جامعة الصديق بن يحيى
UNIVERSITE MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA JIJEL
كلية العلوم و التكنلوجيا
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
قسم الهندسة الميكانيكية
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

METHODES NUMERIQUES APPROFONDIES

Par

Amin BOURAOUI

Note de cours

Destinée aux étudiants de Master 1

Génie Mécanique : Energétique

1er semestre

Année universitaire

2025 - 2026

Préface

Ces notes de cours sont principalement destinées aux étudiants de la première année de Master en Génie Mécanique Énergétique (Semestre 1). Néanmoins, elles s'avèrent également utiles aux étudiants en ingénierie, en physique et dans d'autres disciplines scientifiques nécessitant l'acquisition de notions fondamentales sur la résolution des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) et la modélisation numérique. Ce cours ambitionne d'offrir une passerelle cohérente entre le formalisme mathématique rigoureux et les applications concrètes en ingénierie thermique et mécanique des fluides.

L'histoire de la physique mathématique est intimement liée à la nécessité de modéliser des phénomènes continus et multidimensionnels. Pour résoudre ces équations, des mathématiciens illustres tels que Jean le Rond d'Alembert, Joseph Fourier et Pierre-Simon de Laplace ont développé la méthode de séparation des variables. Cette approche élégante permet de transformer une EDP complexe en un système d'équations différentielles ordinaires, facilitant ainsi la recherche de solutions exactes sous forme de séries de fonctions. Ce cours explore cette démarche analytique à travers l'étude des trois équations fondamentales de la physique mathématique, caractérisant les grandes classes d'EDP : l'équation elliptique de Laplace pour les états stationnaires et les champs de potentiel, l'équation parabolique de la chaleur pour les phénomènes de diffusion thermique, et l'équation hyperbolique des ondes pour les processus de propagation et d'oscillation.

Cependant, l'analyse pure rencontre rapidement un obstacle majeur, car la majorité des EDP issues de la réalité industrielle et physique impliquant des géométries complexes ou des milieux non homogènes restent analytiquement insolubles. Au cours du XXe siècle, l'avènement des calculateurs a propulsé le développement de méthodes numériques approfondies pour approximer ces solutions. La méthode des différences finies s'est imposée comme l'un des piliers de cette révolution discrète. En remplaçant les dérivées continues par des rapports de différences algébriques sur un maillage, elle transforme les EDP en systèmes d'équations algébriques linéaires ou non linéaires.

Ce cours aborde en détail la construction et le comportement de ces modèles à travers deux grandes catégories de formulations, à savoir les schémas stationnaires dédiés aux problèmes elliptiques, et les schémas instationnaires adaptés aux problèmes temporels . L'étude des schémas temporels met en opposition les forces et faiblesses des approches classiques, allant

du schéma explicite, simple mais conditionnellement stable, au schéma implicite, inconditionnellement stable mais plus lourd à résoudre, jusqu'au schéma de Crank-Nicolson qui offre un excellent compromis en tant que méthode semi-implicite de second ordre en temps.

Néanmoins, la simple construction d'un schéma numérique ne suffit pas, et il faut impérativement garantir sa validité mathématique à travers l'analyse de convergence. Cette validation repose sur trois concepts fondamentaux que ce cours développe rigoureusement : la consistance, qui assure que l'équation discrétisée tend vers l'EDP continue d'origine lorsque les pas du maillage tendent vers zéro ; la stabilité, qui veille à ce que les erreurs de calcul ne s'amplifient pas au cours des itérations numériques ; et enfin la convergence.

L'histoire de la méthode des différences finies plonge ses racines bien avant l'apparition des premiers ordinateurs. Bien que l'approximation des dérivées par des différences discrètes remonte aux travaux d'Isaac Newton et de Brook Taylor au XVIIIe siècle, c'est au grand mathématicien Leonhard Euler que l'on doit la première application pratique de cette méthode pour résoudre des équations différentielles. Aux XVIIIe et XIXe siècles, les travaux de d'Alembert sur l'équation des ondes et le traité majeur de Fourier, Théorie analytique de la chaleur, ont posé les fondations de la séparation des variables et des séries trigonométriques. En 1928, le tournant numérique a été marqué par l'article fondateur de Courant, Friedrichs et Lewy, qui a introduit la condition de stabilité CFL, essentielle pour la convergence des schémas découplés. En 1955, John von Neumann a formalisé l'analyse de stabilité des schémas par décomposition spectrale. Les ouvrages classiques, tels que *"Difference Methods for Initial-Value Problems"* de Richtmyer et Morton (1957) ou les traités de Mitchell et Griffiths, sont devenus les références absolues pour le traitement numérique des EDP.

