \Rightarrow \leq 2$

إذن الصالحة: على الأقل 4 : $(6 - 2 = 4)$, $x = 6, 5, 4 \Rightarrow x \geq 4$

$$\begin{aligned} pr(x \geq 4) &= f(4) + f(5) + f(6) = \\ &= c_6^4 \cdot 0.7^4 \cdot 0.3^2 + c_6^5 \cdot 0.7^5 \cdot 0.3^1 + c_6^6 \cdot 0.7^6 \cdot 0.3^0 = \\ &= 0.324135 + 0.302526 + 0.117649 = 0.74431 \end{aligned}$$

5_التوقع الرياضي و التباين $E(X)$, $V(X)$:

$$E(X) = n \cdot \rho = 6 \cdot 0.7 = 4.2$$

$$V(X) = n \cdot \rho \cdot q = 6 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 1.26$$

حل التمرين 5:

1_قانون توزيع احتمالي: $0 \leq \rho, q \leq 1$ إذن: $f(x) = \rho \cdot q^{x-1} \geq 0$

$$\sum f(x) = 1$$

$$\sum f(x) = \sum \rho \cdot q^{x-1} = \rho * \sum \frac{q^x}{q} = \frac{\rho}{q} * \sum q^x = \frac{\rho}{q} * \frac{q}{\rho} = 1$$

2_نبين أن، التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum x f(x) = \sum x \cdot \rho \cdot q^{x-1} = \frac{\rho}{q} * \sum x \cdot q^x = \frac{\rho}{q} * \frac{q}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot f(x) = \sum x^2 \cdot \rho \cdot q^{x-1} = \frac{\rho}{q} * \sum x^2 \cdot q^x = \frac{\rho}{q} * \frac{q(1+q)}{\rho^3} = \frac{1+q}{\rho^2}$$

$$V(X) = \frac{1+q}{\rho^2} - \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 = \frac{1+q-1}{\rho^2} = \frac{q}{\rho^2}$$

حل التمرين 6:

1_شكل التوزيع توزيع هندسي: كل طلقة إما إصابة أو عدم إصابة، المتغير العشوائي x المحاولة التي

تحقق إصابة.

نسبة النجاح (معدل الإصابة) ثابتة: $\rho = 0.9$

نسبة الفشل: $q = 1 - \rho = 0.1$

دالة التوزيع الهندسي: $f(x) = \rho \cdot (1 - \rho)^{x-1}$

$$f(x) = 0.9 * 0.1^{(x-1)}$$

$$x = 1, 2, \dots, k$$

2_ احتمال إصابة الهدف في الطلقة 2 :

$$pr(x = 2) = f(2) = 0.9 * 0.1^1 = 0.09$$

3_ احتمال إصابة بعد الطلقة 2 :

$$pr(x > 2) = 1 - pr(x \leq 2) = 1 - f(1) - f(2) = 1 - 0.9 - 0.09 = 0.01$$

4_ التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{0.9} = 1.1111$$

$$V(X) = \frac{1-\rho}{\rho^2} = \frac{0.1}{0.9^2} = 0.1234$$

حل التمرين 7:

الصفة أقدمية تفوق 10 سنوات نجاح 1 : عدد العمال الذي يقابل نجاح $r=3$ ، عدد العمال الذي يقابل فشل $N-r=6-3=3$.

عدد العمال: $N=6$ أي: $\{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$

عينة $n=4$ بدون إرجاع : معدل النجاح يتغير : $\frac{r}{N} = \frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \dots$

التوزيع مافوق الهندسي:

$$f(x) = \frac{c_r^x \cdot c_{(N-r)}^{(n-x)}}{c_N^n} = \frac{c_3^x \cdot c_3^{4-x}}{c_6^4}$$

$$x = 1, 2, 3$$

_ احتمال أن يكون 2 عاملان لهما هذه الصفة $x=2$:

$$f(2) = \frac{c_3^2 \cdot c_3^{4-2}}{c_6^4} = \frac{3 \cdot 3}{15} = \frac{3}{5}$$

حل التمرين 8:

1_ شكل التوزيع: شحنة من منتوج $N=50$ ، عدد الوحدات المعيبة (نجاحات) $r=10$ ، عينة $n=3$ بدون إرجاع .

نسبة النجاح (معيبة) غير ثابتة: $\frac{r}{N} = \frac{10}{50}, \frac{10}{49}, \frac{9}{49}, \dots$

x عدد الوحدات المعيبة تؤخذ من بين 10

(3-x) عدد الوحدات غير المعيبة تؤخذ من بين 50-10=40

$$f(x) = \frac{c_r^x \cdot c_{(N-r)}^{(n-x)}}{c_N^n} \quad \text{التوزيع مافوق الهندسي:}$$

$$f(x) = \frac{c_{10}^x \cdot c_{40}^{3-x}}{c_{50}^3}$$

$$x = 0, 1, 2, 3$$

2_إحتمال أن العدد المعيب يساوي 2 :

$$\begin{aligned} pr(x=2) &= f(2) = \frac{c_{10}^2 \cdot c_{40}^1}{c_{50}^3} = \frac{10! / 2! 8! \cdot 40! / 1! 39!}{50! / 3! 47!} \\ &= \frac{1800}{19600} = 0.0918 \end{aligned}$$

3_إحتمال أن العدد المعيب أقل أو يساوي 1 :

$$\begin{aligned} pr(x \leq 1) &= f(0) + f(1) = \frac{c_{10}^0 \cdot c_{40}^3}{c_{50}^3} + \frac{c_{10}^1 \cdot c_{40}^2}{c_{50}^3} \\ &= \frac{10! / 0! 10! \cdot 40! / 3! 37!}{50! / 3! 47!} + \frac{10! / 1! 9! \cdot 40! / 2! 38!}{50! / 3! 47!} = \frac{17680}{19600} = 0.9020 \end{aligned}$$

5_التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = n \cdot \frac{r}{N} = 3 \cdot \frac{10}{50} = 0.6$$

$$V(X) = n \cdot \frac{r}{N} \cdot \frac{(N-r)}{N} \cdot \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = 3 \cdot \frac{10}{50} \cdot \frac{40}{50} \cdot \frac{47}{49} = 0.4604$$

حل التمرين 9:

1_شكل التوزيع:

عدد السيارات في الدقيقة x متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع بواسون بمعدل نجاح $\lambda=1.8$ ،

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{دالة الإحتمال:}$$

$$f(x) = \frac{(1.8)^x \cdot e^{-(1.8)}}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, 3 \dots$$

2_إحتمال عدم مرور أية سيارة:

$$f(0) = \frac{(1.8)^0 \cdot e^{-(1.8)}}{0!} = e^{-1.8} = 0.165298$$

3_إحتمال مرور سيارتين 2 :

$$f(2) = \frac{(1.8)^2 \cdot e^{-(1.8)}}{2!} = \frac{3.24 \cdot e^{-1.8}}{2} = 0.267784$$

4_إحتمال مرور على الأقل سيارة 1 :

$$pr(x \geq 1) = 1 - pr(x < 1) = 1 - f(0) = 1 - 0.165298 = 0.834701$$

5_إحتمال مرور أكثر من سيارة :

$$\begin{aligned} pr(x > 1) &= 1 - pr(x \leq 1) = 1 - f(0) - f(1) = \\ &= 1 - 0.165298 - \frac{(1.8)^1 \cdot e^{-(1.8)}}{1!} = 1 - 0.165498 - 0.297537 = 0.537163 \end{aligned}$$

6_إحتمال مرور من 2 إلى 4 سيارات:

$$\begin{aligned} pr(2 \leq x \leq 4) &= f(2) + f(3) + f(4) = 0.267784 + \frac{(1.8)^3 \cdot e^{-(1.8)}}{3!} + \frac{(1.8)^4 \cdot e^{-(1.8)}}{4!} \\ &= 0.267784 + 0.1606705 + 0.07230173 = 0.500756 \end{aligned}$$

حل التمرين 10:

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \geq 0 \quad \lambda \text{ ثابت موجب إذن: } 1_ \text{قانون توزيع إحتمالي:}$$

$$\sum f(x) = 1$$

$$\sum \frac{\lambda^x}{x!} = e^{+\lambda} \quad \text{نعوض المجموع:}$$

$$\sum f(x) = \sum \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{+\lambda} = e^0 = 1$$

2_نبين أن،التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum x f(x) = \sum \frac{x \cdot \lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} * \sum \frac{x \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} * \sum \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

نعوض المجموع:

$$E(X) = e^{-\lambda} * \sum \frac{\lambda^{x+1} \cdot \lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} = e^{-\lambda} * \lambda \cdot \sum \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{+\lambda} = \lambda$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot f(x) = \sum \frac{x^2 \cdot \lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} * \sum \frac{x^2 \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} * \sum \frac{x \cdot \lambda^x}{(x-1)!}$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda} * \sum \frac{x \cdot \lambda^{(x-1)} \cdot \lambda^{+1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda} * \lambda \cdot \sum \frac{x \cdot \lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} = e^{-\lambda} * \lambda \cdot \sum \frac{(x-1+1) \cdot \lambda^{(x-1)}}{(x-1)!}$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda} * \lambda \cdot \sum \frac{(x-1) \cdot \lambda^{(x-1)} + \lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} = e^{-\lambda} * \lambda \left[\sum \frac{(x-1) \cdot \lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} + \sum \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} \right]$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda} * \lambda \left[\sum \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-2)!} + \sum \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} \right] = e^{-\lambda} * \lambda \left[\sum \frac{\lambda^{(x-2)} \cdot \lambda^{+1}}{(x-2)!} + \sum \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} \right]$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda} * \lambda \left[\lambda \cdot \sum \frac{\lambda^{(x-2)}}{(x-2)!} + \sum \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} \right]$$

نعوض المجاميع:

$$E(X^2) = e^{-\lambda} * \lambda [\lambda \cdot e^{+\lambda} + e^{+\lambda}] = \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = (\lambda^2 + \lambda) - (\lambda)^2 = \lambda$$

حل التمرين 11:

عدد المصابيح المعيبة (نجاحات) في العينة متغير عشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحدين Binômiale ،
بنسبة نجاح $p=0.01$.

عينة $n=30$: $x = 0, 1, 2, \dots, 30$

توزيع Binômiale :

دالة الاحتمال : $f(x) = c_n^x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$

$$f(x) = c_{30}^x \cdot 0.01^x \cdot 0.99^{30-x}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, 30$$

احتمال أن يكون العدد المعيب أكبر من 1 :

$$pr(x > 1) = 1 - pr(x \leq 1) = 1 - f(0) - f(1) =$$

$$= 1 - c_{30}^0 \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{30} - c_{30}^1 \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^{29} =$$

$$= 1 - 0.7397003 - 0.224151 = 0.036149$$

توزيع Poisson :

تقريب ثنائي الحدين إلي بواسون ، شرط التقريب محقق:

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ n \cdot p < 5 \end{cases}$$

$$n \cdot p < 5$$

$$n \cdot p = 30 \cdot 0.01 = 0.3$$

دالة احتمال بواسون : $f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

$$\lambda = n \cdot p = 0.3$$

$$f(x) = \frac{0.3^x \cdot e^{-0.3}}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, 30$$

احتمال أن يكون العدد المعيب أكبر من 1 :

$$pr(x > 1) = 1 - pr(x \leq 1) = 1 - f(0) - f(1) =$$

$$= 1 - \frac{0.3^0 \cdot e^{-0.3}}{0!} - \frac{0.3^1 \cdot e^{-0.3}}{1!} = 1 - e^{-0.3} - 0.3 \cdot e^{-0.3} =$$

$$= 1 - 0.740818 - 0.222245 = 0.036937$$

الفصل الثالث: التوزيعات الإحصائية المستمرة:

التوزيعات الإحصائية المستمرة أو القوانين المستمرة لها أشكال عامة معروفة ، عادة تكون معطاة في شكل دالة الكثافة الإحصائية . المتغيرات العشوائية المستمرة التي تخضع لقانون معين تحقق شروط دالة الكثافة .

التوزيعات المستمرة الهامة و المستعملة عادة في التطبيقات الاقتصادية و التجارية، هي:

-التوزيع المنتظم المستمر -التوزيع الأسّي -التوزيع الطبيعي -توزيع كاي تربيع -توزيع ستودنت -توزيع فيشر .

(1) التوزيع المنتظم المستمر: $U(a,b)$ Continuous Uniform

متغير عشوائي مستمر x يتوزع بشكل منتظم على مجال $[a, b]$ ، إذا كانت الإحتمالات تتناسب مع طول المجال : $b-a$.

و تكون:

_دالة الكثافة الإحصائية ثابتة؛

_كل المجالات الجزئية المتساوية داخل المجال $[a, b]$ لها إحتمالات متساوية.

مثال 1:

إذا كان زمن رحلة بين مدينتين يتراوح بين: 120 و 140 دقيقة ، وإحتمال زمن رحلة لها مجال بطول 5 دقائق $[120, 125]$ يساوي إحتمال زمن أي رحلة أخرى لها مجال بنفس الطول: $[125, 130]$ ، $[130, 135]$...

يكون زمن الرحلة x متغير عشوائي منتظم بدالة كثافة إحصائية ثابتة .

(1-1) دالة الكثافة الإحصائية:

دالة ثابتة من الشكل:

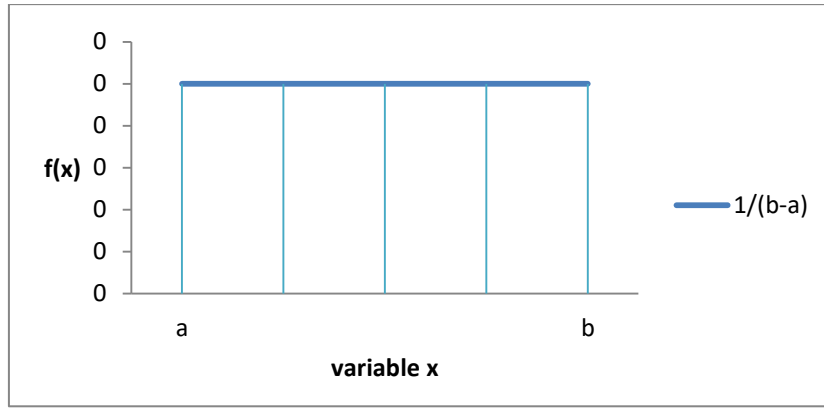
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} , & a \leq x \leq b \\ 0 , & x < a , x > b \end{cases}$$

حيث: a أول قيمة ، b آخر قيمة.

ونكتب: $X \sim U(a, b)$

(2-1) المنحنى المنتظم:

منحنى له شكل مستطيل :



وتكون:

_دالة الكثافة موجبة ،

_المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد ،

_كل احتمال هو مساحة جزئية تحت المنحنى.

3-1 دالة التوزيع:

تعرف بالشكل:

$$F(x) = pr(X \leq x) = \int_a^x f(x) * dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} * dx$$

$$F(x) = \left[\frac{x}{b-a} \right]_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}$$

حيث: $a \leq x \leq b$

خواص:

إذا كان: $x \in [a, b]$

$$1^\circ) pr(x \leq a) = F(a) = 0$$

$$2^\circ) pr(x \leq b) = F(b) = 1$$

إذا كان: $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$3^\circ) p(x > x_1) = 1 - pr(x \leq x_1) = 1 - F(x_1)$$

$$4^\circ) pr(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad , \quad x_1 \leq x_2$$

4-1 القيمة المتوقعة:

القيمة المتوقعة هي المتوسط وتساوي: $\mu = \frac{a+b}{2}$

5-1 التباين:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{التباين يساوي:}$$

مثال 2:

نأخذ المثال 1 السابق؛ زمن رحلة بين مدينتين ،

$$f(x) = \frac{1}{20} \quad , \quad 120 \leq x \leq 140 \quad \text{دالة الكثافة الإحصائية:}$$

$$F(x) = \frac{x}{20} - \frac{120}{20} \quad \text{دالة التوزيع:}$$

إحتمال زمن رحلة أقل أو يساوي 130:

$$pr(X \leq 130) = F(130) = \frac{130}{20} - \frac{120}{20} = 0.5$$

إحتمال زمن رحلة بين 130 و 135:

$$pr(130 \leq X \leq 135) = F(135) - F(130) = \frac{135}{20} - \frac{130}{20} = 0.25$$

$$E(X) = \frac{120+140}{2} = 130 \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

$$V(X) = \frac{(140-120)^2}{12} = 33.33 \quad \text{التباين:}$$

2) التوزيع الأسّي: Exponential Distribution $E(\alpha)$

التوزيع الأسّي هو توزيع إحصائي مستمر يلائم الظواهر التي نهتم فيها بطول مجال معين من : الزمن ،

المسافة ، المساحة ... يفصل بين حدثين .¹⁴

أمثلة:

1°) الوقت اللازم لشحن عربة، أو الوقت الفاصل بين وصول عربتين.

2°) الوقت اللازم لخدمة زبون في بنك أو الوقت الفاصل بين وصول زبونين إلي مركز الخدمة.

3°) عدد الصفحات التي تفصل بين خطأين مطبعيين في كتاب.

4°) المسافة الفاصلة بين عيبين أو عائقين في طريق سريع.

1-2 دالة الكثافة الإحصائية:

¹⁴ David Anderson, Sweeny, Williams. Essentials of statistics for business and economics. 2nd edition, South-western college publishing Cincinnati 2000. P 297 .

دالة أسية من الشكل:

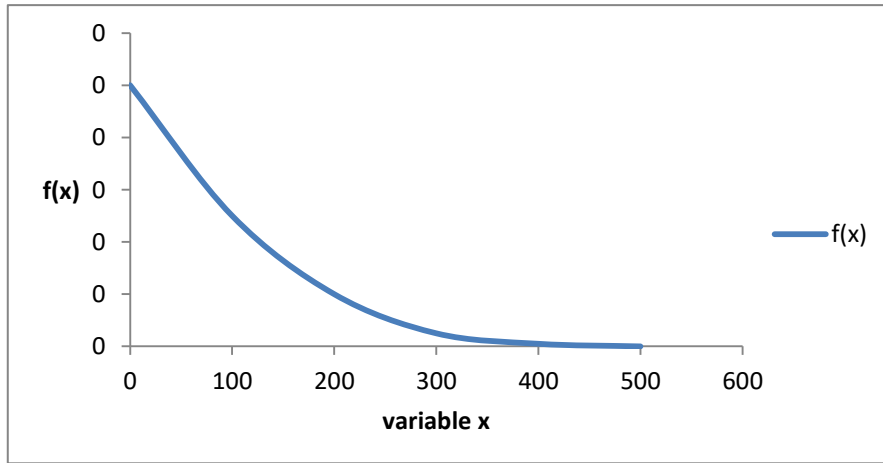
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} * e^{-\frac{x}{\alpha}} & , \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

حيث: $\alpha > 0$ ثابت موجب يعبر عن الطول المتوسط أو المتوقع للمجال: زمن متوقع، مسافة متوقعة ...

ونكتب: $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$

2-2) المنحني الأسي:

منحنى بياني متنازل : أسي سالب.



و تكون:

$$f(0) = \frac{1}{\alpha} \quad -$$

$$f(+\infty) = 0 \quad -$$

_المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد ،

_كل احتمال هو مساحة جزئية تحت المنحنى .

2-3) دالة التوزيع:

تعرف بالشكل:

$$F(x) = pr(X \leq x) = \int_0^x f(x) \cdot dx = \int_0^x \frac{1}{\alpha} * e^{-\frac{x}{\alpha}} * dx = \left[-e^{-\frac{x}{\alpha}} \right]_0^x =$$

$$F(x) = -e^{-\frac{x}{\alpha}} - (-e^0) = -e^{-\frac{x}{\alpha}} + 1$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

حيث: $x \geq 0$

خواص:إذا كان: $x \in [0, +\infty[$

$$1^\circ) pr(x \leq 0) = F(0) = 0$$

$$2^\circ) pr(x > 0) = 1 - F(0) = 1$$

$$3^\circ) pr(x \leq +\infty) = F(+\infty) = 1$$

إذا كان: $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$

$$4^\circ) pr(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad , \quad x_1 \leq x_2$$

4-2 القيمة المتوقعة:هي الطول المتوسط للمجال و تساوي: $\mu = \alpha$ **5-2 التباين:**التباين يساوي: $\sigma^2 = \alpha^2$ مثال 1:

الوقت المتوسط لشحن عربة هو 15 دقيقة (0.25 ساعة) ،

وقت شحن عربة أخذت عشوائيا، هو متغير أسّي x بمتوسط $\alpha=15$ ؛دالة الكثافة الاحتمالية: $f(x) = \frac{1}{15} * e^{-\frac{x}{15}} \quad , \quad x \geq 0$ دالة التوزيع: $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{15}}$

إحتمال وقت شحن عربة أقل أو يساوي 6 دقائق:

$$pr(X \leq 6) = F(6) = 1 - e^{-\frac{6}{15}} = 0.32967$$

إحتمال وقت شحن عربة بين 6 دقائق و 18 دقيقة:

$$pr(6 \leq X \leq 18) = F(18) - F(6) = 1 - e^{-\frac{18}{15}} - (1 - e^{-\frac{6}{15}}) = 0.36913$$

إحتمال وقت شحن عربة أكبر من 18 دقيقة:

$$pr(X > 18) = 1 - F(18) = 1 - (1 - e^{-\frac{18}{15}}) = 0.30119$$

التوقع الرياضي : $E(X) = 15$ التباين: $V(X) = 15^2 = 225$

6-2) علاقة التوزيع الأسّي بتوزيع بواسون:

توزيع بواسون يعطي وصف لعدد العناصر أو الأحداث التي تتكرر في مجال. التوزيع الأسّي يعطي وصف لطول المجال بين عنصرين أو حدثين. ولذلك يرتبط التوزيع الأسّي بتوزيع بواسون كالتالي:

_في توزيع بواسون نهتم بعدد العناصر في مجال واحد ؛

_في التوزيع الأسّي نهتم بطول المجال الذي يقابل عنصر واحد ؛

λ متوسط عدد العناصر في المجال: $\lambda \rightarrow 1$

α متوسط طول المجال الذي يقابل عنصر واحد: $\alpha \rightarrow 1$

إذن: $\lambda = \frac{1}{\alpha}$

دالة الكثافة للتوزيع الأسّي تصبح: $f(x) = \lambda * e^{-\lambda.x}$

و دالة التوزيع تصبح: $F(x) = 1 - e^{-\lambda.x}$ ¹⁵

مثال 2:

نأخذ المثال 1 السابق؛ وقت شحن عربة هو متغير أسّي x بمتوسط $\alpha=0.25$ ساعة ،

λ يقابل 1 ساعة :

$\lambda \rightarrow 1$

$\alpha = 0.25 \rightarrow 1$

ومنه: $\lambda = \frac{1}{0.25} = 4$

دالة الكثافة تصبح: $f(x) = 4 * e^{-4.x}$, $x \geq 0$

دالة التوزيع تصبح: $F(x) = 1 - e^{-4.x}$

إحتمال وقت شحن عربة أقل أو يساوي 6 دقائق (0.1 ساعة) :

$$pr(X \leq 0.1) = F(0.1) = 1 - e^{-4(0.1)} = 0.32967$$

إحتمال وقت شحن عربة أكبر من 18 دقيقة (0.3 ساعة) :

$$pr(X > 0.3) = 1 - F(0.3) = 1 - (1 - e^{-4(0.3)}) = 0.30119$$

¹⁵ Idem, P 300 .