En conclusion, ce cours met l'accent sur ce double aspect indissociable : la beauté de la résolution analytique par séparation des variables, et la rigueur de la mise en œuvre numérique par les différences finies. Il offre ainsi aux étudiants de Master une vision unifiée, moderne et directement applicable de l'analyse mathématique pour l'ingénieur énergéticien.

TABLE DES MATIERES

Liste des figures vi
Liste des tableaux vii
Nomenclature viii

Chapitre I

Notions sur les équations aux dérivées partielles 1

I.1 Généralités sur les équations différentielles 1

I.2 Propriétés d'une équation aux dérivées partielles 3
I.2.1 L'ordre de l'EDP 3
I.2.2 La linéarité de l'EDP 3

I.3 Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre à n variables indépendantes 4

I.4 Types des conditions aux bords 5
I.4.1 Condition initiale 5
I.4.2 Conditions aux limites 5
a. Conditions de Dirichlet 6
b. Conditions de Neumann 6
c. Conditions mixtes de Fourier-Robin 7

I.5 Séries de Fourier et principe de superposition 7
I.5.1 Séries de Fourier 7
I.5.2 Principe de superposition 8

Exercice 1 8

Chapitre II

Méthodes analytiques — Séparation des variables 9

II.1 Conditions d'application de la méthode de séparation des variables 9

II.2 Méthode de séparation des variables appliquée à l'équation de la chaleur 10
Application numérique 13

II.3 Méthode de séparation des variables appliquée à l'équation de Laplace 13

II.4 Méthode de séparation des variables appliquée à l'équation des ondes 14
Application numérique — corde oscillatoire 16

Exercices — Méthode de séparation des variables 18

Chapitre III

Méthodes des différences finies — Résolution de l'équation parabolique 19

III.1 Principe de la méthode 19

III.2 Étapes des méthodes de différences finies 19

Étape 1 — Subdivision du domaine (construction du maillage) 20
Étape 2 — Conditions initiales et conditions aux limites 20
Étape 3 — Discrétisation de l'EDP par développement de Taylor 21
Étape 4 — Résolution du système algébrique. Algorithme de Thomas (TDMA) 24

III.3 Discrétisation de l'équation parabolique du second ordre à deux variables 25

III.4 Schéma explicite 26

III.4.1 Discrétisation de l'équation dans le domaine 26
III.4.2 Discrétisation de l'équation aux bords du domaine 27

III.5 Schéma implicite 28

III.5.1 Discrétisation de l'équation dans le domaine 28
III.5.2 Discrétisation de l'équation aux bords du domaine 28
III.5.3 Formulation matricielle du système implicite 29

III.6 Schéma de Crank-Nicolson 30

III.6.1 Discrétisation de l'équation dans le domaine 30
III.6.2 Discrétisation de l'équation aux bords du domaine 31
III.6.3 Formulation matricielle du système Crank-Nicolson 32

III.7 Propriétés associées aux méthodes numériques des EDP 32

III.7.1 Consistance (erreur de troncature locale) 32
III.7.2 Stabilité 33
III.7.3 Convergence (erreur globale) 34

III.8 Schéma classique en multidimensionnel (5 points) 34

III.8.1 Discrétisation de l'EDP par le schéma explicite 34
III.8.2 Discrétisation de l'EDP par le schéma implicite 35
a) Méthode ADI (Alternating Direction Implicit) 35

Exercices — Équations aux Dérivées Partielles Paraboliques 37

Chapitre IV

Équation elliptique — Laplace / Poisson 40

IV.1 Problème posé 40

IV.2 Discrétisation de l'EDP pour les nœuds internes du maillage 41

IV.3 Discrétisation de l'EDP pour les nœuds situés sur les bords du domaine 42
IV.3.1 Conditions de Dirichlet variables 42
IV.3.2 Conditions de Neumann 44
IV.3.3 Conditions de Cauchy 46

IV.4 Méthode de résolution de l'équation discrétisée 48
IV.4.1 Méthodes directes 48
IV.4.2 Méthodes itératives 48
IV.4.3 Méthodes itératives du double balayage (algorithme de Thomas ligne par ligne) 49

IV.5 Équation de Poisson 50
IV.5.1 Schéma à 5 points pour l'équation de Poisson 51
IV.5.2 Schéma compact d'ordre supérieur (schéma à 9 points) 51

IV.6 Domaine non rectangulaire 52

IV.7 Équations elliptiques non linéaires 54
IV.7.1 Linéarisation par la méthode de Newton 55
IV.7.2 Linéarisation par point fixe (méthode de Picard) 55

IV.8 Généralisation aux problèmes multidimensionnels 55

Exercices — Équations aux Dérivées Partielles Elliptiques 57

Chapitre V
Équation d'onde — Hyperbolique 59

V.1 Position du problème 60

V.2 Résolution de l'équation d'onde 60
V.2.1 Schéma centré d'ordre 2 (schéma explicite de référence) 60
V.2.2 Différents schémas de discrétisation 62
a) Schéma explicite Euler 62
b) Schéma explicite Upwind (décentré amont) 62
c) Schéma explicite de Lax (Lax-Friedrichs) 63
d) Schéma explicite Leapfrog (saut-mouton) 64
e) Schéma implicite d'Euler 64
V.2.3 Méthode implicite pour l'équation du second ordre 64
V.2.4 Système du premier ordre 65
Exemple d'application — Schéma centré d'ordre 2 66

Exercices — Équations aux Dérivées Partielles Hyperboliques 68

Liste des figures

Chapitre I — Notions sur les équations aux dérivées partielles

Figure (I.1) — Conditions aux limites type de Neumann 6

Figure (I.2) — Conditions aux limites type de Fourier-Robin 7

Chapitre III — Méthodes des différences finies — Résolution de l'équation parabolique

Figure (III.1) — Maillage uniforme du domaine de calcul 20

Figure (III.2) — Exemples de conditions aux limites associées aux frontières du domaine de calcul 21

Figure (III.3) — Schéma de discrétisation explicite, la valeur inconnue au nœud (i, n+1) est obtenue directement à partir des trois valeurs connues au temps n 26

Figure (III.4) — Bords du domaine : (a) à gauche (x = 0) avec nœud fictif (i = 0), (b) à droite (x = L) avec nœud fictif (i = N+1) 27

Figure (III.5) — Schéma de discrétisation implicite, les trois valeurs inconnues au temps n+1 dépendent de la seule valeur connue au nœud (i, n) 28

Figure (III.6) — Schéma de discrétisation Crank-Nicolson, moyenne des valeurs inconnues entre les temps n et n+1 30

Figure (III.7) — Principe de la méthode ADI : (a) Balayage implicite selon x à l'étape 1, (b) Balayage implicite selon y à l'étape 2 36

Chapitre IV — Equation Elliptique — Laplace / Poisson

Figure (IV.1) — Schéma numérique des MDF centrées à 5 nœuds : nœud central et ses quatre voisins 41

Figure (IV.2) — Maillage 5 × 5 et conditions aux limites de l'exemple traité 43

Figure (IV.3) — Principe de balayage, (a) ligne par ligne, (b) colonne par colonne 50

Figure (IV.4) — Maillage utilisée pour le schéma compact d'ordre supérieur à 9 points 51

Figure (IV.5) — Nœuds irrégulier au voisinage d'une frontière courbe 53

Chapitre V — Equation Elliptique — Laplace / Poisson

Figure (V.1) — Schéma centré explicite à trois niveau de temps 61

Liste des tableaux

Chapitre III — Méthodes des différences finies — Résolution de l'équation parabolique