(3) التوزيع الطبيعي: $N(\mu, \sigma)$

التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس غوس Laplace-Gauss هو أهم وأكثر التوزيعات استخداماً في التحليل الإحصائي. المتغيرات الإحصائية عادة تكون مستمرة، وتميل إلى التركز في الوسط حيث: المتوسط = الوسيط = المنوال ، فيكون لها شكل طبيعي (منحنى على شكل الجرس) .

مثل:

_أعمار السكان في دولة،

_أجور العمال في شركة كبيرة،

_طول أشخاص أو منتجات،

_الوزن ، درجات الحرارة ...

(3-1) دالة الكثافة الإحصائية:

دالة أسية من الشكل: ¹⁶

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث: $x \in]-\infty, +\infty[$

μ المتوسط

σ الانحراف المعياري

$$\pi = 3.14$$

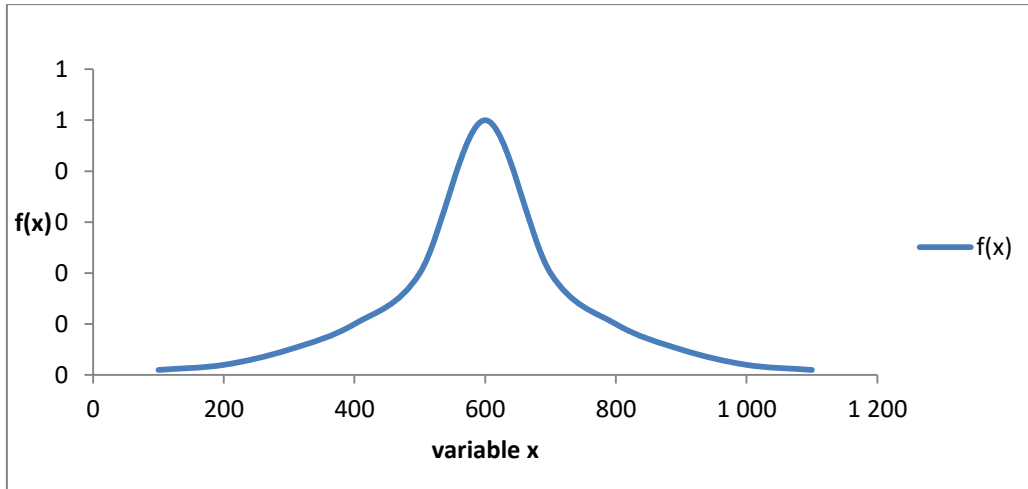
$$e = 2.718$$

ونكتب: $X \sim N(\mu, \sigma)$

(3-2) المنحنى الطبيعي:

منحني متناظر له شكل الجرس:

¹⁶ جورج كانافوس، دون ميلر. الإحصاء للتجاربيين مدخل حديث. مرجع سبق ذكره ص 218 .



و تكون:

قيم x تتمركز في الوسط حيث: $\mu = Me = Mo$

المنحنى متناظر: $f(\mu - a) = f(\mu + a)$

المتوسط μ يمكن أن يكون: سالب، معدوم، موجب .

الانحراف المعياري σ يحدد عرض المنحنى، كلما كان أكبر كلما كان المنحنى متفرطح .

المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد .

كل احتمال هو مساحة جزئية تحت المنحنى .

3-3 دالة التوزيع:

دالة الاحتمال التجميعي، تعرف بالشكل:

$$F(x) = pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} * dx$$

خواص:

1° تأخذ القيم بين صفر و واحد:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

2° كل الاحتمالات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = [F(X)]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

3° إذا كان: $x_1, x_2 \in]-\infty, +\infty[, x_1 \leq x_2$

$$pr(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx = [F(X)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

و أيضا:

$$pr(x_1 < x \leq x_2) = [F(X)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

4(°) إحتمال نقطة واحدة:

$$pr(x_1 \leq x \leq x_1) = [F(X)]_{x_1}^{x_1} = F(x_1) - F(x_1) = 0$$

4-3 العزوم:

القيمة المتوقعة:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx = \mu$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x).dx - \mu^2 = \sigma^2$$

ويساوي أيضا:

$$V(X) = E([X - \mu]^2)$$

معامل الالتواء:

التوزيع الطبيعي يكون متناظر، حيث: المتوسط يساوي الوسيط، يساوي المنوال. بعض التوزيعات الطبيعية لا تكون متناظرة تماما، لها إلتواء طفيف موجب أو سالب، وتسمى توزيعات تقريبا طبيعية. معامل فيشر Fisher للالتواء، الذي يرمز له γ_1 يساوي العزم المركزي من الرتبة 3، مقسوما على الانحراف المعياري مرفوعا للقوة 3 :

$$\gamma_1 = MC_3 / \sigma^3$$

في التوزيع الطبيعي معامل فيشر يساوي صفر: ¹⁷ $\gamma_1 = 0$

في التوزيعات تقريبا طبيعية، معامل فيشر يساوي تقريبا صفر: $\gamma_1 \approx 0$

معامل التفرطح:

التوزيع الطبيعي المعتدل يكون فيه المنحني متناظر وعلى شكل جرس، أي معتدل التفرطح. التوزيع الطبيعي يمكن أن يكون أيضا أقل تفرطحا (مدبب)، أو أكثر تفرطحا (منبسط).

¹⁷ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية، مرجع سبق ذكره ص 186.

معامل التفرطح الذي يرمز له γ_2 يساوي العزم المركزي من الرتبة 4 ، مقسوماً على الإنحراف المعياري مرفوعاً للقوة 4 ، هذه النسبة مطروحة منها 3 :

$$\gamma_2 = \frac{MC_4}{\sigma^4} - 3$$

توزيع طبيعي معتدل $\gamma_2 = 0$ ،

توزيع طبيعي مدبب (تشئت ضعيف) $\gamma_2 > 0$ ،

توزيع طبيعي متفرطح (تشئت كبير) $\gamma_2 < 0$.

مثال 1:

إذا كان X متغير طبيعي معتدل فإن نسبة القيم أو العناصر التي تقع على بعد 1، 2، 3 إنحراف معياري هي كالتالي: 68.27% ، 95.45% ، 99.73% .

أي الإحتمالات:

$$pr(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.6827$$

$$pr(\mu - 2.\sigma \leq x \leq \mu + 2.\sigma) = 0.9545$$

$$pr(\mu - 3.\sigma \leq x \leq \mu + 3.\sigma) = 0.9973$$

3-5) تجميع التوزيع الطبيعي:

لتكن X_i : $i = 1, 2, \dots, m$

$$X_1, X_2, \dots, X_m$$

متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع الطبيعي :

بتوقع رياضي: μ_i

وتباين: σ_i^2 , $i = 1, 2, \dots, m$

المتغير العشوائي: $Y = \sum_{i=1}^m X_i$

يتبع توزيع طبيعي:

بتوقع رياضي: $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$

و تباين: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2$

مثال 2:

متغيرين طبيعيين: $X_1 : \begin{cases} \mu_1 = 10 \\ \sigma_1 = 4 \end{cases}$

$X_2 : \begin{cases} \mu_2 = 8 \\ \sigma_2 = 2 \end{cases}$

المتغير : $Y = X_1 + X_2$ يتبع التوزيع الطبيعي:

$$Y : \begin{cases} \mu = 18 \\ \sigma^2 = 20 \end{cases}$$

6-3 التوزيع الطبيعي المعياري: Standard Normal Distribution

إذا كان X متغير طبيعي: $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{المتغير:}$$

يسمى متغير طبيعي معياري standard normal variable ، متوسطه 0 وإنحرافه المعياري 1 :

$$Z \sim N(0, 1) \quad \text{ونكتب:}$$

دالة الكثافة للمتغير Z :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

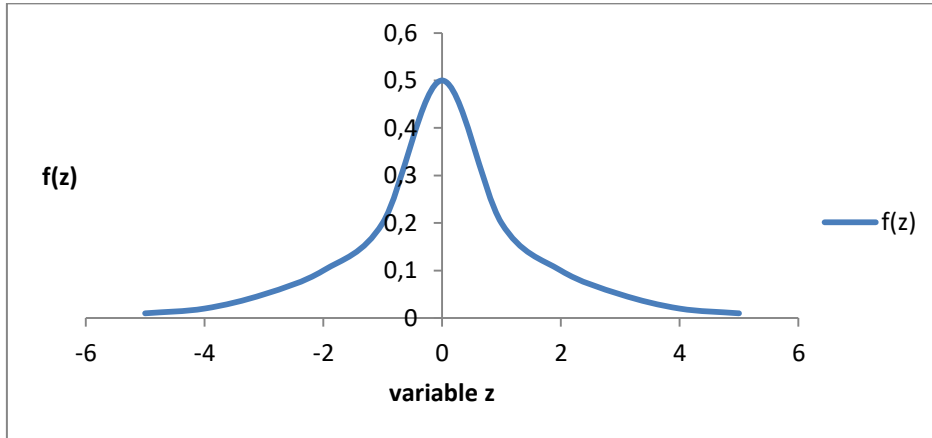
$$z \in]-\infty, +\infty [$$

دالة التوزيع للمتغير Z :

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(z)^2} * dz$$

منحنى المتغير Z :

منحنى طبيعي معتدل، متناظر بالنسبة للمركز $\mu = 0$:



خواص:

لتكن : $a, b \in]-\infty, +\infty [$

بحيث : $a \leq b$

$$1^\circ) \quad pr(z \leq a) + pr(z > a) = 1$$

$$2^\circ) \quad pr(a \leq z \leq b) = pr(z \leq b) - pr(z \leq a) = F(b) - F(a)$$

$$3^\circ) \quad pr(z \leq -a) = pr(z > +a) = 1 - F(+a)$$

$$4^\circ) \quad pr(z = b) = pr(b \leq z \leq b) = F(b) - F(b) = 0$$

$$5^\circ) \quad pr(z < b) = pr(z \leq b) = F(b)$$

إستخدام الجدول:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري يعطي احتمالات تراكمية من الشكل: $pr(Z \leq z) = F(z)$ أي دالة التوزيع أو الإحتمال التجميعي .

مثال 3:

متغير طبيعي X ، بمتوسط $\mu=10$ و إنحراف معياري $\sigma=2$: $X \sim N(10, 2)$

$$\text{المتغير } Z : Z = \frac{X-10}{2}$$

$$\text{يتبع : } Z \sim N(0, 1)$$

إحتمال أن x أصغر أو يساوي 15 :

$$pr(x \leq 15) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-10}{2}\right) = pr(z \leq 2.5) = F(2.5) = 0.9938$$

إحتمال أن x أكبر من 15 :

$$pr(x > 15) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{15-10}{2}\right) = pr(z > 2.5) = 1 - F(2.5) = 0.0062$$

إحتمال أن x أصغر من 5 :

$$pr(x < 5) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{5-10}{2}\right) = pr(z \leq -2.5) = pr(z > +2.5) = 0.0062$$

إحتمال أن x محصور بين 8 و 15 :

$$\begin{aligned} pr(8 \leq x \leq 15) &= pr\left(\frac{8-10}{2} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-10}{2}\right) = pr(-1 \leq z \leq 2.5) = \\ &= pr(z \leq 2.5) - pr(z \leq -1) = F(2.5) - [1 - F(+1)] = 0.8351 \end{aligned}$$

7-3) التقريب للتوزيع الطبيعي: Normal approximation

التقريب للتوزيع الطبيعي هو حل لإيجاد احتمالات المتغيرات التي يصعب إيجادها بإستخدام دوال

الإحتمال أو الكثافة لهذه المتغيرات .

كل توزيع (متقطع أو مستمر) يمكن تقريبه للتوزيع الطبيعي إذا كان عدد العناصر أو القيم كبير بشكل كافي،

أي عدد المحاولات أو العينة أكبر من: $n \geq 30$.

تقريب ثنائي الحدين من التوزيع الطبيعي: Normal approximating of Binomial

يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين من التوزيع الطبيعي إذا تحقق الشرطين :¹⁸

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ n \cdot p > 5 \end{cases}$$

المتوسط و التباين:

$$\begin{cases} \mu = n \cdot p \\ \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \end{cases}$$

مثال 4:

إنتاج آلة يسبب 40% من الوحدات معيبة، أخذنا عشوائيا $n=36$ وحدة، نسمي وحدة معيبة نجاح.

المتغير العشوائي x عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع ثنائي الحدين:

$$f(x) = C_{36}^x \cdot 0.4^x \cdot 0.6^{36-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 36$$

إحتمال $x = 20$:

$$f(20) = C_{36}^{20} \cdot 0.4^{20} \cdot 0.6^{16} = 0.0226$$

تقريب للتوزيع الطبيعي :

شروط التقريب محققة:

$$\begin{cases} n = 36 \geq 30 \\ n \cdot p = 36 \cdot 0.4 = 14.4 > 5 \end{cases}$$

المتوسط و التباين :

$$\begin{cases} \mu = n \cdot p = 14.4 \\ \sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 36 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 8.64 \end{cases}$$

إحتمال $x = 20$:

نضيف 0.5 لكل مجال، كمعامل للإستمروية (نوسع كل مجال ب 0.5) :

$$\begin{aligned} pr(19.5 \leq X \leq 20.5) &= pr\left(\frac{19.5-14.4}{2.94} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{20.5-14.4}{2.94}\right) = \\ &= pr(1.736 \leq z \leq 2.074) = F(2.074) - F(1.736) = 0.9808 - 0.9582 = \\ &0.0226 \end{aligned}$$

إحتمال $x \leq 20$:

نضيف 0.5 للمجال، كمعامل للإستمروية:

$$pr(X \leq 20.5) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{20.5-14.4}{2.94}\right) = pr(z \leq 2.074) = F(2.074) = 0.9808$$

¹⁸ موراي شبيغل، الإحصاء. مرجع سبق ذكره. ص 198 .

تقريب توزيع بواسون من التوزيع الطبيعي: Normal approximating of Poisson

يمكن تقريب توزيع بواسون من التوزيع الطبيعي إذا تحقق الشرط :¹⁹ $\lambda \geq 10$
المتوسط و التباين:

$$\begin{cases} \mu = \lambda \\ \sigma^2 = \lambda \end{cases}$$

مثال 5:

عملية إنتاجية تسبب في المتوسط 10 وحدات معيبة في الساعة،

المتغير العشوائي X عدد الوحدات المعيبة في ساعة أخذت عشوائياً يتبع توزيع بواسون:

$$f(x) = \frac{10^x \cdot e^{-10}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

إحتمال $9 \leq x \leq 11$:

$$\begin{aligned} pr(9 \leq x \leq 11) &= f(9) + f(10) + f(11) = \frac{10^9 \cdot e^{-10}}{9!} + \frac{10^{10} \cdot e^{-10}}{10!} + \frac{10^{11} \cdot e^{-10}}{11!} = \\ &= 10^9 \left(\frac{1}{9!} + \frac{10}{10!} + \frac{10^2}{11!} \right) e^{-10} = 0.363956 \end{aligned}$$

تقريب للتوزيع الطبيعي :

شرط التقريب محقق: $\lambda = 10$

المتوسط و التباين :

$$\begin{cases} \mu = \lambda = 10 \\ \sigma^2 = \lambda = 10 \end{cases}$$

إحتمال $9 \leq x \leq 11$:

نضيف 0.5 لكل مجال كمعامل للإستمرارية:

$$\begin{aligned} pr(8.5 \leq x \leq 11.5) &= pr\left(\frac{8.5-10}{3.16} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{11.5-10}{3.16}\right) = \\ &= pr(-0.4746 \leq z \leq 0.4746) = F(0.4746) - [1 - F(+0.4746)] = \\ &= 0.6808 - 0.3192 = 0.3616 \end{aligned}$$

إحتمال $x > 11$ ، أي : $x \geq 12$

نوسع المجال ب 0.5 تصبح : 11.5 :

$$\begin{aligned} pr(x \geq 12) &= pr(x > 11.5) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{11.5-10}{3.16}\right) = \\ &= pr(z > 0.4746) = 1 - F(0.4746) = 1 - 0.6808 = 0.3192 \end{aligned}$$

¹⁹ نفس المرجع، ص 199 .

(4) توزيع كاي تربيع: $\chi^2(v)$ Chi-square**(1-4) متغيرة كاي تربيع:**

توزيع كاي تربيع χ^2_v بدرجة حرية $v = m$ ، هو توزيع إحصائي لمجموع m متغيرات طبيعية معيارية Z_i ، كل منها مرفوع للقوة 2 :

إذا كانت : $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$

متغيرات عشوائية مستقلة لها توزيع طبيعي معياري :

$$Z_i \sim N(0,1) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

فإن المتغيرة العشوائية :

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_m^2$$

هي متغيرة كاي تربيع χ^2_v ، بدرجة حرية (Degrees of Freedom) $v = m$ عدد المتغيرات المستقلة المكونة لها .²⁰

متغيرة كاي تربيع هي متغيرة مستمرة تأخذ قيم حقيقية غير سالبة: $\chi^2 \geq 0$.

(2-4) دالة الكثافة الإحصائية:

دالة كثافة متغيرة كاي تربيع تعرف بالشكل:²¹

$$f(\chi^2) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(\frac{v}{2})} \Gamma(\frac{v}{2})} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{v}{2}-1} & , \quad \chi^2 \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{other wise} \end{cases} \quad \text{ماعدان ذلك}$$

حيث:

v درجات الحرية .

$\Gamma(\frac{v}{2})$ دالة غاما Gamma بمعلمة $(\frac{v}{2})$ ،

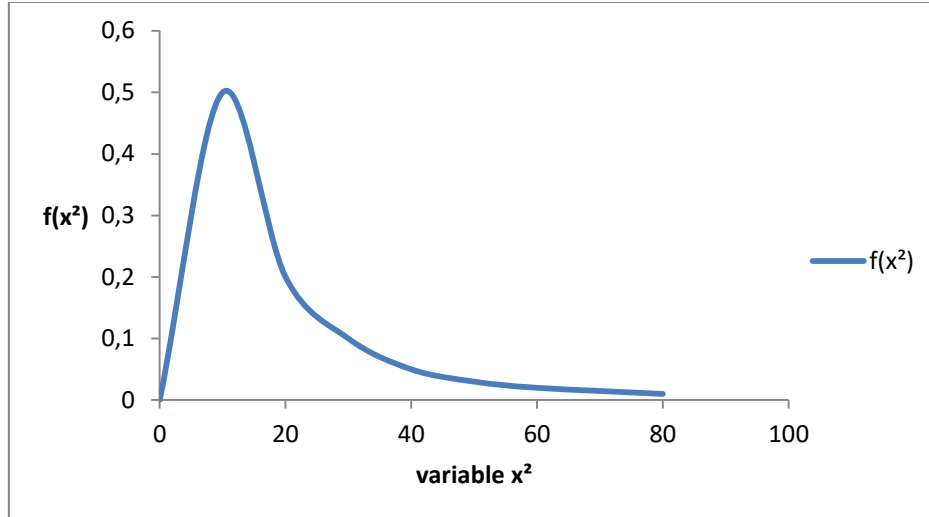
ونكتب: $\chi^2 \sim \chi^2(v)$

²⁰ Roger Pfaffenberger, Patterson. Statistical methods for business and economics. IRWIN illinois 1977.P 262.

²¹ Khaldi khaled, probabilités. Op-cit p72 .

3-4 التمثيل البياني:

المنحنى الممثل لمتغيرة χ^2 غير متناظر، موجب الالتواء ديله الأيمن أطول (المتوسط أكبر من الوسيط، أكبر من المنوال) .



- المنحنى يمثل دالة الكثافة الإحصائية : $f(\chi^2)$
- المساحة تحت المنحنى تمثل دالة التوزيع : $F(\chi^2) = \int_0^{(\chi^2)} f(\chi^2) . d(\chi^2)$
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي 1 .
- كل احتمال هو مساحة جزئية تحت المنحنى .
- درجات الحرية ν تحدد الالتواء و التقعر :
- إذا كانت ν صغيرة المنحنى ملتوي، وأقل تقعرًا (مدبب) .
- عندما تزداد ν المنحنى ينتقل نحو اليمين ويصبح أقل إلتواء ، وأكثر تقعرًا .
- كلما زادت ν كلما إقترب من المنحني الطبيعي .

4-4 العزوم:

القيمة المتوقعة:

القيمة المتوقعة تساوي: $\mu = \nu$

التباين:

التباين يساوي: $\sigma^2 = 2 . \nu$

معامل الالتواء:

$$\gamma_1 = MC_3 / \sigma^3 \quad \text{معامل فيشر للالتواء يساوي:}$$

و هو إلتواء موجب $\gamma_1 > 0$

$$\sigma^3 = (\sqrt{2 \cdot v})^3 \quad \text{شدة الالتواء تتعلق بدرجات الحرية } v : \\ \text{كلما زادت } v \text{ كلما أصبح أقل إلتواءا . }^{22}$$

معامل التفرطح:

$$\gamma_2 = \frac{MC_4}{\sigma^4} - 3 \quad \text{معامل التفرطح يساوي:}$$

$$\sigma^4 = (2 \cdot v)^2 \quad \text{يتعلق بدرجات الحرية } v :$$

إذا كانت v صغيرة منحنى مدبب (تشتت ضعيف) : $\gamma_2 > 0$

إذا كانت v كبيرة منحنى متفرطح (تشتت كبير) : $\gamma_2 < 0$

4-5) تجميع توزيع كاي تربيع:

لنكن y_1, y_2 متغيرتين مستقلتين، لهما توزيع كاي تربيع :

$$y_1 \sim \chi_{v_1}^2$$

$$y_2 \sim \chi_{v_2}^2$$

المتغيرة : $\chi^2 = y_1 + y_2$ هي متغيرة كاي تربيع بدرجة حرية : $v_1 + v_2$

$$\chi^2 \sim \chi_{v_1+v_2}^2$$

الفرق أيضا : $\chi'^2 = y_1 - y_2$

$$\chi'^2 \sim \chi_{v_1-v_2}^2$$

مثال 1:

$$y_1 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 \quad \text{المتغيرة :}$$

$$y_2 = Z_5^2 + Z_6^2 \quad \text{و المتغيرة :}$$

$$y_1 + y_2 \quad \text{متغيرة المجموع:}$$

$$(y_1 + y_2) \sim \chi_6^2$$

$$y_1 - y_2 \quad \text{متغيرة الفرق:}$$

$$(y_1 - y_2) \sim \chi_2^2$$

²² Philippe Tassi, Méthodes statistiques. 2^e édition Economica paris 1992. P 31 .

6-4 استخدام الجدول:

نستعمل جدول يعطي احتمالات تراكمية من الشكل : $pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\alpha}^2) = F(\chi_{v,\alpha}^2)$ أي دالة التوزيع أو الإحتمال التجميعي .

يستخدم الرمز $\chi_{v,\alpha}^2$ للتعبير عن قيمة خاصة لمتغيرة كاي تربيع بدرجة حرية v ،

بحيث أن الإحتمال : $pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\alpha}^2) = \alpha$

خواص:

$$1^\circ) pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\alpha}^2) + pr(\chi^2 > \chi_{v,\alpha}^2) = 1$$

إذا كان : $\chi_{v,\alpha_1}^2 \leq \chi_{v,\alpha_2}^2$ ، فإن :

$$2^\circ) pr(\chi_{v,\alpha_1}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{v,\alpha_2}^2) = pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\alpha_2}^2) - pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\alpha_1}^2) = F(\chi_{v,\alpha_2}^2) - F(\chi_{v,\alpha_1}^2)$$

إذا كانت : $\chi_{v,\alpha}^2$ ، القيمة المقابلة (وغير المناظرة) : $\chi_{v,1-\alpha}^2$ ،

وتكون :

$$3^\circ) pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\alpha}^2) = pr(\chi^2 > \chi_{v,1-\alpha}^2) = 1 - pr(\chi^2 \leq \chi_{v,1-\alpha}^2) = 1 - F(\chi_{v,1-\alpha}^2)$$

$$4^\circ) pr(\chi^2 < \chi_{v,\alpha}^2) = pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\alpha}^2) = F(\chi_{v,\alpha}^2)$$

إذا كانت : $pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2) = \frac{\alpha}{2}$

فإن القيمة المقابلة (وغير مناظرة) : $pr(\chi^2 > \chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2) = \frac{\alpha}{2}$

و تكون :

$$5^\circ) pr(\chi^2 > \chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$6^\circ) pr(\chi^2 \leq \chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$7^\circ) pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2) + pr(\chi^2 > \chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

$$8^\circ) pr(\chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2) = pr(\chi^2 \leq \chi_{v,1-\frac{\alpha}{2}}^2) - pr(\chi^2 \leq \chi_{v,\frac{\alpha}{2}}^2) = 1 - \alpha$$

مثال 2:

بدرجة حرية $v=20$ ، القيمة : $\chi_{20,0.95}^2 = 31.41$

الإحتمال : $pr(\chi^2 \leq 31.41) = 0.95$

بدرجة حرية $v=24$ ، القيمة: $\chi^2_{24,0.025} = 12.40$

الإحتمال: $pr(\chi^2 \leq 12.40) = 0.025$

القيمة المقابلة: $\chi^2_{24,0.975} = 39.36$

الإحتمال: $pr(\chi^2 > 39.36) = 0.025$

$pr(\chi^2 \leq 39.36) = 0.975$

(7-4) تقريب توزيع كاي تربيع من الطبيعي: Normal approximation

يمكن تقريب توزيع كاي تربيع من التوزيع الطبيعي إذا تحقق الشرط : $v \geq 30$ المتوسط و التباين:

$$\begin{cases} \mu = v \\ \sigma^2 = 2v \end{cases}$$

مثال 3:

بدرجة حرية: $v = 50$

القيمة: $\chi^2_{50,0.90} = 63.17$

الإحتمال: $pr(\chi^2 \leq 63.17) = 0.90$

شرط التقريب محقق: $v \geq 30$ ، المتوسط و التباين:

$$\begin{cases} \mu = v = 50 \\ \sigma^2 = 2v = 100 \end{cases}$$

الإحتمال:

$$pr(\chi^2 \leq 63.17) = pr\left(\frac{\chi^2 - \mu}{\sigma} \leq \frac{63.17 - 50}{10}\right) = pr(Z \leq 1.317) = 0.9049$$

(5) توزيع ستودنت Student $t(v)$

قدم توزيع ستودنت من طرف W.S.Gosset عام 1908 وقد نشر أبحاثه تحت إسم مستعار طالب Student ولذلك إشتهر التوزيع بهذا الإسم .

(1-5) متغيرة ستودنت:

توزيع ستودنت t_v بدرجة حرية v ، توزيع إحصائي يعتمد على توزيع طبيعي معياري و توزيع كاي تربيع بدرجة حرية v .

إذا كان :

 $Z \sim N(0,1)$ متغير طبيعي معياري: $\chi^2 \sim \chi_v^2$ متغيرة كاي تربيع بدرجة حرية v :و كان Z , χ^2 مستقلين ،فإن المتغيرة العشوائية: ²³

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2/v}}$$

هي متغيرة ستودنت بدرجة حرية (Degrees of Freedom) : v ، نفس درجة حرية متغيرة كاي تربيع .متغيرة ستودنت هي متغيرة مستمرة تأخذ قيم حقيقية موجبة أو سالبة: $t \in]-\infty, +\infty[$

2-5 دالة الكثافة الإحصائية:

دالة الكثافة الإحصائية لمتغيرة ستودنت تعرف كما يلي: ²⁴

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{v} \cdot \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}$$

$$-\infty \leq t \leq +\infty$$

حيث: v درجات الحرية ،

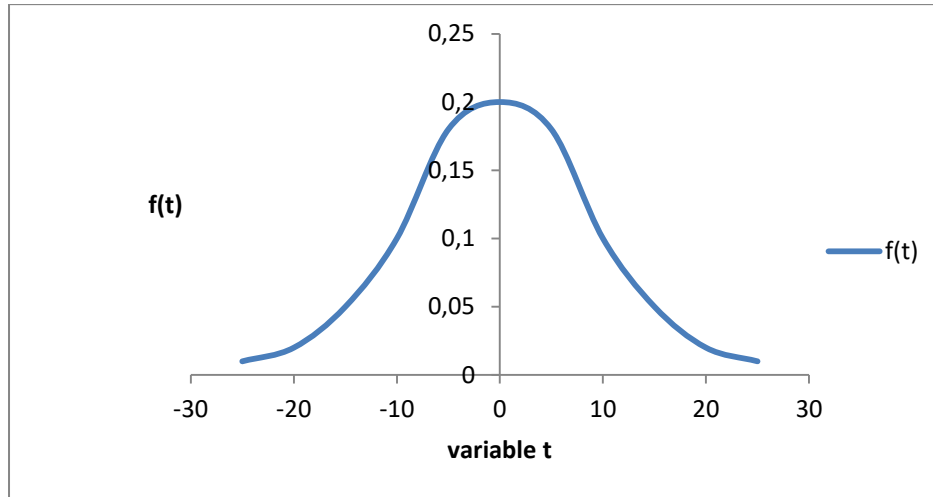
$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}\right) \text{ دالة بيتا } \text{Bêta} \text{ بمعلمتين } \left(\frac{1}{2}, \frac{v}{2}\right) .$$

و نكتب: $t \sim t(v)$

3-5 التمثيل البياني:

المنحنى الممثل لمتغيرة t على شكل جرس متناظر بالنسبة للصفر 0 ، مثل المنحنى الطبيعي المعياري لكن أكثر تفرطاً منه .

²³ Idem P 33 .²⁴ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. مرجع سبق ذكره ، ص 228 .



- المنحنى يمثل دالة الكثافة الإحصائية : $f(t)$
- المساحة تحت المنحنى تمثل دالة التوزيع : $F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) \cdot dt$
- قيم t تتمركز في الوسط حيث: $\mu = 0$
- المنحنى متناظر: $f(-a) = f(+a)$
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد 1 .
- كل احتمال هو مساحة جزئية تحت المنحنى .
- درجات الحرية v تحدد تفرطح المنحنى :
- إذا كانت v صغيرة المنحنى متفرطح ،
- كلما زادت v كلما أصبح المنحنى أقل تفرطاً (معتدل) وإقتراب من المنحنى الطبيعي.

4-5) العزوم:

القيمة المتوقعة:

القيمة المتوقعة تساوي: $\mu = 0$

التباين:

التباين يساوي: $\sigma^2 = \frac{v}{v-2}$, $v > 2$

درجات الحرية v تحدد التباين، كلما زادت v كلما إقتراب التباين من 1 واحد .²⁵

معامل الالتواء:

²⁵ Philippe Tassi, Méthodes statistiques. Op-cit P 34 .

معامل فيشر للإلتواء يساوي: $\gamma_1 = MC_3 / \sigma^3$

في توزيع ستودنت معامل فيشر يساوي صفر: $\gamma_1 = 0$

معامل التفرطح:

معامل التفرطح يساوي: $\gamma_2 = \frac{MC_4}{\sigma^4} - 3$

يتعلق بدرجات الحرية v : $\sigma^4 = \left(\frac{v}{v-2}\right)^2$

- إذا كانت v صغيرة : $\frac{v}{v-2}$ كبيرة ، منحنى متفرطح (تشئت كبير) : $\gamma_2 < 0$.

- إذا كانت v كبيرة : $\frac{v}{v-2}$ صغيرة ، منحنى مدبب (تشئت ضعيف) : $\gamma_2 > 0$.

- كلما زادت v ، توزيع ستودنت يصبح معتدل و يقترب من التوزيع الطبيعي ،

عندما تصبح: $v \geq 30$ ، التباين يقترب من واحد 1 ، ومعامل التفرطح يقترب من صفر: $\gamma_2 \approx 0$.

5-5) استخدام الجدول:

نستعمل جدول يعطي احتمالات تراكمية من الشكل : $pr(t \leq t_{v,\alpha}) = F(t_{v,\alpha})$

أي دالة التوزيع أو الاحتمال التجميعي .

يستخدم الرمز $t_{v,\alpha}$ للتعبير عن قيمة خاصة لمتغيرة ستودنت بدرجة حرية v ،

بحيث أن الاحتمال : $pr(t \leq t_{v,\alpha}) = \alpha$

خواص:

$$1^\circ) pr(t \leq t_{v,\alpha}) + pr(t > t_{v,\alpha}) = 1$$

إذا كان: $t_{v,\alpha_1} \leq t_{v,\alpha_2}$ ، فإن:

$$2^\circ) pr(t_{v,\alpha_1} \leq t \leq t_{v,\alpha_2}) = pr(t \leq t_{v,\alpha_2}) - pr(t \leq t_{v,\alpha_1}) = \\ = F(t_{v,\alpha_2}) - F(t_{v,\alpha_1})$$

إذا كانت: $-t_{v,\alpha}$ ، القيمة المناظرة لها: $+t_{v,1-\alpha}$ ، وتكون:

$$3^\circ) pr(t \leq -t_{v,\alpha}) = pr(t > +t_{v,1-\alpha}) = 1 - pr(t \leq t_{v,1-\alpha}) = \\ = 1 - F(t_{v,1-\alpha})$$

$$4^\circ) pr(t < t_{v,\alpha}) = pr(t \leq t_{v,\alpha}) = F(t_{v,\alpha})$$

إذا كانت: $pr(t \leq -t_{v,\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

فإن القيمة المناظرة لها: $pr(t > +t_{v,1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

و تكون:

$$5^\circ) pr(t > -t_{v, \frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$6^\circ) pr(t \leq +t_{v, \frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$7^\circ) pr(t \leq -t_{v, \frac{\alpha}{2}}) + pr(t > +t_{v, 1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$$

$$8^\circ) pr(-t_{v, \frac{\alpha}{2}} \leq t \leq +t_{v, 1-\frac{\alpha}{2}}) = pr(t \leq t_{v, 1-\frac{\alpha}{2}}) - pr(t \leq -t_{v, \frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

مثال 1:

$$t_{20, 0.95} = 1.725 \quad \text{بدرجة حرية } v=20, \text{ القيمة:}$$

$$pr(t \leq 1.725) = 0.95 \quad \text{الإحتمال:}$$

$$t_{20, 0.05} = -1.725 \quad \text{القيمة المناظرة لها:}$$

$$pr(t \leq -1.725) = 0.05 \quad \text{الإحتمال:}$$

$$t_{34, 0.975} = 2.032 \quad \text{بدرجة حرية } v=34, \text{ القيمة:}$$

$$pr(t \leq 2.032) = 0.975 \quad \text{الإحتمال:}$$

$$t_{34, 0.025} = -2.032 \quad \text{القيمة المناظرة لها:}$$

$$pr(t \leq -2.032) = 0.025 \quad \text{الإحتمال:}$$

$$pr(t > -2.032) = 0.975$$

6-5) تقريب توزيع ستودنت من التوزيع الطبيعي: Normal approximationإذا كانت درجات الحرية كبيرة ، أي إذا تحقق الشرط : $v \geq 30$

يمكن تقريب توزيع ستودنت من التوزيع الطبيعي المعياري ، حيث يصبح التباين تقريبا واحد 1 .

$$\mu = 0 \quad \text{المتوسط:}$$

$$\sigma^2 = \frac{v}{v-2} \approx 1 \quad \text{التباين:}$$

مثال 2:

$$v = 50 \quad \text{بدرجة حرية:}$$

$$t_{50, 0.90} = 1.299 \quad \text{القيمة:}$$

$$pr(t \leq 1.299) = 0.90 \quad \text{الإحتمال:}$$

شرط التقريب محقق: $v \geq 30$

المتوسط و التباين:

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma^2 = \frac{50}{48} \approx 1 \end{cases}$$

الإحتمال:

$$pr(t \leq 1.299) = pr(Z \leq 1.299) = 0.9015$$

(6) توزيع فيشر: $F(v_1, v_2)$

قدم هذا التوزيع من طرف رونالد فيشر (Ronald Fisher 1890-1962) ، و شنيديكور Snédecor ، ويسمى عادة توزيع Fisher-Snédecor .

(1-6) متغيرة فيشر:

توزيع فيشر $F(v_1, v_2)$ بدرجتي حرية v_1, v_2 ، توزيع إحصائي يعتمد على توزيع كاي تربيع. إذا كانت متغيرتين مستقلتين :

χ_1^2 متغيرة كاي تربيع بدرجة حرية v_1 :

$$\chi_1^2 \sim \chi_{v_1}^2$$

χ_2^2 متغيرة كاي تربيع بدرجة حرية v_2 :

$$\chi_2^2 \sim \chi_{v_2}^2$$

فإن المتغيرة العشوائية :

$$F = \frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2}$$

هي متغيرة فيشر Fisher ، بدرجتي حرية (Two Degrees of Freedom) :

درجة حرية البسط numerator v_1 ،

و درجة حرية المقام denominator v_2 .²⁶

متغيرة فيشر هي متغيرة مستمرة تأخذ قيم حقيقية غير سالبة: $F \geq 0$

²⁶ Roger Pfaffenberger, Patterson. Statistical methods for business and economics. Op-cit P 342 .

2-6 دالة الكثافة الإحصائية:

دالة الكثافة الإحصائية لمتغيرة فيشر تعرف كما يلي: ²⁷

$$f(F) = \frac{1}{\beta\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{v_1}{2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \cdot F^{\left(\frac{v_1}{2}-1\right)}}{\left(1+\frac{v_1}{v_2} \cdot F\right)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}}$$

حيث: $F \geq 0$

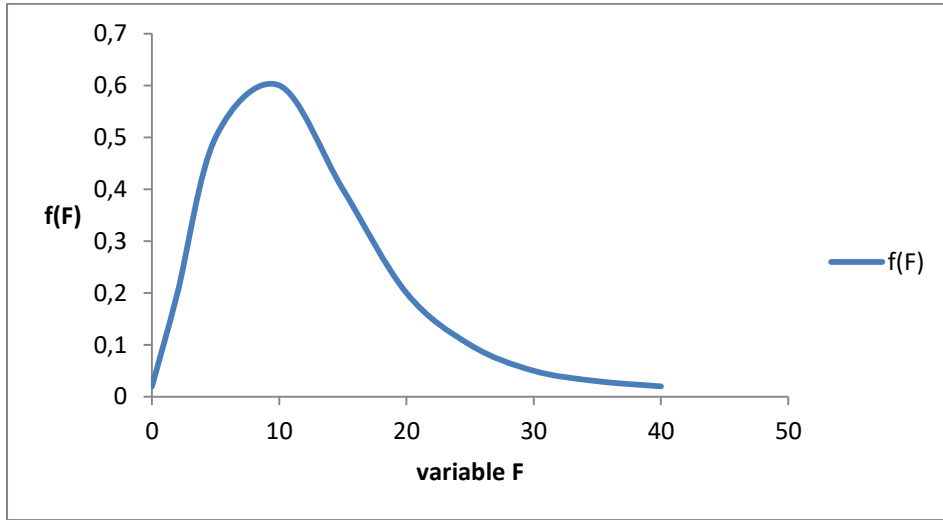
v_1 درجة حرية البسط ، v_2 درجة حرية المقام ،

دالة بيتا $\beta\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)$ بمعلمتين $\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)$.

و نكتب : $F \sim \mathcal{F}(v_1, v_2)$

3-6 التمثيل البياني:

المنحنى البياني لمتغيرة F غير متناظر، موجب الالتواء ديله الأيمن أطول مثل منحنى χ^2 .



- المنحنى يمثل دالة الكثافة الإحصائية : $f(F)$

- المساحة تحت المنحنى تمثل دالة التوزيع : $F(F) = \int_0^F f(F) \cdot d(F)$

- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي 1 .

²⁷ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. مرجع سبق ذكره ص 232 .

- كل إحتمال هو مساحة جزئية تحت المنحنى .
- درجات الحرية v_1, v_2 تحدد الإلتواء و التفرطح :
- إذا كانت v_1, v_2 صغيرة المنحنى ملتوي، وأكثر تفرطاً .
- عندما تزداد v_1, v_2 المنحنى ينتقل نحو اليمين ويصبح أقل إلتواءاً ، وأقل تفرطاً .

(4-6) العزوم:

- القيمة المتوقعة:

$$\mu = \frac{v_2}{v_2 - 2} , \quad v_2 > 2$$

القيمة المتوقعة تساوي:

- التباين:

التباين يساوي: ²⁸

$$\sigma^2 = \frac{2 \cdot (v_2)^2 \cdot (v_1 + v_2 - 2)}{v_1 \cdot (v_2 - 2)^2 \cdot (v_2 - 4)} , \quad v_2 > 4$$

- معامل الإلتواء:

$$\gamma_1 = \frac{MC_3}{\sigma^3}$$

معامل فيشر للإلتواء يساوي:

و هو إلتواء موجب $\gamma_1 > 0$

كلما زادت v_1, v_2 كلما أصبح أقل إلتواءاً .