Tableau (III.1) — Discrétisation du schéma explicite aux bords du maillage (conditions de Neumann et de Cauchy)..... 27

Tableau (III.2) — Discrétisation du schéma implicite aux bords du maillage (conditions de Neumann et de Cauchy)..... 29

Tableau (III.3) — Discrétisation du schéma Crank-Nicolson aux bords du maillage (conditions de Neumann et de Cauchy)..... 31

Chapitre IV — Equation Elliptique — Laplace / Poisson

Tableau (IV.1) — Champ de température T(x, y) obtenu par résolution directe du système en °C..... 44

Tableau (IV.2) — Discrétisation du schéma aux bords du domaine par la condition de Neumann..... 44

Tableau (IV.3) — Discrétisation de l'EDP pour les quatre coins du domaine par conditions de Neumann..... 45

Tableau (IV.3) — Discrétisation du schéma aux bords du domaine par la condition de Cauchy..... 46

Tableau (IV.4) — Discrétisation de l'EDP pour les quatre coins du domaine par conditions de Cauchy..... 47

NOMENCLATURE

I.1. Symboles Latins

Symbole	Description
$a(U)$	Coefficient de diffusion dépendant de la solution
A, B	Matrices tri-diagonales du système matriciel global / Matrice du système linéaire discrétisé
a, b	Dimensions du rectangle ou bornes du domaine spatial $[a, b]$
A_i, B_i, C_i	Coefficients diagonal, sur-diagonal et sous-diagonal de la matrice
B	Vecteur des termes connus, second membre du système linéaire ou largeur de bande
B, B_k	Constantes d'intégration
C	Constante
D	Matrice diagonale de A
D, D_k	Constantes d'intégration déterminées par la condition initiale
E	Partie triangulaire inférieure stricte de A / Intervalle du domaine
F	Partie triangulaire supérieure stricte de A / Fonction résidu non linéaire / Intervalle
$f(t)$	Fonction inconnue dépendant du temps t
$f(x, y)$	Terme source de l'équation de Poisson
G	Facteur d'amplification de l'onde de Fourier ($\|g\| \leq 1$)
$g(x), g(y)$	Fonctions inconnues dépendant d'une variable d'espace
G_i	Second membre de la i-ème équation du système linéaire
H	Hauteur du domaine rectangulaire

H	Coefficient de transfert thermique par convection / Pas de discrétisation spatiale
h_x, h_y	Pas de discrétisation suivant x et y
J	Matrice Jacobienne de F (méthode de Newton)
K	Unité imaginaire complexe ($K^2 = -1$)
k	Entier indexant les modes propres
L	Longueur du domaine spatial de calcul
M_k, N_k	Coefficients du développement en série de Fourier
N	Vecteur normal unitaire sortant à la frontière
N, M_x, M_y	Nombre de nœuds ou d'intervalles du maillage
p, q	Variables auxiliaires temporelles ou spatiales ($\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial t$)
P_i, Q_i	Suites auxiliaires du balayage aller de l'algorithme de Thomas
R	Racine de l'équation caractéristique
Sv	Terme source volumique
T	Température instantanée ou champ de température
t, t_i	Variable temporelle
U	Fonction inconnue, grandeur physique ou fonction solution de l'EDP
V	Vecteur vitesse
x, y, z	Variables représentant les coordonnées d'espace

I.2. Symboles Grecs

Symbole	Description
$\alpha(x), \alpha(y)$	Fonction de condition initiale ou condition aux limites
$\beta(x), \beta(y)$	Fonction de condition aux limites

Δ	Discriminant
Δt	Pas de discrétisation temporelle
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Pas de discrétisation spatiale
ε	Reste (terme d'erreur) du développement de Taylor à l'ordre n
η	Vecteur géométrique normal unitaire sortant à la frontière
θ	Phase discrète de l'onde de Fourier
θ_1, θ_2	Distances relatives aux points frontières d'un nœud irrégulier
λ, λ_k	Constante de séparation / Valeur propre / Nombre de Fourier / Rapport de maillage
$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$	Coefficients de diffusion numérique / Rapports de maillage
Ω	Pulsation spatiale (nombre d'onde) / Facteur de relaxation (SOR)/ Domaine spatial d'étude ou de définition du problème
ω_{opt}	Facteur de relaxation optimal (méthode SOR)
$\partial\Omega$	Frontière du domaine Ω
μ	Viscosité dynamique du fluide