- معامل التفرطح:

$$\gamma_2 = \frac{MC_4}{\sigma^4} - 3$$

معامل التفرطح يساوي:

إذا كانت v_1, v_2 صغيرة منحنى متفرطح (تشئت كبير) : $\gamma_2 < 0$

كلما زادت v_1, v_2 كلما أصبح أقل تفرطاً ،

إذا كانت v_1, v_2 كبيرة منحنى مدبب (تشئت ضئيل) : $\gamma_2 > 0$

(5-6) استخدام الجدول:

نستعمل جدول يعطي إحتمالات تراكمية من الشكل :

$$pr(F \leq F_{(1-\alpha), v_1, v_2}) = F(F_{(1-\alpha), v_1, v_2})$$

أي دالة التوزيع أو الإحتمال التجميعي .

²⁸ Philippe Tassi, Méthodes statistiques. Op-cit P 37 .

جدول فيشر يعطي ثلاث قيم للإحتمالات (0.95 ، 0.975 ، 0.99) ، ولذلك يستخدم الرمز $F_{(1-\alpha), v_1, v_2}$ للتعبير عن القيمة الخاصة لمتغيرة فيشر بالقيمة الأعلى $(1-\alpha)$ بدرجة حرية البسط v_1 ، ودرجة حرية المقام v_2 ،

بحيث أن الإحتمال : $pr(F \leq F_{(1-\alpha), v_1, v_2}) = 1 - \alpha$

خواص:

$$1^\circ) pr(F \leq F_{(1-\alpha), v_1, v_2}) + pr(F > F_{(1-\alpha), v_1, v_2}) = 1$$

إذا كان: $F_{(1-\alpha_1), v_1, v_2} \leq F_{(1-\alpha_2), v_1, v_2}$ ، فإن:

$$2^\circ) pr(F_{(1-\alpha_1), v_1, v_2} \leq F \leq F_{(1-\alpha_2), v_1, v_2}) = \\ = pr(F \leq F_{(1-\alpha_2), v_1, v_2}) - pr(F \leq F_{(1-\alpha_1), v_1, v_2})$$

إذا كانت: F_{α, v_1, v_2} ، القيمة المقابلة (وغير المناظرة) لـ: $F_{(1-\alpha), v_1, v_2}$ ، تكون:

$$3^\circ) pr(F \leq F_{\alpha, v_1, v_2}) = pr(F > F_{(1-\alpha), v_1, v_2}) = \\ = 1 - pr(F \leq F_{(1-\alpha), v_1, v_2})$$

$$4^\circ) pr(F < F_{(1-\alpha), v_1, v_2}) = pr(F \leq F_{(1-\alpha), v_1, v_2}) =$$

مثال 1:

بدرجة حرية $v_1=4$ ، $v_2=12$ ، $1 - \alpha = 0.95$

القيمة: $F_{0.95, 4, 12} = 3.26$

الإحتمال: $pr(F \leq 3.26) = 0.95$

بدرجة حرية $v_1=9$ ، $v_2=19$ ، $1 - \alpha = 0.99$

القيمة: $F_{0.99, 9, 19} = 3.52$

الإحتمال: $pr(F \leq 3.52) = 0.99$

بدرجة حرية $v_1=10$ ، $v_2=25$ ، $1 - \alpha = 0.975$

القيمة: $F_{0.975, 10, 25} = 2.61$

الإحتمال: $pr(F \leq 2.61) = 0.975$

6-6) تبديل درجات الحرية:

لإيجاد القيمة الأدنى المقابلة بالإحتمال الأدنى ، تستخدم طريقة تبديل درجات الحرية أو مقلوب الكسر (مقلوب درجات الحرية) :

يستخدم الرمز F_{α, v_2, v_1} للتعبير عن القيمة الخاصة لمتغيرة فيشر بالقيمة الأدنى α بدرجة حرية البسط v_2 ، و درجة حرية المقام v_1 ،

بحيث أن الإحتمال : $pr(F \leq F_{\alpha, v_2, v_1}) = \alpha$

مقلوب الكسر:

$$\begin{aligned} pr(F \leq F_{(1-\alpha), v_1, v_2}) &= 1 - \alpha \\ &= pr\left(\frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2} \leq F_{(1-\alpha), v_1, v_2}\right) = 1 - \alpha \\ &= pr\left(\frac{\chi_2^2/v_2}{\chi_1^2/v_1} \geq \frac{1}{F_{(1-\alpha), v_1, v_2}}(v_2, v_1)\right) = 1 - \alpha \\ &\Rightarrow pr\left(\frac{\chi_2^2/v_2}{\chi_1^2/v_1} < \frac{1}{F_{(1-\alpha), v_1, v_2}}(\alpha, v_2, v_1)\right) = \alpha \\ &= pr(F \leq \frac{1}{F_{(1-\alpha), v_1, v_2}}(\alpha, v_2, v_1)) = \alpha \end{aligned}$$

إذن القيمة :

$$F_{\alpha, v_2, v_1} = \frac{1}{F_{(1-\alpha), v_1, v_2}}$$

مثال 2:

لدينا القيمة : $F_{0.95, 4, 12} = 3.26$

نجد القيمة:

$$F_{0.05, 12, 4} = \frac{1}{F_{0.95, 4, 12}} = \frac{1}{3.26} = 0.306$$

الإحتمال: $pr(F \leq 0.306) = 0.05$

$$F_{0.99,9,19} = 3.52 \quad \text{لدينا القيمة :}$$

نجد القيمة:

$$F_{0.01,19,9} = \frac{1}{F_{0.99,9,19}} = \frac{1}{3.52} = 0.284$$

$$pr(F \leq 0.284) = 0.01 \quad \text{الإحتمال:}$$

$$F_{0.975,10,25} = 2.61 \quad \text{لدينا القيمة :}$$

نجد القيمة:

$$F_{0.025,25,10} = \frac{1}{F_{0.975,10,25}} = \frac{1}{2.61} = 0.383$$

$$pr(F \leq 0.383) = 0.025 \quad \text{الإحتمال:}$$

تمارين الفصل الثالث:تمرين 1:

$$f(x) = \frac{1}{60}$$

ليكن التوزيع المعرف بالدالة :

$$20 \leq x \leq 80 \quad \text{إذا كان}$$

°1 بين أن $f(x)$ دالة كثافة إحصائية،

°2 أحسب التوقع الرياضي و التباين .

°3 أحسب الإحتمالات : $pr(x = 70)$, $pr(x \leq 50)$, $pr(x > 65)$

تمرين 2:

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

لتكن دالة كثافة التوزيع المنتظم :

$$a \leq x \leq b \quad \text{إذا كان}$$

°1 إذا علمت أن $\mu = 3$, أوجد a , b

°2 أوجد دالة التوزيع،

°3 أوجد التباين .

تمرين 3:

في بنك تقدم الخدمة بمعدل 0.2 ساعة (12 دقيقة) للزبون ، x متغير عشوائي أسي يمثل زمن خدمة زبون أخذ عشوائيا .

°1 أوجد دالة الكثافة الإحصائية .

°2 أوجد دالة التوزيع .

°3 أحسب إحتمال زمن الخدمة أقل أو يساوي 15 دقيقة . °4 أقل أو يساوي 30 دقيقة .

°5 محصور بين 12 و 30 دقيقة .

تمرين 4:

مدة صلاحية مصابيح كهربائية بالأيام متغير أسي x , بمتوسط α يوم .

°1 إذا علمت أن $pr(x > 60) = 0.36788$, أوجد α .

°2 أحسب إحتمال $pr(30 \leq x \leq 60)$

°3 إذا كان $pr(x > b) = 0.22313$, أوجد b .

تمرين 5:

كتاب مكون من 300 صفحة، به 600 خطأ مطبعي. عدد الصفحات التي تفصل بين خطأين متغير أسي.

1°) أوجد دالة الكثافة الإحصائية باستخدام λ معلمة poisson .

2°) أوجد دالة التوزيع .

3°) ماهو احتمال أن تفصل بين خطأين أكثر من ثلاثة أرباع الصفحة .

4°) ماهو احتمال أن تفصل بين خطأين ، مابين ربع صفحة و صفحة واحدة .

تمرين 6:

أثناء فحص إنجاز طريق تؤخذ مسافات عشوائية ، ويتم حساب احتماليين :

_الاحتمال الأول : احتمال مسافة عيب واحد أقل أو تساوي 10 كم .

_الاحتمال الثاني : احتمال مسافة عيب واحد محصورة بين 10 و 20 كم .

إذا كان الاحتمال الأول اكبر من الاحتمال الثاني يرفض الإنجاز .

_ إذا علمت أن طول الطريق 6000 كم و به 500 عيب ، هل يرفض أم يقبل الإنجاز .

تمرين 7:

في مصلحة يصل المرضى بمعدل 15 في الساعة ، ويتم في العادة فحص 15 في الساعة ، بحيث لا يوجد إنتظار .

1°) ماهو احتمال وجود شخص في الإنتظار .

2°) ماهو احتمال أن ينتظر شخص بين 4 دقائق و 10 دقائق .

3°) أوجد التوقع الرياضي و التباين .

تمرين 8:

في معبر حدودي يصل المسافرون بمعدل 4 في الساعة ، ويتم التفتيش بمعدل 4 في الساعة ، بحيث لا يوجد طابور (إنتظار) .

_ماهو احتمال وجود طابور ، إستخدم توزيعين : poisson ، exponentielle

تمرين 9:

متغير طبيعي z ، بمتوسط 0 و تباين 1 . أحسب الاحتمالات التالية :

$$pr(z \leq 1) , pr(0 \leq z \leq 1) , pr(z \leq -1) , pr(-1 \leq z \leq 1) ,$$

$$pr(z \leq 2.55) , pr(z > 0) , pr(1.6 \leq z \leq 2.55) , pr(-2.55 \leq z \leq -2)$$

تمرين 10:

عمر مصابيح كهربائية متغير طبيعي , بمتوسط 100 ساعة و تباين 64 ساعة , أخذ مصباح عشوائيا :
 _ ماهو احتمال أن يكون عمره : °1 بين 110 و 120 . °2 بين 90 و 100 . °3 أكبر من 130 .

تمرين 11:

معدل الرطوبة في الهواء متغير طبيعي , بمتوسط 60% و إنحراف معياري 20% . ماهو احتمال أن تكون
 الرطوبة : _ أقل من 70% , _ بين 70% و 80% , _ أكبر من 100% , _ بين 50% و 100% .

تمرين 12:

مؤسسة تنتج علب بوزن متوسط 500 غ و إنحراف معياري σ , حيث تتبع التوزيع الطبيعي .
 °1 إذا علمت أن 95.44% من العلب وزنها محصور بين 480 و 520 غ , أوجد σ .
 °2 توجه العلب إلي السوق إذا كان وزنها محصور بين 484 و 516 غ , ماهي نسبة العلب الموجهة
 للسوق؟

°3 إذا كانت 92.82% من العلب وزنها محصور بين حد أدنى a و حد أعلى b متناظرين , أوجد a , b .

تمرين 13:

نسبة 30% من الأشخاص الذين يزورون معرض يقومون بالشراء . عند دخول 30 زائر , ماهو احتمال أن:
 °1 من 10 إلي 12 شخص يقومون بالشراء , إستخدم توزيعين normale , binomiale .
 °2 10 أشخاص , إستخدم normale . °3 10 أشخاص أو أكثر . °4 30 شخص أو أقل .

تمرين 14:

عملية إنتاجية تسبب في المتوسط 10 وحدات معيبة في الساعة . ماهو احتمال أن تكون من 9 إلي 11
 وحدة معيبة في إنتاج ساعة أخذت عشوائيا . إستخدم توزيعين normale , poisson .

تمرين 15:

لتكن المتغيرات:

$$y = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{Z^2}$$

حيث كل Z متغير طبيعي معياري: $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

أ)نعرف المتغيرين:

$$y_1 = y + Z^2$$

$$y_2 = y - Z^2$$

_أحسب الإحتمالات:

$$1^\circ) pr(y \leq 11.15) \quad , \quad 2^\circ) pr(Z^2 > 3.17) \quad , \quad 3^\circ) pr(y_1 \leq 15.10)$$

$$4^\circ) pr(y_2 \leq 7.8) \quad , \quad 5^\circ) pr(y_2 > 6.25)$$

ب) نعرف المتغيرين:

$$d_1 = \frac{Z}{\sqrt{y_1/5}} \quad , \quad d_2 = \frac{Z}{\sqrt{y_2/3}}$$

_أحسب الإحتمالات:

$$1^\circ) pr(d_1 \leq 2.57) \quad , \quad 2^\circ) pr(d_2 > 1.25)$$

ج) نعرف المتغير:

$$h = \frac{y_2/3}{y_1/5}$$

_أحسب الإحتمال:

$$pr(h \leq 5.40)$$

حل التمرين 1:

1°) الدالة $f(x)$ دالة كثافة إحصائية، حيث تحقق الشرطين : $f(x) = \frac{1}{60} \geq 0$

$$\int_{20}^{80} f(x) \cdot dx = \int_{20}^{80} \left(\frac{1}{60}\right) dx = \left[\frac{x}{60}\right]_{20}^{80} = \frac{80}{60} - \frac{20}{60} = \frac{60}{60} = 1$$

2°) حساب التوقع الرياضي و التباين :

$$E(X) = \int_{20}^{80} x \cdot f(x) = \int_{20}^{80} \left(\frac{x}{60}\right) dx = \left[\frac{1}{2} * \frac{x^2}{60}\right]_{20}^{80} = \frac{80^2 - 20^2}{120} = \frac{6000}{120} = \frac{100}{2} = 50$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{20}^{80} x^2 \cdot f(x) = \int_{20}^{80} \left(\frac{x^2}{60}\right) dx = \left[\frac{1}{3} * \frac{x^3}{60}\right]_{20}^{80} = \frac{80^3 - 20^3}{180} = \frac{504000}{180} = \frac{33600}{12}$$

$$V(X) = \frac{33600}{12} - 50^2 = \frac{33600}{12} - \frac{30000}{12} = \frac{3600}{12} = \frac{60^2}{12} = 300$$

3°) حساب الإحتمالات :

$$pr(x = 70) = \int_{70}^{70} \frac{1}{60} dx = \left[\frac{x}{60}\right]_{70}^{70} = 0$$

$$pr(x \leq 50) = \int_{20}^{50} \frac{1}{60} dx = \left[\frac{x}{60}\right]_{20}^{50} = \frac{50-20}{60} = \frac{30}{60} = 0.5$$

$$pr(x > 65) = \int_{65}^{80} \frac{1}{60} dx = \left[\frac{x}{60}\right]_{65}^{80} = \frac{80-65}{60} = \frac{15}{60} = 0.25$$

حل التمرين 2:

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad a \leq x \leq b$$

لدينا دالة كثافة التوزيع المنتظم:

1° إيجاد a, b :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x}{2}\right]_a^b = 1$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{2} = 1$$

$$\mu = 3 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 3$$

من المعادلتين:

$$\begin{cases} b - a = 2 \\ a + b = 6 \end{cases}$$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4, \Rightarrow a = 2$$

2° إيجاد دالة التوزيع:

$$F(x) = \int_2^x f(X) dX = \int_2^x \left(\frac{1}{2}\right) dX = \left[\frac{X}{2}\right]_2^x = \frac{x-2}{2}$$

وتكتب:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ \frac{x-2}{2} & , 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

3° إيجاد التباين:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$$

حل التمرين 3:

1° دالة الكثافة الإحصائية للمتغير الأسّي:

الخدمة بمعدل: $\alpha=12$

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} e^{-\frac{x}{12}}, \quad x \in [0, +\infty[$$

2° إيجاد دالة التوزيع:

$$F(x) = pr(X \leq x) = \int_0^x f(X) dX$$

$$= \int_0^x \frac{1}{12} e^{-\frac{X}{12}} dX = \left[-e^{-\frac{X}{12}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x}{12}} - (-e^0) = 1 - e^{-\frac{x}{12}}$$

3° حساب احتمال زمن الخدمة أقل أو يساوي 15 دقيقة:

$$pr(x \leq 15) = F(15) = 1 - e^{-\frac{15}{12}} = 0.713495$$

(°4 أقل أو يساوي 30 دقيقة:

$$pr(x \leq 30) = F(30) = 1 - e^{-\frac{30}{12}} = 0.917915$$

(°5 محصور بين 12 و 30 دقيقة:

$$pr(12 \leq x \leq 30) = F(30) - F(12) = 1 - e^{-\frac{30}{12}} - 1 + e^{-\frac{12}{12}} = 0.285794$$

حل التمرين 4:

متغير أسّي x ، بمتوسط α يوم ، $x \in [0, +\infty[$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)} \quad \text{دالة التوزيع :}$$

$$pr(x > 60) = 0.36788 \quad \text{°1 لدينا:}$$

$$pr(x > 60) = 1 - F(60) = 1 - 1 + e^{-\left(\frac{60}{\alpha}\right)} = 0.36788$$

$$\Rightarrow e^{-\left(\frac{60}{\alpha}\right)} = 0.36788 \Rightarrow \ln e^{-\left(\frac{60}{\alpha}\right)} = \ln 0.36788$$

$$\Rightarrow -\frac{60}{\alpha} = \ln 0.36788 \Rightarrow \alpha = 60$$

دالة التوزيع هي إذن:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{60}\right)}$$

(°2 حساب إحتمال:

$$pr(30 \leq x \leq 60) = F(60) - F(30) = 1 - e^{-\left(\frac{60}{60}\right)} - 1 + e^{-\left(\frac{30}{60}\right)} = 0.23865$$

(°3 لدينا:

$$pr(x > b) = 0.22313 \Rightarrow 1 - F(b) = 0.22313$$

$$\Rightarrow 1 - 1 + e^{-\left(\frac{b}{60}\right)} = 0.22313 \Rightarrow \ln e^{-\left(\frac{b}{60}\right)} = \ln 0.22313$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{60} = \ln 0.22313 \Rightarrow b = -60 * \ln 0.22313 \Rightarrow b = 90$$

حل التمرين 5:

متوسط عدد الصفحات بين خطأين، معلمة الأسّي: $\alpha = \frac{300}{600} = 0.5$

معدل الأخطاء في الصفحة، معلمة بواسون: $\lambda = \frac{1}{\alpha} = 2$

(°1 دالة الكثافة الاحتمالية بإستخدام λ :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 2 \cdot e^{-2x} \quad , \quad x \in [0, +\infty[$$

(°2 دالة التوزيع :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-2x}$$

°3) احتمال أن تفصل بين خطأين أكثر من ثلاثة أرباع الصفحة: 0.75

$$pr(x > 0.75) = 1 - F(0.75) = 1 - 1 + e^{-1.5} = 0.22313$$

°4) احتمال أن تفصل بين خطأين ، مابين ربع صفحة 0.25 و صفحة واحدة 1 :

$$pr(0.25 \leq x \leq 1) = F(1) - F(0.25) = 1 - e^{-2} - 1 + e^{-0.5} = 0.471195$$

حل التمرين 6:

متوسط المسافة: $\alpha = 12$

الاحتمال الأول: $pr(x \leq 10) = 0.565401$

الاحتمال الثاني: $pr(10 \leq x \leq 20) = 0.245722$

يرفض الإنجاز .

حل التمرين 7:

متوسط زمن الفحص: $\alpha = 4$

1_ احتمال شخص في الإنتظار: $pr(x > 4) = 0.367879$

2_ احتمال: $pr(4 \leq x \leq 10) = 0.285794$

3_ التوقع والتباين: $E(X) = 4$, $V(X) = 4^2$

حل التمرين 8:

توزيع بواسون:

معدل الوصول: $\lambda = 4$

دالة الاحتمال: $f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

$$f(x) = \frac{4^x \cdot e^{-4}}{x!} , x = 0, 1, 2, \dots$$

احتمال وجود طابور = احتمال وصول أكثر من 4 أشخاص في الساعة:

$$pr(x > 4) = 1 - pr(x \leq 4) = 1 - f(0) - f(1) - f(2) - f(3) - f(4)$$

$$= 1 - e^{-4} - 4 \cdot e^{-4} - \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2} - \frac{4^3 \cdot e^{-4}}{6} - \frac{4^4 \cdot e^{-4}}{24} = 0.371163$$

توزيع أسي:

معدل زمن التفتيش: $\alpha = \frac{60}{4} = 15$

دالة التوزيع: $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{15}} , x \in [0, +\infty[$$

إحتمال وجود طابور = إحتمال تقتيش شخص في زمن أكبر من 15 دقيقة:

$$pr(x > 15) = 1 - F(15) = 1 - 1 + e^{-\frac{15}{15}} = 0.367879$$

حل التمرين 9:

$$\begin{aligned} pr(z \leq 1) &= 0.8413, \quad pr(0 \leq z \leq 1) = 0.3413, \quad pr(z \leq -1) = 0.1587 \\ pr(-1 \leq z \leq 1) &= 0.6826, \quad pr(z \leq 2.55) = 0.9946, \quad pr(z > 0) = 0.5 \\ pr(1.6 \leq z \leq 2.55) &= 0.0494, \quad pr(-2.55 \leq z \leq -2) = 0.0174 \end{aligned}$$

حل التمرين 10:

$$\begin{aligned} 1^\circ) pr(110 \leq x \leq 120) &= pr\left(\frac{110-100}{8} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{120-100}{8}\right) = 0.0994 \\ 2^\circ) pr(90 \leq x \leq 100) &= pr\left(\frac{90-100}{8} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{100-100}{8}\right) = 0.3944 \\ 3^\circ) pr(x > 130) &= pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{130-100}{8}\right) = 1 - pr(z \leq 3.75) = 0.0001 \end{aligned}$$

حل التمرين 11:

$$\begin{aligned} pr(x < 0.7) &= pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{0.7-0.6}{0.2}\right) = 0.6915 \\ pr(0.7 \leq x \leq 0.8) &= pr\left(\frac{0.7-0.6}{0.2} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{0.8-0.6}{0.2}\right) = 0.1498 \\ pr(x > 1) &= pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{1-0.6}{0.2}\right) = 1 - pr(z \leq 2) = 0.0228 \\ pr(0.5 \leq x \leq 1) &= pr\left(\frac{0.5-0.6}{0.2} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{1-0.6}{0.2}\right) = 0.6687 \end{aligned}$$

حل التمرين 12:

°1 إيجاد σ بإستخدام الإحتمال 95.44 % :

$$\begin{aligned} pr(480 \leq x \leq 520) &= pr\left(\frac{480-500}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{520-500}{\sigma}\right) = 0.9544 \\ \Rightarrow pr\left(\frac{-20}{\sigma} \leq z \leq \frac{20}{\sigma}\right) &= pr\left(z \leq \frac{20}{\sigma}\right) - pr\left(z \leq \frac{-20}{\sigma}\right) = 0.9544 \\ \Rightarrow pr\left(z \leq \frac{20}{\sigma}\right) - \left[1 - pr\left(z \leq \frac{+20}{\sigma}\right)\right] &= -1 + 2 \cdot pr\left(z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0.9544 \\ \Rightarrow pr\left(z \leq \frac{20}{\sigma}\right) &= \frac{1.9544}{2} \Rightarrow pr\left(z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0.9772 \\ pr(z \leq 2) &= 0.9772 \Rightarrow \sigma = 10 \end{aligned}$$

°2 حساب إحتمال وزنها محصور بين 484 و 516 :

$$\begin{aligned} pr(484 \leq x \leq 516) &= pr\left(\frac{484-500}{10} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{516-500}{10}\right) = \\ &= pr(-1.6 \leq z \leq 1.6) = 0.8904 \Rightarrow 89.04\% \end{aligned}$$

°3 إيجاد حدين متناظرين a, b بإستخدام الإحتمال 92.82 % :

$$\begin{aligned}
pr(a \leq x \leq b) &= pr\left(\frac{a-500}{10} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-500}{10}\right) = 0.9282 \\
\Rightarrow pr\left(z \leq \frac{b-500}{10}\right) - pr\left(z \leq \frac{a-500}{10}\right) &= pr\left(z \leq \frac{b-500}{10}\right) - \left[1 - pr\left(z \leq \frac{b-500}{10}\right)\right] \\
\Rightarrow 2 \cdot pr\left(z \leq \frac{b-500}{10}\right) - 1 &= 0.9282 \Rightarrow pr\left(z \leq \frac{b-500}{10}\right) = 0.9641 \\
pr(z \leq 1.8) &= 0.9641 \Rightarrow \frac{b-500}{10} = 1.8 \Rightarrow b = 518, a = 482
\end{aligned}$$

حل التمرين 13:

1°) احتمال من 10 إلى 12 شخص:

توزيع ثنائي الحدين:

$$f(x) = c_n^x \cdot \rho^x \cdot q^{n-x} = c_{30}^x \cdot 0.3^x \cdot 0.7^{(30-x)}$$

$$x = 0, 1, 2 \dots 30$$

$$\begin{aligned}
pr(10 \leq x \leq 12) &= f(10) + f(11) + f(12) = c_{30}^{10} \cdot 0.3^{10} \cdot 0.7^{(30-10)} + \\
&+ c_{30}^{11} \cdot 0.3^{11} \cdot 0.7^{(30-11)} + c_{30}^{12} \cdot 0.3^{12} \cdot 0.7^{(30-12)} = 0.141561 + 0.110307 + \\
&+ 0.074851 = 0.326719
\end{aligned}$$

التوزيع الطبيعي: شرط التقريب:

$$\begin{cases} n = 30 \\ n \cdot \rho = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} n \geq 30 \\ n \cdot \rho > 5 \end{cases}$$

$$\mu = n \cdot \rho = 9, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot \rho \cdot q} = \sqrt{6.3} = 2.509$$

$$\begin{aligned}
pr(10 \leq x \leq 12) &= pr(9.5 \leq x \leq 12.5) = pr\left(\frac{9.5-9}{2.509} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{12.5-9}{2.509}\right) = \\
&= pr(0.2 \leq z \leq 1.4) = 0.3299
\end{aligned}$$

2°) احتمال 10 أشخاص (الطبيعي):

$$\begin{aligned}
pr(10) &= pr(9.5 \leq x \leq 10.5) = pr\left(\frac{9.5-9}{2.509} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{10.5-9}{2.509}\right) = \\
&= pr(0.2 \leq z \leq 0.6) = 0.1464
\end{aligned}$$

3°) احتمال 10 أشخاص أو أكثر:

$$pr(x \geq 10) = pr(x > 9.5) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{9.5-9}{2.509}\right) = 1 - pr(z \leq 0.2) = 0.4207$$

4°) احتمال 30 شخص أو أقل:

$$pr(x \leq 30) = pr(x < 30.5) = pr\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{30.5-9}{2.509}\right) = pr(z \leq 8.6) = 1$$

حل التمرين 14:

إحتمال من 9 إلى 11 وحدة معيبة:

توزيع بواسون: $\lambda=10$

$$f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \frac{10^x \cdot e^{-10}}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\begin{aligned} pr(9 \leq x \leq 11) &= f(9) + f(10) + f(11) = \frac{10^9 \cdot e^{-10}}{9!} + \frac{10^{10} \cdot e^{-10}}{10!} + \frac{10^{11} \cdot e^{-10}}{11!} \\ &= 10^9 \left(\frac{1}{9!} + \frac{10}{10!} + \frac{10^2}{11!} \right) e^{-10} = 0.363956 \end{aligned}$$

التوزيع الطبيعي: شرط التقريب:

$$\lambda \geq 10$$

$$\mu = \lambda = 10, \quad \sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} pr(9 \leq x \leq 11) &= pr(8.5 \leq x \leq 11.5) = pr\left(\frac{8.5-10}{\sqrt{10}} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{11.5-10}{\sqrt{10}}\right) = \\ &= pr(-0.4743 \leq z \leq 0.4743) = 0.3616 \end{aligned}$$

حل التمرين 15:

لدينا المتغيرات: كل $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ متغير طبيعي معياري:

$$y = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2$$

$$Z^2$$

(أ) المتغيرات تتبع توزيع:

$$y_1 = y + Z^2$$

$$y_2 = y - Z^2$$

Y كي مربع بدرجة حرية $v=4$

Z^2 كي مربع بدرجة حرية $v=1$

Y_1 كي مربع بدرجة حرية $v_1=5$

Y_2 كي مربع بدرجة حرية $v_2=3$

حساب الاحتمالات:

$$1^\circ) pr(y \leq 11.15) = pr(\chi_4^2 \leq 11.15) = 0.975$$

$$2^\circ) pr(Z^2 > 3.17) = pr(\chi_1^2 > 3.17) = 1 - pr(\chi_1^2 \leq 3.17) = 0.075$$

$$3^\circ) pr(y_1 \leq 15.10) = pr(\chi_5^2 \leq 15.10) = 0.99$$

$$4^\circ) pr(y_2 \leq 7.8) = pr(\chi_3^2 \leq 7.8) = 0.95$$

$$5^\circ) pr(y_2 > 6.25) = pr(\chi_3^2 > 6.25) = 1 - pr(\chi_3^2 \leq 6.25) = 0.10$$

(ب) المتغيرين يتبعان توزيع:

$$d_1 = \frac{Z}{\sqrt{y_1/5}}, \quad d_2 = \frac{Z}{\sqrt{y_2/3}}$$

d_1 ستودنت بدرجة حرية $v_1=5$

d_2 ستودنت بدرجة حرية $v_2=3$

_حساب الاحتمالات:

$$1^\circ) pr(d_1 \leq 2.57) = pr(t_5 \leq 2.57) = 0.975$$

$$2^\circ) pr(d_2 > 1.25) = pr(t_3 > 1.25) = 1 - pr(t_3 \leq 1.25) = 0.15$$

(ج) المتغير يتبع توزيع فيشر:

$$h = \frac{y_2/3}{y_1/5}$$

بدرجة حرية البسط $v_1=3$

بدرجة حرية المقام $v_2=5$

_حساب الاحتمال:

$$pr(h \leq 5.40) = pr(F_{3,5} \leq 5.40) = 0.95$$

$$F_{3,5,0.95} = 5.40$$

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية ذات بعدين:

إذا كان لدينا متغير عشوائي X ، ومتغير عشوائي Y ، و يوجد احتمال أن كل قيمة ممكنة لـ X يمكن أن تحدث مع أي قيمة ممكنة لـ Y ، فإنه يكون لدينا متغير عشوائي ثنائي (bivariate variable) أو متغير عشوائي ببعدين Two-way Random Variables .

في حالة عدة متغيرات عشوائية، يكون لدينا متغير عشوائي بعدة أبعاد أو شعاع عشوائي.

تعريف:

لتكن تجربة عشوائية مع فضاء عينة S ،
التطبيق (X, Y) من S في R^2 ، الذي يرفق بكل عنصر $a \in S$ ، ثنائية عددين حقيقيين :
 $(X(a), Y(a))$ ، يسمى ثنائية متغيرات عشوائية ، إذا كان كل تطبيق X, Y متغير عشوائي.
فضاء متغيرتين عشوائيتين هو مجموعة الثنائيات: ²⁹

$$\mathcal{A} = \{(x, y); x = X(a), y = Y(a), a \in S\}$$

1) حالة المتغيرات المتقطعة:1-1) دالة الاحتمال المشترك: Join Probability Function

إذا كانت X, Y متغيرتين عشوائيتين متقطعتين:

القيم الممكنة لـ X : $X = x_1, x_2, \dots, x_n$

القيم الممكنة لـ Y : $Y = y_1, y_2, \dots, y_m$

نفرض أنه لكل ثنائية من القيم: (x_i, y_j) يوجد احتمال: $f(x_i, y_j)$

أي يوجد احتمال أن: $X = x_i, i = 1, 2, \dots, n$

و يوجد احتمال أن: $Y = y_j, j = 1, 2, \dots, m$

حيث: $f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j)$

تسمى الدالة $f(X, Y)$ دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين X, Y .

هذه الدالة تحقق الشرطين:

أ) لكل قيم X, Y الاحتمالات غير سالبة : $f(x_i, y_j) \geq 0$

²⁹ Khaldi khaled, Probabilités. Op-cit, P 95 .

$$\sum_1^n \sum_1^m f(x_i, y_j) = 1 \quad \text{ب) مجموع الإحتمالات :}$$

مثال 1:

نرمي حجري نرد، المتغير العشوائي X هو الرقم الذي يظهر على الحجر الأول، المتغير العشوائي Y هو الرقم الذي يظهر على الحجر الثاني:

$$f(x_i, y_j) = \frac{1}{36} \quad \text{حيث: هي متغير عشوائي ببعدين،}$$

$$f(1,1) = \frac{1}{36}, f(1,2) = \frac{1}{36}, f(1,3) = \frac{1}{36}, \dots$$

$$f(2,1) = \frac{1}{36}, f(2,2) = \frac{1}{36}, \dots$$

1-2) جدول التوزيع الإحتمالي المشترك:

يمكن تمثيل كل ثنائية (x_i, y_j) و الإحتمال المقابل لها $f(x_i, y_j)$ ، بجدول يسمى جدول التوزيع الإحتمالي المشترك أو جدول ثنائي Bivariate Table ،

$$f(x_i, y_j) = p_{ij} \quad \text{حيث :}$$

X / Y	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	Σ
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}		p_{im}	$p_{i\cdot}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$			$\dots$		$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nj}		p_{nm}	$p_{n\cdot}$
Σ	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot j}$	$\dots$	$p_{\cdot m}$	1

المصدر: Khaldi khaled, Probabilités. Op-cit P 96

الجدول يعطي كل الإحتمالات المشتركة ،

$$f(x_1, y_2) = pr(X = x_1, Y = y_2) = p_{12} \quad \text{مثلا:}$$

$$f(x_2, y_2) = pr(X = x_2, Y = y_2) = p_{22}$$

$$f(x_n, y_m) = pr(X = x_n, Y = y_m) = p_{nm} \quad \text{إلى آخر إحتمال:}$$

مجموع الإحتمالات في كل سطر يسمى إحتمال هامشي (إحتمال حدي):

$$pr(X = x_i) = \sum_1^m p_{ij} = p_{i\bullet}$$

أي إحتمال قيمة x_i ، مع كل قيم Y .

مجموع الإحتمالات في كل عمود يسمى أيضا إحتمال هامشي:

$$pr(Y = y_j) = \sum_1^n p_{ij} = p_{\bullet j}$$

أي إحتمال قيمة y_j ، مع كل قيم X .

المجاميع الهامشية دائما تحقق:

$$\sum_1^n p_{i\bullet} = \sum_1^m p_{\bullet j} = \sum_1^n \sum_1^m p_{ij} = 1$$

أي مجموع الإحتمالات يساوي واحد 1 ، سواء كان الجمع في الأسطر أو الأعمدة.

3-1 دالة الإحتمال الحدي (الهامشي): Marginal Probability Function

الإحتمالات الهامشية السابقة تعطينا دوال الإحتمال الهامشي أو دوال الإحتمال الحدية لكل من X, Y

على حدة .³⁰

دالة الإحتمال الحدية للمتغير X :

$$f_x(x_i) = pr(X = x_i) = \sum_1^m f(x_i, y_j) = p_{i\bullet}$$

إحتمال قيمة x_i ، مع كل قيم Y ،

أي مجموع الإحتمالات في كل سطر، يتم التجميع لدالة الإحتمال المشترك بالنسبة للمتغير Y .

الدالة السابقة تكتب بإختصار:

$$f_x(X) = \sum_y f(x, y)$$

دالة الإحتمال الحدية للمتغير Y :

$$f_y(y_j) = pr(Y = y_j) = \sum_1^n f(x_i, y_j) = p_{\bullet j}$$

إحتمال قيمة y_j ، مع كل قيم X ،

أي مجموع الإحتمالات في كل عمود، يتم التجميع لدالة الإحتمال المشترك بالنسبة للمتغير X .

الدالة السابقة تكتب بإختصار:

$$f_y(Y) = \sum_x f(x, y)$$

³⁰ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. مرجع سبق ذكره، ص 19 .

مثال 2:

نأخذ المثال 1 السابق، رمي حجري نرد، المتغير العشوائي X هو الرقم الذي يظهر على الحجر الأول،

المتغير العشوائي Y هو الرقم الذي يظهر على الحجر الثاني:

الثنائية (X, Y) هي متغير عشوائي ببعدين،

جدول التوزيع الإحتمالي المشترك:

X / Y	$y_1=1$	$y_1=2$	$y_1=3$	$y_1=4$	$y_1=5$	$y_1=6$	Σ
$x_1=1$	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$p_{1\bullet}=6/36$
$x_1=2$	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$p_{2\bullet}=6/36$
$x_1=3$	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$p_{3\bullet}=6/36$
$x_1=4$	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$p_{4\bullet}=6/36$
$x_1=5$	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$p_{5\bullet}=6/36$
$x_1=6$	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	$p_{6\bullet}=6/36$
Σ	$p_{\bullet 1}=6/36$	$p_{\bullet 2}=6/36$	$p_{\bullet 3}=6/36$	$p_{\bullet 4}=6/36$	$p_{\bullet 5}=6/36$	$p_{\bullet 6}=6/36$	1

دالة الإحتمال المشترك: $f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$

الإحتمالات المشتركة:

$$f(1, 2) = pr(X = 1, Y = 2) = p_{12} = \frac{1}{36} \quad \text{مثلا:}$$

$$f(2, 2) = pr(X = 2, Y = 2) = p_{22} = \frac{1}{36}$$

وهي كلها متساوية هنا وتساوي جداء الإحتمالات المنفردة لكل رقم (إحتمال كل حدث منفرد):

$$p_{ij} = p_{12} = p_1 * p_2 = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{مثلا:}$$

دالة الإحتمال الحدية للمتغير X :

$$f_x(x_i) = pr(X = x_i) = \sum_1^m f(x_i, y_j) = p_{i\bullet}$$

الإحتمالات الحدية:

$$f_x(1) = pr(X = 1) = \sum_1^6 f(1, y_j) = p_{1\bullet} = \frac{6}{36} \quad \text{مثلا:}$$

$$f_x(2) = pr(X = 2) = \sum_1^6 f(2, y_j) = p_{2\bullet} = \frac{6}{36}$$

و تكتب بإختصار:

$$f_x(X) = \sum_y f(x, y) = p_{i\bullet}$$

$$f_x(1) = \sum_y f(1, y) = \frac{6}{36}$$

$$f_x(2) = \sum_y f(2, y) = \frac{6}{36}$$

دالة الإحتمال الحدية للمتغير Y :

$$f_y(y_j) = pr(Y = y_j) = \sum_1^n f(x_i, y_j) = p_{\bullet j}$$

الإحتمالات الحدية:

$$f_y(2) = pr(Y = 2) = \sum_1^6 f(x_i, 2) = p_{\bullet 2} = \frac{6}{36} \quad \text{مثلا:}$$

و تكتب بإختصار:

$$f_y(Y) = \sum_x f(x, y) = p_{\bullet j}$$

$$f_y(2) = \sum_x f(x, 2) = \frac{6}{36}$$

4-1 دالة الإحتمال الشرطي: Conditional Probability Function

رأينا سابقا الإحتمال المشترك يساوي:

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

و دالة الإحتمال المشترك للمتغيرين X , Y :

$$f(x, y) = pr(X = x, Y = y)$$

إذا كان المتغيرين مستقلين، فإن الإحتمال المشترك يساوي الجداء:

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j) = pr(X = x_i) * pr(Y = y_j)$$

$$f(x_i, y_j) = p_{i\bullet} * p_{\bullet j} = p_{ij}$$

دالة الإحتمال المشترك تكتب إذن:

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

أي في حال متغيرين مستقلين دالة الإحتمال المشترك تساوي جداء دالتي الإحتمال الحدية.

دوال الإحتمال الشرطي:

إذا كان المتغيرين غير مستقلين، فإن الإحتمال المشترك يساوي:

الجداء بشرط $(X=x_i)$:

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i) * pr(Y = y_j / X = x_i)$$

دالة الإحتمال المشترك تكتب بالشكل:

$$f(x, y) = f_x(x) * f(y/x)$$

الدالة : $f(y/x)$ تسمى دالة الإحتمال الشرطي للمتغير Y بشرط المتغير $X=x$.

ونفس الشيء للجداء بشرط $(Y=y_j)$:

$$f(x_i, y_j) = pr(Y = y_j, X = x_i) =$$

$$f(x_i, y_j) = pr(Y = y_j) * pr(X = x_i / Y = y_j)$$

دالة الإحتمال المشترك تكتب بالشكل:

$$f(x, y) = f_y(y) * f(x/y)$$

الدالة : $f(x/y)$ تسمى دالة الإحتمال الشرطي للمتغير X بشرط المتغير $Y=y$.

إذن دوال الإحتمال الشرطي: ³¹

للمتغير X :

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}$$

و الإحتمال الشرطي يكتب:

$$pr(X = x_i / Y = y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

للمتغير Y :

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}$$

و الإحتمال الشرطي يكتب:

$$pr(Y = y_j / X = x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

مثال 3:

ليكن متغيرين X, Y . المتغير X يأخذ القيم : $X = 10, 20, 20, 20, 30$

المتغير Y يأخذ القيم : $Y = 2, 4, 4, 6$

جدول التوزيع الإحتمالي المشترك للمتغيرين:

³¹ نفس المرجع، ص 22 .