I.3. Indices

Indice	Description
0	Valeur/état initial, bord à x=0 ou nœud central considéré
A, B	Points frontières voisins d'un nœud irrégulier
amb	Indique une propriété liée au milieu ambiant
GS	Relatif à la méthode de Gauss-Seidel
i, j, k	Indices associés aux dimensions
k	Indice de sommation ou d'itération (méthodes itératives)
$k = (k_1, k_2)$	Multi-indice de dérivation (ordre total)
L, H	Bords du domaine spatial ($x = L, y = H$)

N	Indice temporel repérant l'instant t ou indice d'itération
opt	Valeur optimale

III.4. Abréviation et acronymes

Symbole	Description
ADI	Méthode des Directions Alternées Implicites
CFL	Condition de Courant-Friedrichs-Lewy
CSR / CSC	Compressed Sparse Row / Compressed Sparse Column (stockage creux)
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
MDF	Méthode des Différences Finies
SOR	Successive Over-Relaxation (sur-relaxation successive)
TDMA	Méthode algorithme de Thomas pour matrices tri-diagonales

Chapitre I

Notions sur les équations aux dérivées partielles

Ce chapitre introduit les bases fondamentales des équations aux dérivées partielles (EDP). Il relie la modélisation mathématique des phénomènes physiques, issue des principes de conservation, à la structure mathématique de leurs solutions. Nous y établirons d'abord la classification rigoureuse des EDP du second ordre en trois grandes familles analytiques (elliptiques, paraboliques et hyperboliques) avant de distinguer les opérateurs linéaires, qui respectent le principe de superposition, des modèles non linéaires complexes. Enfin, l'étude se focalisera sur les conditions aux limites indispensables (Dirichlet, Neumann et Robin) qui, associées aux conditions initiales, s'avèrent cruciales pour garantir le caractère bien posé du problème, à savoir l'existence et l'unicité d'une solution physique, ouvrant ainsi la voie à sa résolution numérique.

I.1 Généralités sur les équations différentielles

Une équation différentielle est une relation mathématique reliant une fonction inconnue à ses dérivées. De manière générale, elle s'exprime sous la forme suivante :

$$R\left(t_1, \ldots\ldots t_n, u, \frac{\partial u}{\partial t_i}, \ldots\ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial t_i^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial^n u}{\partial t_i^n}\right) = 0$$

Telle que :

- R : relation mathématique
- u : fonction inconnue de n variables
- t_i : variables représentant généralement le temps et/ou l'espaces
- $\frac{\partial}{\partial t}$: dérivée partielle par rapport à t

Remarque. *si u est une fonction à deux variables, une E.D.P peut s'écrire par la relation suivante :*

$$u\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial xy},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\frac{\partial^3 u}{\partial y^3},\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 y},\frac{\partial^3 u}{\partial xy^2},\dots\dots\dots,\frac{\partial u^n}{\partial x^n y^n}\right)=0$$

Exemple physique d'une EDP.

- *Equation de la chaleur :*

$$R\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}-c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

- *Equation des ondes :*

$$R\left(t,x,u,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

- *Equation de transport :*

$$R\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

- *Equation de Burgers :*

$$R\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Remarque. *Dans le cas particulier où cette formulation générale ne dépend que d'une seule variable indépendante, l'équation devient une EDO (équations différentielles ordinaires). Elle s'exprime sous la forme :*

$$R\left(t,u,\frac{\partial u}{\partial t},\dots\dots\dots,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\dots\dots\dots,\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right)=0$$

Exemple physique d'une EDO. *La loi de refroidissement de Newton :*

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_{amb})$$

Telle que :

- k *: propriété physique de conductivité thermique de l'objet*
- T *: température instantanée de l'objet ou du système étudié à un instant* (t)
- t *: variables indépendante représente le temps*
- $\frac{\partial T}{\partial t}$ *: taux de variation de la température par rapport au temps. Elle représente la vitesse à laquelle la température de l'objet change.*

I.2 Propriétés d'une équation aux dérivées partielles

I .2.1 L'ordre de EDP

On appelle **ordre d'une EDP** le degré le plus élevé de ses dérivées partielles. Par exemple :

- $u_{x^2y} + 3u_{xx}, + xu_{yy} + u_x + u + c = 0 \;\Rightarrow une\ E.D.P\ d'ordre\ \mathbf{3}$
- $(u_{xx} - u_{yy})^2 - 4(u_{xy})^2 - C = 0 \Rightarrow une\ E.D.P\ de\ l'ordre\ \mathbf{2}$

I.2.2 La linéarité de EDP

On dit que l'équation EDP est linéaire, si elle respecte la condition suivante :

$$R(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = R(\boldsymbol{u}_1) + R(\boldsymbol{u}_2)$$

Exemple.

- *Equation de Stokes est une EDP linéaire :*

$$-\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v} + \vec{S}_v = 0$$

- *Equation de Navier-Stokes est une EDP non linéaire :*

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v} + \vec{S}_v$$

où :

- $\vec{\nabla}$ *: le gradient* $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^t$
- Δ *: Laplacient* $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

I.3 Classification mathématique des EDP linéaire du second ordre de n variables indépendantes

La classification mathématique sert à déterminer les méthodes de résolution adaptées. Pour une EDP linéaire du second ordre où la fonction inconnue (u) dépend de (n) variables indépendantes, est de la forme :

$$\sum_{i}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_{(x_1,\dots x_n)} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{(x_1,\dots x_n)} u + d_{(x_1,\dots x_n)} = 0$$

On note λ_i les valeurs propres de la matrice des coefficients (a_{ij}). La classification s'établit alors comme suit :

- L'EDP est de type elliptique si toutes les valeurs propres sont non nulles et de même signe.
- L'EDP est de type hyperbolique si toutes les valeurs propres sont non nulles et de même signe, à l'exception d'une seule qui est de signe opposée.
- L'EDP est de type parabolique si au moins une valeur propre est nulle et les autres sont de même signe.

Exemple.

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *: est une EDP de type parabolique*
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *: est une EDP de type elliptique*
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *: est une EDP de type hyperbolique*

Remarque. *Dans le cas de deux dimension (deux variables), l'EDP linéaire du second ordre s'écrit :*

$$a_{(x,y)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b_{(x,y)}\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c_{(x,y)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d_{(x,y)} = 0$$

La classification se fait via la nature de $\Delta = b_{(x,y)}^2 - a_{(x,y)}\, c_{(x,y)}$ *:*

- $\Delta < 0$ ⇒ *Equation Elliptique*
- $\Delta = 0$ ⇒ *Equation Parabolique*
- $\Delta > 0$ ⇒ *Equation Hyperbolique*

I.4 Types des conditions aux bords

Le plus souvent, ces équations sont associées à des conditions initiales et aux limites qui imposent le comportement de la solution sur la frontière du domaine.

I.4.1 Condition initiale

Requise lorsque l'une des variables représente le temps, elle fixe l'état origine du système à l'instant initial t_0. La condition initiale peut être par rapport à la fonction u $\left(u|_{t=t_0} = u_0\right)$, ou par rapport à sa dérivée $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = v_0\right)$.

Exemple.

- *Tension initiale dans un circuit :* $u_C(0) = U_0$
- *Température initiale en thermodynamique :* $T(0) = T_0$
- *Vitesse initiale :* $\frac{\partial x}{\partial t}\Big|_{t=0} = U_0$
- *Intensité initiale de variation en charge électrique :* $i(0) = \frac{dq}{dt}\Big|_{t=0} = I_0$
- *Flux thermique initiale :* $\frac{dT}{dt}\Big|_{t=0} = \dot{Q}$

I.4.2 Conditions aux limites

Le plus souvent, ces équations sont associées à des conditions aux limites $(u|_{\partial\Omega})$ qui imposent le comportement de la solution sur la frontière du domaine. Requises lorsque les variables

décrivent l'espace, elles consistent à imposer la valeur de la solution (ou de ses dérivées) sur les frontières géométriques du domaine.