X / Y	2	4	6	Σ
10	1/20	2/20	1/20	$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
20	3/20	6/20	3/20	$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
30	1/20	2/20	1/20	$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
Σ	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	$\frac{10}{20} = \frac{2}{4}$	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	1

الإحتمالات الشرطية للمتغير X :

$$pr(X = x_i / Y = y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

مثلا:

$$pr(X = 20 / Y = 2) = \frac{f(20, 2)}{pr(Y=2)} = \frac{3/20}{5/20} = \frac{3}{5}$$

$$pr(X = 20 / Y = 4) = \frac{f(20, 4)}{pr(Y=4)} = \frac{6/20}{10/20} = \frac{3}{5}$$

دالة الإحتمال الشرطي للمتغير X :

مثلا: بشرط $y=4$, $y=2$

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}$$

$$f(x/2) = \frac{f(x, 2)}{f_y(2)} = \frac{f(x, 2)}{5/20}$$

$$f(x/4) = \frac{f(x, 4)}{f_y(4)} = \frac{f(x, 4)}{10/20}$$

الإحتمالات الشرطية للمتغير Y :

$$pr(Y = y_j / X = x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(x=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}$$

مثلا:

$$pr(Y = 4 / X = 20) = \frac{f(20, 4)}{pr(x=20)} = \frac{6/20}{12/20} = \frac{2}{4}$$

$$pr(Y = 4 / X = 30) = \frac{f(30, 4)}{pr(x=30)} = \frac{2/20}{4/20} = \frac{2}{4}$$

دالة الإحتمال الشرطي للمتغير Y :

مثلا: بشرط $x=30$, $x=20$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}$$

$$f(y/20) = \frac{f(20,y)}{f_x(20)} = \frac{f(20,y)}{12/20}$$

$$f(y/30) = \frac{f(30,y)}{f_x(30)} = \frac{f(30,y)}{4/20}$$

5-1 دالة التوزيع: Distribution Function

دالة التوزيع تعرف بنفس الشكل كما في حالة متغير واحد ، أي دالة الإحتمال التجميعي :

$$F(x, y) = pr(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_1}^x \sum_{y_1}^y f(X, Y)$$

مثال 4:

نأخذ جدول المثال 3 السابق :

$$F(20, 4) = pr(X \leq 20, Y \leq 4) = \sum_{10}^{20} \sum_2^4 f(X, Y)$$

$$F(20, 4) = \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20}\right) + \left(\frac{3}{20} + \frac{6}{20}\right) = \frac{12}{20}$$

$$F(20, 6) = pr(X \leq 20, Y \leq 6) = \sum_{10}^{20} \sum_2^6 f(X, Y)$$

$$F(20, 6) = \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{3}{20} + \frac{6}{20} + \frac{3}{20}\right) = \frac{16}{20}$$

6-1 التوقع الشرطي: Conditional Expectation

-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu_x = \sum_{x_1}^{x_n} x \cdot f_x(x) \quad \text{للمتغير } X$$

$$E(y) = \mu_y = \sum_{y_1}^{y_m} y \cdot f_y(y) \quad \text{للمتغير } Y$$

-التباين:

$$V(X) = \sigma_x^2 = \sum_{x_1}^{x_n} x^2 \cdot f_x(x) - \mu_x^2 \quad \text{للمتغير } X$$

$$V(Y) = \sigma_y^2 = \sum_{y_1}^{y_m} y^2 \cdot f_y(y) - \mu_y^2 \quad \text{للمتغير } Y$$

-التوقع الرياضي الشرطي:

يعرف بنفس الصيغة لكن بإستخدام دالة الإحتمال الشرطي:

$$E(X/Y) = \sum_{x_1}^{x_n} x \cdot f(x/y) \quad \text{للمتغير } X \text{ (بشرط } y)$$

$$E(X/Y) = \sum_{x_1}^{x_n} x \cdot \frac{f(X,Y)}{f_y(y)} \quad \text{و يساوي:}$$

$$E(Y/X) = \sum_{y_1}^{y_m} y \cdot f(y/x) \quad \text{للمتغير } Y \text{ (بشرط } x)$$

$$E(Y/X) = \sum_{y_1}^{y_m} y \cdot \frac{f(X,Y)}{f_x(x)} \quad \text{و يساوي:}$$

-المتغيرات غير المستقلة:

إذا كان المتغيرين X, Y غير مستقلين، فإن توقع الجداء يكون:

$$E(X.Y) = E[X.E(Y/X)]$$

$$E(X.Y) = E[Y.E(X/Y)] \quad \text{و أيضا:}$$

(7-1) التباين المشترك ومعامل الارتباط:-التباين المشترك: Covariance

مما رأيناه سابقا يمكن أن نكتب:

$$\mu_x = E(X) = \sum x \cdot f_x(x) \quad \text{التوقع الرياضي لـ } X :$$

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X - E(X))^2 = \sum (x - \mu_x)^2 \cdot f_x(x) \quad \text{التباين:}$$

$$\mu_y = E(Y) = \sum y \cdot f_y(y) \quad \text{التوقع الرياضي لـ } Y :$$

$$\sigma_y^2 = V(Y) = E(Y - E(Y))^2 = \sum (y - \mu_y)^2 \cdot f_y(y) \quad \text{التباين:}$$

التباين المشترك للمتغيرين X, Y يعرف بالعلاقة:

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$Cov(X, Y) = \sum (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y)$$

أي أن التباين المشترك هو التوقع الرياضي لجداء الانحرافين عن المتوسط.

ويساوي أيضا: ³²

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$cov(X, Y) = \sum x \cdot y \cdot f(x, y) - \mu_x \mu_y$$

خواص:

$$cov(X, Y) = cov(Y, X) \quad (1) \text{ التباين المشترك:}$$

$$cov(X, X) = v(X) \quad (2) \text{ إذا كان المتغير نفسه } Y=X :$$

$$cov(X, a) = 0 \quad (3) \text{ إذا كان } a \text{ ثابت:}$$

$$cov(aX, bY) = a \cdot b \cdot cov(X, Y) \quad (4) \text{ إذا كان } a, b \text{ ثابتين:}$$

$$cov(X + Y, S) = cov(X, S) + cov(Y, S) \quad (5) \text{ لتكن: } X, Y, S \text{ متغيرات عشوائية،}$$

³² سيمور ليبشتز، الاحتمالات. مرجع سبق ذكره ص 109 .

المتغيرات المستقلة:

إذا كان X, Y متغيرين مستقلين فإن التباين المشترك يساوي:

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= 0 \\ cov(X, Y) &= E(XY) - E(X).E(Y) = \\ &= E(X).E(Y) - E(X).E(Y) = 0 \end{aligned}$$

المتغيرات غير المستقلة:

إذا كان X, Y متغيرين غير مستقلين التباين المشترك:

$$cov(X, Y) \neq 0$$

و التباين يساوي:

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= V(X) + V(Y) + 2.cov(X, Y) \\ V(X - Y) &= V(X) + V(Y) - 2.cov(X, Y) \end{aligned}$$

-معامل الارتباط: Coefficient of Correlation

معامل الارتباط بين متغيرين X, Y ويرمز له r_{xy} ، يعرف بالعلاقة: ³³

$$r_{xy} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

أي أنه نسبة التباين المشترك إلي جداء الانحرافين المعياريين للمتغيريين.

معامل الارتباط يعبر عن درجة الارتباط بين المتغيرين و إتجاه الارتباط موجب أم سالب (طردي، عكسي) ،

حيث قيم معامل الارتباط : $-1 \leq r \leq +1$

إرتباط سالب : $-1 \leq r < 0$

إرتباط موجب : $0 < r \leq +1$

إذا كان X, Y مستقلين فإن : $r = 0$

خواص:

إذا كان X, Y متغيرين غير مستقلين ، و a, b ثوابت:

$$1^\circ) r_{(x+a)(y+b)} = r_{xy}$$

$$2^\circ) r_{(x-a)(y-b)} = r_{xy}$$

$$3^\circ) r_{(ax)(by)} = r_{xy}$$

أي معامل الارتباط لا يتأثر بالثوابت (كسر).

³³ نفس المرجع، نفس الصفحة .

مثال 5:ليكن جدول التوزيع الإحتمالي للمتغيرين X, Y :

X / Y	1	2	Σ
1	2/12	4/12	6/12
2	1/12	4/12	5/12
3	1/12	0	1/12
Σ	4/12	8/12	1

التوزيع الإحتمالي للمتغير X :

X	$f_x(x)$	$x \cdot f_x(x)$	$x^2 \cdot f_x(x)$
1	6/12	6/12	6/12
2	5/12	10/12	20/12
3	1/12	3/12	9/12
	1	19/12	35/12

$$\mu_x = \frac{19}{12} = 1.5833 \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{35}{12} - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{59}{144} = 0.4097 \quad \text{التباين:}$$

التوزيع الإحتمالي للمتغير Y :

Y	$f_y(y)$	$y \cdot f_y(y)$	$y^2 \cdot f_y(y)$
1	4/12	4/12	4/12
2	8/12	16/12	32/12
	1	20/12	36/12

$$\mu_y = \frac{20}{12} = 1.6666 \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{36}{12} - \left(\frac{20}{12}\right)^2 = \frac{32}{144} = 0.2222 \quad \text{التباين:}$$

جدول التوزيع الإحصائي المشترك للجداء X.Y :

X.Y	f(x,y)	(x.y).f(x,y)
1	2/12	2/12
2	5/12	10/12
3	1/12	3/12
4	4/12	16/12
6	0	0
	1	31/12

$$E(XY) = \sum xy \cdot f(x, y) = \frac{31}{12} \quad \text{التوقع الرياضي للجداء:}$$

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \quad \text{التباين المشترك:}$$

$$= \sum x \cdot y \cdot f(x, y) - \mu_x \mu_y =$$

$$= \frac{31}{12} - \frac{19}{12} * \frac{20}{12} = \frac{-8}{144} = -0.0556$$

معامل الارتباط: r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{-0.0556}{\sqrt{0.4097} * \sqrt{0.2222}} = \frac{-0.0556}{0.30144} = -0.184$$

(2) حالة المتغيرات المستمرة:**(1-2) دالة كثافة الاحتمال المشترك لمتغيرين: Join Density Function**نسمي دالة كثافة الاحتمال لمتغيرتين مستمرتين X, Y ، أو دالة الكثافة المشتركة الدالة $f(X, Y)$

التي تحقق الشرطين:

$$f(x, y) \geq 0 \quad (1) \text{ دالة غير سالبة:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (2) \text{ كل الاحتمالات:}$$

إذا كان مجال التعريف $[-\infty, +\infty]$ ،و يمكن أن يكون مجال آخر: $[x_1, x_n]$ ، $[y_1, y_m]$.

2-2 دالة التوزيع لمتغيرين: Distribution Function

دالة التوزيع أو دالة الإحتمال التجميعي تعرف بالشكل:

$$F(x, y) = pr(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

أي التكامل المزدوج لدالة الكثافة المشتركة من أول قيمة لمجال التعريف لكل متغير إلى غاية ثنائية معينة (x, y) .

خواص:

1° دالة متزايدة على مجال معين؛

2° دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ؛

3° الإحتمال: $F(+\infty, +\infty) = 1$

4° الإحتمالات: $F(-\infty, +\infty) = F(+\infty, -\infty) = 0$

5° المشتقة الكلية: $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$

3-2 دالة كثافة الإحتمال الحدية: Marginal Density Function

دالة كثافة الإحتمال الحدية أو الإحتمال الهامشي للمتغير X ، هي تكامل دالة الكثافة المشتركة بالنسبة للمتغير الآخر Y :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_x(x) = \int_{y_1}^{y_m} f(x, y) dy, \quad y \in [y_1, y_m]$$

و بنفس الشكل دالة كثافة الإحتمال الحدية أو الإحتمال الهامشي للمتغير Y ، هي تكامل دالة الكثافة المشتركة بالنسبة للمتغير الآخر X :³⁴

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$f_y(y) = \int_{x_1}^{x_n} f(x, y) dx, \quad x \in [x_1, x_n]$$

³⁴ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. مرجع سبق ذكره، ص 39.

4-2) دالة التوزيع الحدية: Marginal Distribution Functionدالة التوزيع الحدية للمتغير X :

$$F_x(x) = pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx$$

أي تساوي تكامل دالة الكثافة الحدية للمتغير X .و بنفس الشكل دالة التوزيع الحدية للمتغير Y :

$$F_y(y) = pr(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$$

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^y f_y(y) dy$$

أي تساوي تكامل دالة الكثافة الحدية للمتغير Y .**5-2) دالة الإحتمال الشرطي: Conditional Probability Function**

دالة كثافة الإحتمال المشترك تكتب بالشكل:

$$f(x, y) = f_x(x) * f(y/x)$$

وكذلك:

$$f(x, y) = f_y(y) * f(x/y)$$

دالة الإحتمال الشرطي:للمتغير X (بشرط y):

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}$$

للمتغير Y (بشرط x):

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}$$

المتغيرات المستقلة:إذا كان X, Y متغيرين مستقلين:

$$f(x, y) = f_x(x) * f_y(y)$$

ذلك لأن:

$$f(x/y) = f_x(x) \quad , \quad f(y/x) = f_y(y)$$

6-2) التوقع الشرطي: Conditional Expectation**-التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x) dx \quad \text{للمتغير } X :$$

$$E(y) = \mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_y(y) dy \quad \text{للمتغير } Y :$$

-التباين:

$$V(X) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_x(x) dx - \mu_x^2 \quad \text{للمتغير } X :$$

$$V(Y) = \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_y(y) dy - \mu_y^2 \quad \text{للمتغير } Y :$$

-التوقع الشرطي:يعرف بنفس الصيغة لكن بإستخدام دالة الإحتمال الشرطي: ³⁵

$$E(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/y) dx \quad \text{للمتغير } X \text{ (بشرط } y \text{):}$$

$$E(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{f(x,y)}{f_x(x)} \cdot dx \quad \text{و يساوي:}$$

$$E(Y/X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y/x) dy \quad \text{للمتغير } Y \text{ (بشرط } x \text{):}$$

$$E(Y/X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{f(x,y)}{f_y(y)} \cdot dy \quad \text{و يساوي:}$$

-المتغيرات غير المستقلة:إذا كان المتغيرين X, Y غير مستقلين، فإن توقع الجداء يكون:

$$E(X.Y) = E[X.E(Y/X)]$$

$$E(X.Y) = E[Y.E(X/Y)] \quad \text{و أيضا:}$$

7-2) التباين المشترك و معامل الارتباط:**-التباين المشترك: Covariance**التباين المشترك بين المتغيرين X, Y يعرف بالعلاقة: ³⁶

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

³⁵ نفس المرجع، ص 61 .³⁶ Khaldi khaled, Probabilités. Op-cit P 99 .

حيث:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y) dy dx$$

المتغيرات المستقلة: إذا كان X, Y متغيرين مستقلين فإن التباين المشترك يساوي:

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

المتغيرات غير المستقلة: إذا كان X, Y متغيرين غير مستقلين التباين المشترك:

$$\text{cov}(X, Y) \neq 0$$

و التباين يساوي:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

-معامل الارتباط: coefficient of Correlationمعامل الارتباط بين متغيرين X, Y يعرف بالعلاقة:³⁷

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

حيث: قيم معامل الارتباط : $-1 \leq r \leq +1$ إرتباط سالب : $-1 \leq r < 0$ إرتباط موجب : $0 < r \leq +1$ إذا كان X, Y مستقلين فإن : $r = 0$ مثال 6:لتكن دالة الكثافة لمتغيرين X, Y :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & , 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \text{ other wise} \end{cases}$$

دالة الكثافة الحدية للمتغير X :

$$f_x(x) = \int_x^1 f(x, y) dy = \int_x^1 2 \cdot dy = [2y]_x^1$$

$$f_x(x) = 2 - 2x$$

حيث: $0 < x < 1$ ³⁷ Idem P 100 .

دالة الكثافة الحدية للمتغير Y :

$$f_y(y) = \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^y 2 \cdot dx = [2x]_0^y$$

$$f_y(y) = 2y$$

حيث: $0 < y < 1$

دالة الكثافة الشرطية:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$$

حيث: $0 < x < y$, $0 < y < 1$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{2}{2-2x} = \frac{1}{1-x}$$

حيث: $x < y < 1$, $0 < x < 1$ التوقع الشرطي $E(X/Y)$:

$$E(X/y) = \int_0^y x \cdot f(x/y) dx = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} \cdot x^2 \right]_0^y$$

$$E(X/Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{y} - 0 = \frac{y}{2}$$

حيث: $0 < y < 1$ التوقع الشرطي $E(Y/X)$:

$$E(Y/X) = \int_x^1 y \cdot f(y/x) dy = \int_x^1 y \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot dy = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot y^2 \right]_x^1$$

$$E(Y/X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{(1-x)} = \frac{1-x^2}{2(1-x)} = \frac{1+x}{2}$$

حيث: $0 < x < 1$ حساب الإحتمال: $\text{pr}(0 < x < 1/2)$

نستعمل دالة الكثافة الحدية:

$$\text{pr}\left(0 < x < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_x(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - 2x) dx$$

$$= [2x - x^2]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

حساب الإحتمال الشرطي $\text{pr}((0 < x < 1/2) | y = 3/4)$ ، بشرط $(y = 3/4)$:

نستعمل دالة الكثافة الشرطية:

$$\begin{aligned}
 pr\left(0 < x < \frac{1}{2} / y = \frac{3}{4}\right) &= \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(x/y = \frac{3}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3/4}\right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{3}\right) dx = \left[\frac{4}{3} \cdot x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{3} - 0 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

التوقع الرياضي: $E(X)$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^1 x \cdot f_x(x) dx = \int_0^1 x(2 - 2x) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx \\
 &= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

التوقع الرياضي: $E(Y)$

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_0^1 y \cdot f_y(y) dy = \int_0^1 y(2y) dy = \int_0^1 (2y^2) dy \\
 &= \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

توقع الجداء، $E(XY)$:

$$E(XY) = \int_0^1 \int_x^1 xy \cdot f(x, y) dy dx \quad \text{نحسب:}$$

$$x < y < 1, \quad 0 < x < 1 \quad \text{حيث:}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy \cdot f(x, y) dx dy \quad \text{وهي نفس النتيجة عندما نحسب:}$$

$$0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \quad \text{حيث:}$$

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \int_0^1 \int_0^y xy \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^y 2xy \cdot dx \cdot dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^y 2xy \cdot dx\right) dy = \int_0^1 [x^2 y]_0^y \cdot dy \\
 &= \int_0^1 (y^2 \cdot y - 0) \cdot dy = \int_0^1 (y^3) \cdot dy = \left[\frac{1}{4} \cdot y^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

التباين: $V(X)$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot f_x(x) dx = \int_0^1 x^2(2 - 2x) dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3) dx \\
 &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\
 V(X) &= E(x^2) - (\mu_x)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

التباين: $V(Y)$

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 \cdot f_y(y) dy = \int_0^1 y^2(2y) dy = \int_0^1 (2y^3) dy \\
 &= \left[\frac{2}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\
 V(Y) &= E(y^2) - (\mu_y)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

التباين المشترك: $\text{COV}(XY)$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

معامل الارتباط: r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1/36}{\sqrt{1/18} \sqrt{1/18}} = \frac{1/36}{1/18} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

تمارين الفصل الرابع:تمرين 1:

ليكن متغيرين X, Y . المتغير X يأخذ القيم : $X = 1, 1, 2, 2, 3$

المتغير Y يأخذ القيم : $Y = 1, 2, 3, 3, 3$

°1 أوجد جدول التوزيع الإحتمالي المشترك ،

°2 أحسب الإحتمالات الشرطية:

$$pr(X = 2/Y = 1) , pr(X = 2/Y = 3)$$

$$pr(Y = 3/X = 2) , pr(Y = 3/X = 3)$$

°3 أحسب الإحتمالات:

$$pr(X \leq 1, Y \leq 3) , pr(X \leq 2, Y \leq 2) , pr(X \leq 3, Y \leq 2)$$

°4 أحسب:

$$E(X) , V(X) , E(Y) , V(Y) , Cov(XY)$$

تمرين 2:

ليكن جدول التوزيع الإحتمالي للمتغيرين X, Y :

X / Y	1	2	Σ
10	2/10	2/10	$P_{1\cdot}$
20	1/10	4/10	$P_{2\cdot}$
30	1/10	0	$P_{3\cdot}$
Σ	$P_{\cdot 1}$	$P_{\cdot 2}$	1

°1 أوجد التوزيع الإحتمالي الحدي للمتغير X ، أحسب $E(X) , V(X)$.

°2 أوجد التوزيع الإحتمالي الحدي للمتغير Y ، أحسب $E(Y) , V(Y)$.

°3 أحسب $\Gamma_{xy} , cov(X, Y)$.

°4 أحسب الإحتمالات الشرطية:

$$pr(X = 20/Y = 2) =$$

$$pr(Y = 2/X = 30) =$$

تمرين 3:

لتكن دالة الكثافة الإحصائية لمتغيرين X, Y :

$$f(x, y) = \begin{cases} k(8 - x - y) & , 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & , \text{ailleurs} \end{cases}$$

1°) أوجد الثابت k ،

2°) أوجد دوال كثافة الإحصائية الحدية: $f_x(x)$ ، $f_y(y)$

3°) أوجد دوال كثافة الإحصائية الشرطية: $f(x/y)$ ، $f(y/x)$

4°) أحسب الإحصائيات: $pr(x \leq 3) =$

$$pr(x < 3/y < 2) =$$

تمرين 4:

لتكن دالة الكثافة الإحصائية لمتغيرين X, Y :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{39}(6 + x - y) & , 0 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{ailleurs} \end{cases}$$

1°) أوجد دالة الكثافة الحدية للمتغير X ، أحسب $E(X)$ ، $V(X)$.

2°) أوجد دالة الكثافة الحدية للمتغير Y ، أحسب $E(Y)$ ، $V(Y)$.

3°) أحسب Γ_{xy} ، $cov(X, Y)$.

حل التمرين 1:

1°) جدول التوزيع الإحصائي المشترك للمتغيرين:

X / Y	1	2	3	Σ
1	$2/25$	$2/25$	$6/25$	$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$
2	$2/25$	$2/25$	$6/25$	$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$
3	$1/25$	$1/25$	$3/25$	$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
Σ	$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$	$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$	1

°2) حساب الإحتمالات الشرطية:

x بشرط y :

$$pr(X = x_i / Y = y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

$$pr(X = 2 / Y = 1) = \frac{f(2, 1)}{pr(Y = 1)} = \frac{2/25}{5/25} = \frac{2}{5}$$

$$pr(X = 2 / Y = 3) = \frac{f(2, 3)}{pr(Y = 3)} = \frac{6/25}{15/25} = \frac{2}{5}$$

y بشرط x :

$$pr(Y = y_j / X = x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

$$pr(Y = 3 / X = 2) = \frac{f(2, 3)}{pr(X = 2)} = \frac{6/25}{10/25} = \frac{3}{5}$$

$$pr(Y = 3 / X = 3) = \frac{f(3, 3)}{pr(X = 3)} = \frac{3/25}{5/25} = \frac{3}{5}$$

نلاحظ أن المتغيرين مستقلين:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)} = f_x(x) \quad , \quad f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)} = f_y(y)$$

°3) حساب الإحتمالات: دالة التوزيع، أي دالة الإحتمال التجميعي :

$$F(x, y) = pr(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x=1}^x \sum_{y=1}^y f(X, Y)$$

$$F(1, 3) = pr(X \leq 1, Y \leq 3) = \sum_1^1 \sum_1^3 f(X, Y)$$

$$F(1, 3) = \left(\frac{2}{25} + \frac{2}{25} + \frac{6}{25}\right) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$F(2, 2) = pr(X \leq 2, Y \leq 2) = \sum_1^2 \sum_1^2 f(X, Y)$$

$$F(2, 2) = \left(\frac{2}{25} + \frac{2}{25}\right) + \left(\frac{2}{25} + \frac{2}{25}\right) = \frac{8}{25}$$

$$F(3, 2) = pr(X \leq 3, Y \leq 2) = \sum_1^3 \sum_1^2 f(X, Y)$$

$$F(3, 2) = \left(\frac{2}{25} + \frac{2}{25}\right) + \left(\frac{2}{25} + \frac{2}{25}\right) + \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{25}\right) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

°4) حساب:

$$E(X) , V(X) , E(Y) , V(Y) , Cov(XY)$$

التوزيع الإحتمالي الحدي للمتغير X :

X	$f_x(x)$	$x \cdot f_x(x)$	$x^2 \cdot f_x(x)$
1	2/5	2/5	2/5
2	2/5	4/5	8/5
3	1/5	3/5	9/5
	1	9/5	19/5

التوقع الرياضي: $\mu_x = \frac{9}{5} = 1.8$

التباين: $\sigma_x^2 = \frac{19}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{14}{25} = 0.56$

التوزيع الإحتمالي الحدي للمتغير Y :

Y	$f_y(y)$	$y \cdot f_y(y)$	$y^2 \cdot f_y(y)$
1	1/5	1/5	1/5
2	1/5	2/5	4/5
3	3/5	9/5	27/5
	1	12/5	32/5

التوقع الرياضي: $\mu_y = \frac{12}{5} = 2.4$

التباين: $\sigma_y^2 = \frac{32}{5} - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0.64$

التوزيع الإحتمالي المشترك للجداء X.Y :

X.Y	$f(x,y)$	$(x.y).f(x,y)$
1	2/25	2/25
2	4/25	8/25
3	7/25	21/25
4	2/25	8/25
6	7/25	42/25
9	3/25	27/25
	1	108/25

$$E(XY) = \sum xy \cdot f(x, y) = \frac{108}{25} = 4.32$$

التوقع الرياضي للجداء:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) =$$

التباين المشترك:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum x \cdot y \cdot f(x, y) - \mu_x \mu_y = \frac{108}{25} - \frac{9}{5} * \frac{12}{5} = 0$$

المتغيرين مستقلين.

حل التمرين 2:

حساب الإحتمالات الحدية:

$$f_x(x) = \sum_y f(x, y) = p_{i \cdot}$$

$$f_y(y) = \sum_x f(x, y) = p_{\cdot j}$$

X / Y	1	2	Σ
10	2/10	2/10	4/10
20	1/10	4/10	5/10
30	1/10	0	1/10
Σ	4/10	6/10	1

1°) التوزيع الإحتمالي الحدي للمتغير X :

X	$f_x(x)$	$x \cdot f_x(x)$	$x^2 \cdot f_x(x)$
10	4/10	40/10	400/10
20	5/10	100/10	2000/10
30	1/10	30/10	900/10
	1	170/10	3300/10

$$\mu_x = \frac{170}{10} = 17 \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

$$\sigma_x^2 = 330 - (17)^2 = 41 \quad \text{التباين:}$$

°2) التوزيع الإحتمالي الحدي للمتغير Y :

Y	$f_y(y)$	$y \cdot f_y(y)$	$y^2 \cdot f_y(y)$
1	4/10	4/10	4/10
2	6/10	12/10	24/10
	1	16/10	28/10

التوقع الرياضي: $\mu_y = \frac{16}{10} = 1.6$

التباين: $\sigma_y^2 = 2.8 - (1.6)^2 = 2.8 - 2.56 = 0.24$

°3) حساب التباين المشترك و معامل الارتباط:

جدول التوزيع الإحتمالي المشترك للجداء X.Y :

X.Y	$f(x,y)$	$(x,y) \cdot f(x,y)$
10	2/10	20/10
20	3/10	60/10
30	1/10	30/10
40	4/10	160/10
60	0	0
	1	270/10

التوقع الرياضي للجداء: $E(XY) = \sum xy \cdot f(x,y) = \frac{270}{10} = 27$

التباين المشترك: $cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) =$

$$cov(X,Y) = \sum x \cdot y \cdot f(x,y) - \mu_x \mu_y =$$

$$= 27 - 17 * 1.6 = 27 - 27.2 = -0.2$$

معامل الارتباط: r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{-0.2}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{0.24}} = \frac{-0.2}{3.136877} = -0.06375$$

نلاحظ أنه يوجد ارتباط سالب ضعيف.

°4) حساب الاحتمالات الشرطية:

$$\begin{aligned}
 pr(X = x_i / Y = y_j) &= \frac{f(x_i, y_j)}{pr(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \\
 pr(X = 20 / Y = 2) &= \frac{f(20, 2)}{pr(Y = 2)} = \frac{4/10}{6/10} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\
 pr(Y = y_j / X = x_i) &= \frac{f(x_i, y_j)}{pr(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \\
 pr(Y = 2 / X = 30) &= \frac{f(30, 2)}{pr(X = 30)} = \frac{0}{1/10} = 0
 \end{aligned}$$

نلاحظ أن: $f(x/y) \neq f_x(x)$

$$f(y/x) \neq f_y(y)$$

المتغيرين غير مستقلين.

حل التمرين 3:

دالة الكثافة للمتغيرين X, Y :

$$f(x, y) = \begin{cases} k(8 - x - y), & 0 \leq x \leq 4 \\ & 1 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{ماعدانك} \end{cases}$$

1° إيجاد الثابت k :

$$\begin{cases} f(x, y) \geq 0 \\ \int_x \int_y f(x, y) dx dy = 1 \end{cases} \quad \text{الشرطين:}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \int_1^3 f(x, y) dx dy &= \int_0^4 \int_1^3 k(8 - x - y) dx dy = \\
 &= k \int_0^4 \left(\int_1^3 (8 - x - y) dy \right) dx = k \int_0^4 \left[8y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^3 dx = \\
 &= k \int_0^4 (12 - 2x) dx = k[12x - x^2]_0^4 = k(48 - 16) = \\
 \Rightarrow 32k &= 1 \Rightarrow k = \frac{1}{32}
 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{32} (8 - x - y) \quad \text{إذن الدالة:}$$

$$0 \leq x \leq 4, \quad 1 \leq y \leq 3 \quad \text{حيث:}$$

2° دوال الكثافة الحدية:

دالة الكثافة الحدية للمتغير X :

$$\begin{aligned}
 f_x(x) &= \int_y f(x, y) dy = \int_1^3 \frac{1}{32} (8 - x - y) dy = \frac{1}{32} \left[8y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_1^3 \\
 f_x(x) &= \frac{1}{32} (12 - 2x)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq 4 \quad \text{حيث:}$$

دالة الكثافة الحدية للمتغير Y :

$$f_y(y) = \int_x f(x, y) dx = \int_0^4 \frac{1}{32} (8 - x - y) dx = \frac{1}{32} [8x - \frac{1}{2}x^2 - xy]_0^4$$

$$f_y(y) = \frac{1}{32} (24 - 4y)$$

حيث: $1 \leq y \leq 3$

3(دوال الكثافة الشرطية:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{(8-x-y)/32}{(24-4y)/32} = \frac{8-x-y}{24-4y}$$

حيث: $0 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 3$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{(8-x-y)/32}{(12-2x)/32} = \frac{8-x-y}{12-2x}$$

حيث: $1 \leq y \leq 3$, $0 \leq x \leq 4$

4(حساب الاحتمالات:

حساب الاحتمال: $\text{pr}(x \leq 3)$:

نستعمل دالة الكثافة الحدية:

$$\text{pr}(0 \leq x \leq 3) = \int_0^3 f_x(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{32} (12 - 2x) dx$$

$$= \frac{1}{32} [12x - x^2]_0^3 = \frac{1}{32} (36 - 9) - 0 = \frac{27}{32}$$

حساب الاحتمال الشرطي $\text{pr}((x < 3)/y < 2)$:

نستعمل دالة الكثافة الشرطية:

$$\text{pr}((x < 3)/y < 2) = \frac{\text{pr}(x < 3, y < 2)}{\text{pr}(y < 2)} = \int_0^3 \int_1^2 f(x/y < 2) dy dx =$$

$$= \int_0^3 \int_1^2 \left(\frac{8-x-y}{24-4y} \right) dy dx = \frac{\int_0^3 \int_1^2 (8-x-y) dy dx}{\int_1^2 (24-4y) dy}$$

نحسب التكامل:

$$\int_0^3 \int_1^2 (8 - x - y) dy dx = \int_0^3 \left([8y - xy - \frac{1}{2}y^2]_1^2 \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{13}{2} - x \right) dx =$$

$$= \left[\frac{13}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{39}{2} - \frac{9}{2} - 0 = \frac{30}{2}$$

ثم التكامل:

$$\int_1^2 (24 - 4y) dy = [24y - 2y^2]_1^2 = 48 - 8 - 24 + 2 = 18$$

$$\Rightarrow pr((x < 3)/y < 2) = \frac{30/2}{18} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

حل التمرين 4:دالة الكثافة الإحصائية للمتغيرين X, Y :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{39}(6 + x - y) & , 0 \leq x \leq 3 \\ & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{ ماعدا ذلك} \end{cases}$$

1° دالة الكثافة الحدية للمتغير X :

$$f_x(x) = \int_y f(x, y) dy = \int_0^2 \frac{1}{39}(6 + x - y) dy = \frac{1}{39} [6y + xy - \frac{1}{2}y^2]_0^2$$

$$f_x(x) = \frac{1}{39}(10 + 2x)$$

حيث: $0 \leq x \leq 3$ _حساب التوقع الرياضي: $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^3 x \cdot f_x(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{39} x(10 + 2x) dx = \frac{1}{39} \int_0^3 (10x + 2x^2) dx \\ &= \frac{1}{39} \left[5x^2 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^3 = \frac{63}{39} = 1.6153846 \end{aligned}$$

_حساب التباين: $V(X)$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^3 x^2 \cdot f_x(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{39} x^2(10 + 2x) dx = \frac{1}{39} \int_0^3 (10x^2 + 2x^3) dx \\ &= \frac{1}{39} \left[\frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{4}x^4 \right]_0^3 = \frac{261}{78} = 3.346 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(x^2) - (\mu_x)^2 = \frac{261}{78} - \left(\frac{63}{39}\right)^2 = \frac{2241}{3042} = 0.73668639$$

2° دالة الكثافة الحدية للمتغير Y :

$$f_y(y) = \int_x f(x, y) dx = \int_0^3 \frac{1}{39}(6 + x - y) dx = \frac{1}{39} \left[6x + \frac{1}{2}x^2 - xy \right]_0^3$$

$$f_y(y) = \frac{1}{39} \left(\frac{45}{2} - 3y \right)$$

حيث: $0 \leq y \leq 2$ _حساب التوقع الرياضي: $E(Y)$

$$E(Y) = \int_0^2 y \cdot f_y(y) dy = \int_0^2 \frac{1}{39} y \left(\frac{45}{2} - 3y \right) dy = \frac{1}{39} \int_0^2 \left(\frac{45}{2} y - 3y^2 \right) dy$$

$$= \frac{1}{39} \left[\frac{45}{4} y^2 - y^3 \right]_0^2 = \frac{37}{39} = 0.94871794$$

_حساب التباين: $V(Y)$

$$E(Y^2) = \int_0^2 y^2 \cdot f_y(y) dy = \int_0^2 \frac{1}{39} y^2 \left(\frac{45}{2} - 3y \right) dy =$$

$$= \frac{1}{39} \int_0^2 \left(\frac{45}{2} y^2 - 3y^3 \right) dy = \frac{1}{39} \left[\frac{45}{6} y^3 - \frac{3}{4} y^4 \right]_0^2 = \frac{96}{78} = \frac{48}{39} = 1.2307692$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (\mu_y)^2 = \frac{48}{39} - \left(\frac{37}{39} \right)^2 = \frac{503}{1521} = 0.33070348$$

3° حساب التباين المشترك ومعامل الارتباط: Γ_{xy} , $\text{cov}(X, Y)$

_توقع الجداء: $E(XY)$

$$E(XY) = \int_0^3 \int_0^2 xy \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^3 \int_0^2 xy \cdot \frac{1}{39} (6 + x - y) \cdot dx \cdot dy =$$

$$= \frac{1}{39} \int_0^3 \int_0^2 (6xy + x^2y - xy^2) dx dy =$$

$$= \frac{1}{39} \int_0^3 \left(\int_0^2 (6xy + x^2y - xy^2) dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{39} \int_0^3 \left(\left[3xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{3} xy^3 \right]_0^2 \right) dx = \frac{1}{39} \int_0^3 \left(12x + 2x^2 - \frac{8}{3} x \right) dx$$

$$= \frac{1}{39} \left[6x^2 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{4}{3} x^2 \right]_0^3 = \frac{1}{39} \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{14}{3} x^2 \right]_0^3 = \frac{1}{39} \left(\frac{180}{3} \right) = \frac{60}{39}$$

_التباين المشترك: $\text{COV}(XY)$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{60}{39} - \frac{63}{39} * \frac{37}{39} = \frac{9}{1521} = 0.005917159$$

معامل الارتباط: Γ{xy}

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{9}{1521}}{\sqrt{\frac{1120.5}{1521} * \frac{503}{1521}}} = \frac{\frac{9}{1521}}{\sqrt{\frac{1120.5 * 503}{1521}}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{1120.5 * 503}} = 0.0119881615$$

نلاحظ أنه إرتباط موجب لكن ضعيف .

قائمة المراجع:

باللغة العربية:

- 1_ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. عمادة شؤون المكتبات، مطابع جامعة الملك سعود، الرياض 1991.
- 2_ عبد الحفيظ مصطفى، نظرية الاحتمالات مبادئ و تطبيقات، الجزء الأول والجزء الثاني. الطبعة الثالثة ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 2008.
- 3_ جورج كانافوس و دون ميلر، الإحصاء للتجاربيين مدخل حديث. ترجمة سلطان محمد عبد الحميد. دار المريخ، الرياض 2004.
- 4_ سيمور ليبشستر، الاحتمالات سلسلة ملخصات شوم. ترجمة سامح داود. الطبعة الخامسة الدار الدولية، القاهرة 2004 .
- 5_ موراى ر شبيغل، الإحصاء سلسلة ملخصات شوم. ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان. الطبعة السابعة الدار الدولية، القاهرة 2004.

باللغات الأجنبية:

- 1_ Bernard Goldfarb & Cathrine Pardoux. Introduction à la méthode statistique, gestion-économie. 3^o édition DUNOD paris 2000.
- 2_ David R-Anderson, Dennis J-Sweeney, Thomas A-Williams. Essentials of Statistics for Business and Economics. 2nd edition, South-Western college publishing Cincinnati 2000.
- 3_ François Aubin & René Signoret. L'essentiel des probabilités et statistiques. Editions ellipses paris 2001.
- 4_ Khaldi Khaled. Probabilités, rappels de cours et exercices corrigés. Troisième édition, OPU alger 1999.
- 5_ Philippe Tassi, Méthodes statistiques. 2^e édition ECONOMICA, paris 1992 .
- 6_ Roger C-Pfaffenberger & James H-Patterson. Statistical Methods, for Business and Economics. IRWIN, inc Homewood Illinois 1977.
- 7_ Walder Masiéri. Statistique et calcul des probabilités. Editions Dalloz paris 2001.

الملاحق:

الجداول الإحصائية:

_جدول التوزيع الطبيعي المعياري Z

_جدول توزيع كاي تربيع χ^2

_جدول توزيع ستودنت t

_جدول توزيع فيشر F

V. Lois usuelles de probabilités

Table 3 : Valeur de la fonction de répartition de la distribution normale réduite

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Remarques : $F(-z) = 1 - F(z)$, $P(a \leq Z \leq b) = F(b) - F(a)$ ($a \leq b$).
 Pour $z > 4$, la précision de la table ne permet plus de connaître la valeur exacte de $F(z)$ Exemples :
 $F(4) = 0.9999683$; $F(4,5) = 0.9999966$; $F(5) = 0.999999713$, qui est donc arrondi à 1.

V. Lois usuelles de probabilités

Table 5 : Quantiles $\chi^2_{\nu, p}$ de la variable χ^2_{ν}

$$P(\chi^2_{\nu} \leq \chi^2_{\nu, p}) = p$$

ν	p											
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.075	0.10	0.90	0.925	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	2.71	3.17	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.16	0.21	4.61	5.18	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.47	0.58	6.25	6.90	7.81	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	0.90	1.06	7.78	8.50	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.39	1.61	9.24	10.01	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	1.94	2.20	10.65	11.47	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.53	2.83	12.02	12.88	14.07	16.01	18.48	20.25
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.14	3.49	13.36	14.27	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	3.78	4.17	14.68	15.63	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.45	4.87	15.99	16.97	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.12	5.58	17.28	18.29	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	5.82	6.30	18.55	19.60	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	6.52	7.04	19.81	20.90	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.24	7.79	21.06	22.18	23.69	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	7.97	8.55	22.31	23.45	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	8.71	9.31	23.54	24.72	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	9.45	10.09	24.77	25.97	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.21	10.87	25.99	27.22	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	10.97	11.65	27.20	28.46	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	11.73	12.44	28.41	29.69	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	12.50	13.24	29.62	30.92	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	13.28	14.04	30.81	32.14	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.07	14.85	32.01	33.36	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	14.85	15.66	33.20	34.57	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	15.65	16.47	34.38	35.78	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	16.44	17.29	35.56	36.98	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	17.24	18.11	36.74	38.18	40.11	43.20	46.96	49.65
28	12.46	13.67	15.31	16.93	18.05	18.94	37.92	39.38	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	18.85	19.77	39.09	40.57	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	19.66	20.60	40.26	41.76	43.77	46.98	50.89	53.67
31	14.46	15.66	17.54	19.28	20.48	21.43	41.42	42.95	44.99	48.23	52.19	55.00
32	15.13	16.36	18.29	20.07	21.30	22.27	42.59	44.13	46.19	49.48	53.49	56.33
33	15.82	17.07	19.05	20.87	22.12	23.11	43.75	45.31	47.40	50.73	54.78	57.65
34	16.50	17.79	19.81	21.66	22.94	23.95	44.90	46.49	48.60	51.97	56.06	58.96
35	17.19	18.51	20.57	22.47	23.76	24.80	46.06	47.66	49.80	53.20	57.34	60.25
36	17.89	19.23	21.34	23.27	24.59	25.64	47.21	48.84	51.00	54.44	58.62	61.55
37	18.59	19.96	22.11	24.08	25.42	26.49	48.36	50.01	52.19	55.67	59.89	62.88
38	19.29	20.69	22.88	24.88	26.25	27.34	49.51	51.17	53.38	56.90	61.16	64.18
39	20.00	21.43	23.65	25.70	27.09	28.20	50.66	52.34	54.57	58.12	62.43	65.48
40	20.71	22.16	24.43	26.51	27.93	29.05	51.81	53.50	55.76	59.34	63.69	66.77
41	21.42	22.91	25.22	27.33	28.77	29.91	52.95	54.66	56.94	60.56	64.95	68.05
42	22.14	23.65	26.00	28.14	29.61	30.77	54.09	55.82	58.12	61.78	66.21	69.34
43	22.86	24.40	26.79	28.97	30.45	31.63	55.23	56.98	59.30	62.99	67.46	70.62
44	23.58	25.15	27.58	29.79	31.29	32.49	56.37	58.13	60.48	64.20	68.71	71.89
45	24.31	25.90	28.37	30.61	32.14	33.35	57.51	59.29	61.66	65.41	69.96	73.17
46	25.04	26.66	29.16	31.44	32.99	34.22	58.64	60.44	62.83	66.62	71.20	74.44
47	25.78	27.42	29.96	32.27	33.84	35.08	59.77	61.59	64.00	67.82	72.44	75.70
48	26.51	28.18	30.76	33.10	34.69	35.95	60.91	62.74	65.17	69.02	73.68	76.97
49	27.25	28.94	31.56	33.93	35.54	36.82	62.04	63.89	66.34	70.22	74.92	78.23

Table 5 (suite) : Quantiles $\chi^2_{u,p}$ de la variable χ^2_u

ν	p											
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.075	0.10	0.90	0.925	0.95	0.975	0.99	0.995
50	27.99	29.71	32.36	34.76	36.40	37.69	63.17	65.03	67.51	71.42	76.15	79.49
51	28.74	30.48	33.16	35.60	37.25	38.56	64.30	66.17	68.67	72.62	77.39	80.75
52	29.48	31.25	33.97	36.44	38.11	39.43	65.42	67.32	69.83	73.81	78.62	82.00
53	30.23	32.02	34.78	37.28	38.97	40.31	66.55	68.46	70.99	75.00	79.84	83.25
54	30.98	32.79	35.59	38.12	39.83	41.18	67.67	69.60	72.15	76.19	81.07	84.50
55	31.74	33.57	36.40	38.96	40.69	42.06	68.80	70.74	73.31	77.38	82.29	85.75
56	32.49	34.35	37.21	39.80	41.55	42.94	69.92	71.87	74.47	78.57	83.51	86.99
57	33.25	35.13	38.03	40.65	42.42	43.82	71.04	73.01	75.62	79.75	84.73	88.24
58	34.01	35.91	38.84	41.49	43.28	44.70	72.16	74.15	76.78	80.94	85.95	89.48
59	34.77	36.70	39.66	42.34	44.15	45.58	73.28	75.28	77.93	82.12	87.17	90.72
60	35.53	37.49	40.48	43.19	45.02	46.46	74.40	76.41	79.08	83.30	88.38	91.95
61	36.30	38.27	41.30	44.04	45.89	47.34	75.51	77.54	80.23	84.48	89.59	93.19
62	37.07	39.06	42.13	44.89	46.76	48.23	76.63	78.67	81.38	85.65	90.80	94.42
63	37.84	39.86	42.95	45.74	47.63	49.11	77.75	79.80	82.53	86.83	92.01	95.65
64	38.61	40.65	43.78	46.60	48.50	50.00	78.86	80.93	83.68	88.00	93.22	96.88
65	39.38	41.44	44.60	47.45	49.37	50.88	79.97	82.06	84.82	89.18	94.42	98.11
66	40.16	42.24	45.43	48.31	50.24	51.77	81.09	83.18	85.97	90.35	95.63	99.33
67	40.94	43.04	46.26	49.16	51.12	52.66	82.20	84.31	87.11	91.52	96.83	100.55
68	41.71	43.84	47.09	50.02	51.99	53.55	83.31	85.43	88.25	92.69	98.03	101.78
69	42.49	44.64	47.92	50.88	52.87	54.44	84.42	86.56	89.39	93.86	99.23	103.00
70	43.28	45.44	48.76	51.74	53.75	55.33	85.53	87.68	90.53	95.02	100.43	104.21
71	44.06	46.25	49.59	52.60	54.63	56.22	86.64	88.80	91.67	96.19	101.62	105.43
72	44.84	47.05	50.43	53.46	55.51	57.11	87.74	89.92	92.81	97.35	102.82	106.65
73	45.63	47.86	51.27	54.33	56.39	58.01	88.85	91.04	93.95	98.52	104.01	107.86
74	46.42	48.67	52.10	55.19	57.27	58.90	89.96	92.16	95.08	99.68	105.20	109.07
75	47.21	49.48	52.94	56.05	58.15	59.80	91.06	93.28	96.22	100.84	106.39	110.29
76	48.00	50.29	53.78	56.92	59.03	60.69	92.17	94.40	97.35	102.00	107.58	111.50
77	48.79	51.10	54.62	57.79	59.91	61.59	93.27	95.52	98.48	103.16	108.77	112.70
78	49.58	51.91	55.47	58.65	60.80	62.48	94.37	96.63	99.62	104.32	109.96	113.91
79	50.38	52.73	56.31	59.52	61.68	63.38	95.48	97.75	100.75	105.47	111.14	115.12
80	51.17	53.54	57.15	60.39	62.57	64.28	96.58	98.86	101.88	106.63	112.33	116.32
81	51.97	54.36	58.00	61.26	63.45	65.18	97.68	99.97	103.01	107.78	113.51	117.52
82	52.77	55.17	58.85	62.13	64.34	66.08	98.78	101.09	104.14	108.94	114.69	118.73
83	53.57	55.99	59.69	63.00	65.23	66.98	99.88	102.20	105.27	110.09	115.88	119.93
84	54.37	56.81	60.54	63.88	66.12	67.88	100.98	103.31	106.39	111.24	117.06	121.13
85	55.17	57.63	61.39	64.75	67.01	68.78	102.08	104.42	107.52	112.39	118.24	122.32
86	55.97	58.46	62.24	65.62	67.90	69.68	103.18	105.53	108.65	113.54	119.41	123.52
87	56.78	59.28	63.09	66.50	68.79	70.58	104.28	106.64	109.77	114.69	120.59	124.72
88	57.58	60.10	63.94	67.37	69.63	71.48	105.37	107.75	110.90	115.84	121.77	125.91
89	58.39	60.93	64.79	68.25	70.57	72.39	106.47	108.86	112.02	116.99	122.94	127.11
90	59.20	61.75	65.65	69.13	71.46	73.29	107.57	109.97	113.15	118.14	124.12	128.30
91	60.01	62.58	66.50	70.00	72.35	74.20	108.66	111.08	114.27	119.28	125.29	129.49
92	60.82	63.41	67.36	70.88	73.25	75.10	109.76	112.18	115.39	120.43	126.46	130.68
93	61.63	64.24	68.21	71.76	74.14	76.01	110.85	113.29	116.51	121.57	127.63	131.87
94	62.44	65.07	69.07	72.64	75.03	76.91	111.94	114.39	117.63	122.72	128.80	133.06
95	63.25	65.90	69.93	73.52	75.93	77.82	113.04	115.50	118.75	123.86	129.97	134.25
96	64.06	66.73	70.78	74.40	76.82	78.73	114.13	116.60	119.87	125.00	131.14	135.43
97	64.88	67.56	71.64	75.28	77.72	79.63	115.22	117.71	120.99	126.14	132.31	136.62
98	65.69	68.40	72.50	76.16	78.62	80.54	116.32	118.81	122.11	127.28	133.48	137.80
99	66.51	69.23	73.36	77.05	79.51	81.45	117.41	119.91	123.23	128.42	134.64	138.99
100	67.33	70.07	74.22	77.93	80.41	82.36	118.50	121.02	124.34	129.56	135.81	140.17

V. Lois usuelles de probabilités

Table 6 : Quantiles $t_{\nu,p}$ de la variable t_ν

$$F(t_{\nu,p}) = P(t_\nu \leq t_{\nu,p}) = p$$

ν	p													
	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	
1	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62	
2	0.289	0.445	0.617	0.817	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599	
3	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924	
4	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610	
5	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869	
6	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959	
7	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.500	4.785	5.408	
8	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355	4.501	5.041	
9	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781	
10	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.813	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587	
11	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437	
12	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318	
13	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.080	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221	
14	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.625	2.977	3.787	4.141	
15	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.603	2.947	3.733	4.073	
16	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.584	2.921	3.686	4.015	
17	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965	
18	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.611	3.922	
19	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.326	1.729	2.093	2.540	2.861	3.579	3.883	
20	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850	
21	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819	
22	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792	
23	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.320	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768	
24	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745	
25	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725	
26	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707	
27	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690	
28	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674	
29	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659	
30	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646	
31	0.256	0.389	0.530	0.682	0.853	1.054	1.310	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.634	
32	0.255	0.389	0.530	0.682	0.853	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.739	3.365	3.622	
33	0.255	0.389	0.530	0.682	0.853	1.053	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611	
34	0.255	0.389	0.529	0.682	0.852	1.053	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601	
35	0.255	0.389	0.529	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591	
36	0.255	0.388	0.529	0.681	0.852	1.052	1.306	1.688	2.028	2.435	2.720	3.333	3.582	
37	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.051	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574	
38	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.051	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566	
39	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558	
40	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.705	3.307	3.551	
41	0.255	0.388	0.529	0.681	0.850	1.050	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544	
42	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.049	1.302	1.682	2.018	2.419	2.698	3.296	3.538	
43	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.049	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532	
44	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.049	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526	
45	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.049	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.282	3.520	
46	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.048	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515	
47	0.255	0.388	0.528	0.680	0.849	1.048	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510	
48	0.255	0.388	0.528	0.680	0.849	1.048	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505	
49	0.255	0.388	0.526	0.680	0.849	1.048	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265	3.500	

Table 6 (suite) : Quantiles $t_{v,p}$ de la variable t_v

v	p												
	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
50	0.255	0.368	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
51	0.255	0.368	0.528	0.679	0.849	1.047	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258	3.492
52	0.255	0.367	0.528	0.679	0.849	1.047	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255	3.488
53	0.255	0.367	0.528	0.679	0.848	1.047	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251	3.484
54	0.255	0.367	0.528	0.679	0.848	1.047	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248	3.480
55	0.255	0.367	0.527	0.679	0.848	1.046	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476
56	0.255	0.367	0.527	0.679	0.848	1.046	1.297	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242	3.473
57	0.255	0.367	0.527	0.679	0.848	1.046	1.297	1.672	2.003	2.394	2.665	3.240	3.470
58	0.255	0.367	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237	3.466
59	0.254	0.367	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234	3.463
60	0.254	0.367	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
61	0.254	0.367	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229	3.457
62	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.670	1.999	2.388	2.658	3.227	3.455
63	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225	3.452
64	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223	3.449
65	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220	3.447
66	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218	3.444
67	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.045	1.294	1.668	1.996	2.383	2.651	3.216	3.442
68	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.668	1.996	2.382	2.650	3.215	3.439
69	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213	3.437
70	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
71	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209	3.433
72	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.044	1.293	1.666	1.994	2.379	2.646	3.207	3.431
73	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.044	1.293	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206	3.429
74	0.254	0.367	0.527	0.678	0.847	1.044	1.293	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204	3.427
75	0.254	0.367	0.527	0.678	0.846	1.044	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643	3.203	3.425
76	0.254	0.367	0.527	0.678	0.846	1.044	1.293	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201	3.423
77	0.254	0.367	0.527	0.678	0.846	1.044	1.293	1.665	1.991	2.376	2.641	3.200	3.421
78	0.254	0.367	0.527	0.678	0.846	1.043	1.293	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198	3.420
79	0.254	0.367	0.527	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.991	2.375	2.640	3.197	3.418
80	0.254	0.367	0.527	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
81	0.254	0.367	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194	3.415
82	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193	3.413
83	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191	3.412
84	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190	3.410
85	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189	3.409
86	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.663	1.988	2.371	2.634	3.188	3.407
87	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.043	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187	3.406
88	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.043	1.291	1.662	1.987	2.370	2.633	3.185	3.405
89	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.043	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184	3.403
90	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.183	3.402
91	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182	3.401
92	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181	3.399
93	0.254	0.367	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180	3.398
94	0.254	0.367	0.526	0.677	0.845	1.042	1.291	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179	3.397
95	0.254	0.366	0.526	0.677	0.845	1.042	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178	3.396
96	0.254	0.366	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177	3.395
97	0.254	0.366	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.661	1.985	2.365	2.628	3.176	3.394
98	0.254	0.366	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176	3.393
99	0.254	0.366	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175	3.392
100	0.254	0.366	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.391
200	0.254	0.366	0.525	0.676	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.132	3.340
500	0.253	0.366	0.525	0.675	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107	3.310
∞	0.253	0.365	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

V. Lois usuelles de probabilités

Table 7 : Distribution de Fisher Snédecor

Quantiles d'ordre .95																
ν_2	ν_1															
	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	30	60	∞		
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	238.88	241.88	243.91	245.95	248.01	250.10	252.20	254.31		
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.48	19.50		
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.57	8.53		
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.69	5.63		
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.43	4.37		
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.74	3.67		
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.30	3.23		
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.01	2.93		
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.79	2.71		
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.98	2.91	2.85	2.77	2.70	2.62	2.54		
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.49	2.40		
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.38	2.30		
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.30	2.21		
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.31	2.22	2.13		
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.16	2.07		
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.19	2.11	2.01		
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.06	1.96		
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.02	1.92		
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.38	2.31	2.23	2.16	2.07	1.98	1.88		
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.95	1.84		
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.92	1.81		
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.30	2.23	2.15	2.07	1.98	1.89	1.78		
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.37	2.27	2.20	2.13	2.05	1.96	1.86	1.76		
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.25	2.18	2.11	2.03	1.94	1.84	1.73		
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.24	2.16	2.09	2.01	1.92	1.82	1.71		
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.80	1.69		
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.31	2.20	2.13	2.06	1.97	1.88	1.79	1.67		
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.29	2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.77	1.65		
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.28	2.18	2.10	2.03	1.94	1.85	1.75	1.64		
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.74	1.62		
31	4.16	3.30	2.91	2.68	2.52	2.41	2.25	2.15	2.08	2.00	1.92	1.83	1.73	1.61		
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.24	2.14	2.07	1.99	1.91	1.82	1.71	1.59		
33	4.14	3.28	2.89	2.66	2.50	2.39	2.23	2.13	2.06	1.98	1.90	1.81	1.70	1.58		
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.23	2.12	2.05	1.97	1.89	1.80	1.69	1.57		
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.22	2.11	2.04	1.96	1.88	1.79	1.68	1.56		
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.21	2.11	2.03	1.95	1.87	1.78	1.67	1.55		
37	4.11	3.25	2.86	2.63	2.47	2.36	2.20	2.10	2.02	1.95	1.86	1.77	1.66	1.54		
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.19	2.09	2.02	1.94	1.85	1.76	1.65	1.53		
39	4.09	3.24	2.85	2.61	2.46	2.34	2.19	2.08	2.01	1.93	1.85	1.75	1.65	1.52		
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.08	2.00	1.92	1.84	1.74	1.64	1.51		
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.13	2.03	1.95	1.87	1.78	1.69	1.58	1.44		
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.10	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.53	1.39		
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.07	1.97	1.89	1.81	1.72	1.62	1.50	1.35		
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.06	1.95	1.88	1.79	1.70	1.60	1.48	1.32		
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.04	1.94	1.86	1.78	1.69	1.59	1.46	1.30		
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.03	1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.45	1.28		
110	3.93	3.08	2.69	2.45	2.30	2.18	2.02	1.92	1.84	1.76	1.67	1.56	1.44	1.27		
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.02	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.43	1.25		
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.32	1.00		

Table 7 (suite) : Distribution de Fisher Snédecor

Quantiles d'ordre .975																
ν_2	ν_1															
	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	30	60	∞		
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.9	937.1	956.7	968.6	976.7	984.9	993.10	1001.40	1009.80	1018.30		
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.37	39.40	39.42	39.43	39.45	39.47	39.48	39.50		
3	17.44	18.04	18.44	18.76	18.99	19.14	19.28	19.40	19.50	19.58	19.65	19.71	19.76	19.80		
4	12.22	12.65	12.98	13.25	13.46	13.62	13.76	13.88	13.98	14.06	14.13	14.19	14.24	14.28		
5	10.01	10.43	10.76	11.00	11.19	11.35	11.49	11.60	11.69	11.76	11.82	11.87	11.91	11.94		
6	8.81	9.23	9.56	9.79	9.96	10.11	10.24	10.35	10.44	10.51	10.56	10.61	10.64	10.67		
7	8.07	8.49	8.82	9.04	9.21	9.36	9.49	9.60	9.69	9.76	9.81	9.85	9.88	9.91		
8	7.57	7.99	8.32	8.54	8.71	8.86	8.98	9.09	9.18	9.25	9.30	9.34	9.37	9.40		
9	7.21	7.63	7.96	8.18	8.35	8.50	8.62	8.73	8.82	8.89	8.94	8.98	9.01	9.04		
10	6.94	7.36	7.69	7.91	8.08	8.23	8.35	8.46	8.55	8.62	8.67	8.71	8.74	8.77		
11	6.72	7.14	7.47	7.69	7.86	8.01	8.13	8.24	8.33	8.40	8.45	8.49	8.52	8.55		
12	6.55	6.97	7.30	7.52	7.69	7.84	7.96	8.07	8.16	8.23	8.28	8.32	8.35	8.38		
13	6.41	6.83	7.16	7.38	7.55	7.70	7.82	7.93	8.02	8.09	8.14	8.18	8.21	8.24		
14	6.30	6.72	7.05	7.27	7.44	7.59	7.71	7.82	7.91	7.98	8.03	8.07	8.10	8.13		
15	6.20	6.62	6.95	7.17	7.34	7.49	7.61	7.72	7.81	7.88	7.93	7.97	8.00	8.03		
16	6.12	6.54	6.87	7.09	7.26	7.41	7.53	7.64	7.73	7.80	7.85	7.89	7.92	7.95		
17	6.04	6.46	6.79	7.01	7.18	7.33	7.45	7.56	7.65	7.72	7.77	7.81	7.84	7.87		
18	5.98	6.40	6.73	6.95	7.12	7.27	7.39	7.50	7.59	7.66	7.71	7.75	7.78	7.81		
19	5.92	6.34	6.67	6.89	7.06	7.21	7.33	7.44	7.53	7.60	7.65	7.69	7.72	7.75		
20	5.87	6.29	6.62	6.84	7.01	7.16	7.28	7.39	7.48	7.55	7.60	7.64	7.67	7.70		
21	5.83	6.25	6.58	6.80	6.97	7.12	7.24	7.35	7.44	7.51	7.56	7.60	7.63	7.66		
22	5.79	6.21	6.54	6.76	6.93	7.08	7.20	7.31	7.40	7.47	7.52	7.56	7.59	7.62		
23	5.75	6.17	6.50	6.72	6.89	7.04	7.16	7.27	7.36	7.43	7.48	7.52	7.55	7.58		
24	5.72	6.14	6.47	6.69	6.86	7.01	7.13	7.24	7.33	7.40	7.45	7.49	7.52	7.55		
25	5.69	6.11	6.44	6.66	6.83	6.98	7.10	7.21	7.30	7.37	7.42	7.46	7.49	7.52		
26	5.66	6.08	6.41	6.63	6.80	6.95	7.07	7.18	7.27	7.34	7.39	7.43	7.46	7.49		
27	5.63	6.05	6.38	6.60	6.77	6.92	7.04	7.15	7.24	7.31	7.36	7.40	7.43	7.46		
28	5.61	6.03	6.36	6.58	6.75	6.90	7.02	7.13	7.22	7.29	7.34	7.38	7.41	7.44		
29	5.59	6.01	6.34	6.56	6.73	6.88	7.00	7.11	7.20	7.27	7.32	7.36	7.39	7.42		
30	5.57	5.99	6.32	6.54	6.71	6.86	6.98	7.09	7.18	7.25	7.30	7.34	7.37	7.40		
31	5.55	5.97	6.30	6.52	6.69	6.84	6.96	7.07	7.16	7.23	7.28	7.32	7.35	7.38		
32	5.53	5.95	6.28	6.50	6.67	6.82	6.94	7.05	7.14	7.21	7.26	7.30	7.33	7.36		
33	5.51	5.93	6.26	6.48	6.65	6.80	6.92	7.03	7.12	7.19	7.24	7.28	7.31	7.34		
34	5.50	5.92	6.25	6.47	6.64	6.79	6.91	7.02	7.11	7.18	7.23	7.27	7.30	7.33		
35	5.48	5.90	6.23	6.45	6.62	6.77	6.89	7.00	7.09	7.16	7.21	7.25	7.28	7.31		
36	5.47	5.89	6.22	6.44	6.61	6.76	6.88	6.99	7.08	7.15	7.20	7.24	7.27	7.30		
37	5.46	5.88	6.21	6.43	6.60	6.75	6.87	6.98	7.07	7.14	7.19	7.23	7.26	7.29		
38	5.45	5.87	6.20	6.42	6.59	6.74	6.86	6.97	7.06	7.13	7.18	7.22	7.25	7.28		
39	5.43	5.85	6.18	6.40	6.57	6.72	6.84	6.95	7.04	7.11	7.16	7.20	7.23	7.26		
40	5.42	5.84	6.17	6.39	6.56	6.71	6.83	6.94	7.03	7.10	7.15	7.19	7.22	7.25		
50	5.34	5.76	6.09	6.31	6.48	6.63	6.75	6.86	6.95	7.02	7.07	7.11	7.14	7.17		
60	5.29	5.71	6.04	6.26	6.43	6.58	6.70	6.81	6.90	6.97	7.02	7.06	7.09	7.12		
70	5.25	5.67	6.00	6.22	6.39	6.54	6.66	6.77	6.86	6.93	6.98	7.02	7.05	7.08		
80	5.22	5.64	5.97	6.19	6.36	6.51	6.63	6.74	6.83	6.90	6.95	6.99	7.02	7.05		
90	5.20	5.62	5.95	6.17	6.34	6.49	6.61	6.72	6.81	6.88	6.93	6.97	7.00	7.03		
100	5.18	5.60	5.93	6.15	6.32	6.47	6.59	6.70	6.79	6.86	6.91	6.95	6.98	7.01		
110	5.16	5.58	5.91	6.13	6.30	6.45	6.57	6.68	6.77	6.84	6.89	6.93	6.96	6.99		
120	5.15	5.57	5.90	6.12	6.29	6.44	6.56	6.67	6.76	6.83	6.88	6.92	6.95	6.98		
∞	5.02	5.44	5.77	5.99	6.16	6.31	6.43	6.54	6.63	6.70	6.75	6.79	6.82	6.85		

السداسي: الثالث

وحدة التعليم: منهجية

المادة: إحصاء 3

الرصيد: 4

المعامل: 2

نمط التعليم: حضوري

أهداف التعليم

- الهدف الأساسي هو التمهيد التطبيقي للنماذج الاقتصادية النظرية وإعطائها صيغة رياضية.
- التعرف على أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة
- إكساب الطالب القدرة على تطبيق التوزيعات الاحتمالية لمعالجة وحل المشكلات الاقتصادية والإدارية والاجتماعية.
- استيعاب المتغيرات العشوائية الثنائية المنفصلة والمتصلة وأهم خواصها.
- التعرف على التوزيعات ذات المتغيرين.

المعارف المسبقة المطلوبة

الرياضيات، الإحصاء الوصفي والاحتمالات

محتوى المادة:

- أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة
- أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة
- تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية
- المتغيرات العشوائية الثنائية

طريقة التقييم: تقييم مستمر + امتحان نهائي ويقاس معدل المادة بالوزن الترجيحي للدروس (60%) والأعمال الموجهة (40%)

المراجع:

- بوعبد الله صالح مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي دروس وتمارين، 2006.
- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات، الجزء الثاني، دار الكتب الأكاديمية، مصر، 2004، ط1
- محمد كبيه وماهر بدوي " الإحصاء التطبيقي " منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد، 2003.