On distingue principalement trois types de conditions aux limites :

a. Conditions de Dirichlet

Cette condition consiste à fixer la valeur de la solution sur la frontière, comme elle peut être distribué d'une manière linéaire : $u(x) = g(x)$ sur la frontière.

Exemple :

- *En thermique :* $T(x) = Cst$
- *En mécanique :* $u(x) = 0$
- *Cas d'une plaque thermique :* $u(x,1) = T_0.x(1-x)$

b. Conditions de Neumann

Cette condition impose la valeur de la dérivée normale de la solution : $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g$, telle que g est une fonction donnée définie sur la frontière et η est le vecteur normale à la frontière.

Exemple :

- *Cas d'un flux thermique injecté :* $\frac{\partial T}{\partial n} = \dot{Q}$
- *Paroi parfaitement isolée :* $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$

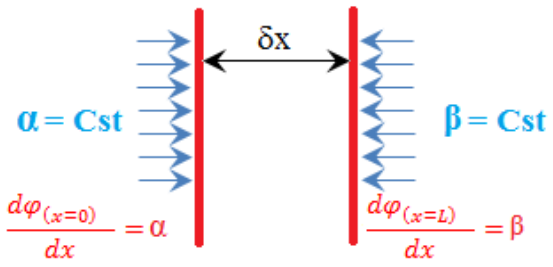


Figure (I.1) : Conditions aux limites type de Neumann

c. Conditions mixte de Fourier-Robin

La condition aux limites est une combinaison pondérée d'une condition de Dirichlet et d'une condition de Neumann, il s'agit d'une relation entre l'inconnue et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine : $au + b\frac{\partial u}{\partial \eta} = g$, ou a,b ,g sont des fonctions données définies sur la frontière.

Exemple :

- *Convection à l'air libre (Loi de Newton) :* $-\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = h\,(T - T_{amb})$

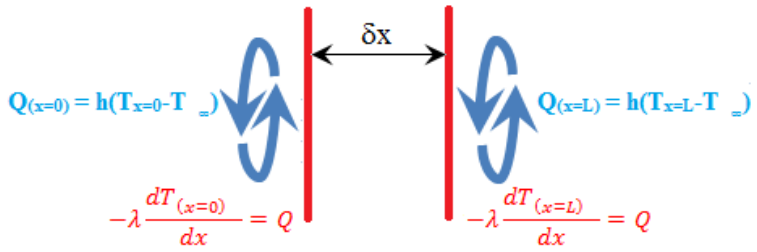


Figure (I.2) : Conditions aux limites type de Fourier-Robin

I.5 Séries de Fourier et principe de superposition

I.5.1 Séries de Fourier

Soit h une fonction $2l$-périodique, continue par morceaux. Son développement en série de Fourier s'écrit :

$$h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}\left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\right]$$

Avec :

$$a_k = \left(\frac{1}{l}\right)\int_{-l}^{l} h(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx,$$

$$b_k = \left(\frac{1}{l}\right)\int_{-l}^{l} h(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$$

Lorsque h est le prolongement impair d'une fonction α définie sur $[0, l]$, tous les a_k sont nuls et seuls subsistent les termes en sinus, ce qui justifie l'usage de ce développement pour les problèmes de Dirichlet homogènes traités dans ce chapitre.

I.5.2 Principes de superposition

Une EDP linéaire homogène possède la propriété suivante : si u_1 et u_2 sont deux solutions vérifiant les mêmes conditions aux limites homogènes, alors toute combinaison linéaire $c_1u_1 + c_2u_2$ est encore solution. Ce principe s'étend à une infinité dénombrable de solutions élémentaires u_k, obtenues par séparation des variables : la série $u = \sum u_k$ est alors, sous des hypothèses de convergence usuelles, elle-même solution de l'EDP et de ses conditions aux limites homogènes. Les coefficients de la combinaison sont ensuite déterminés en imposant la ou les conditions non homogènes (condition initiale, ou conditions aux limites non nulles), via le développement en série de Fourier présenté en section I.5.1.

Exercice 1. *Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.*

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + x\frac{\partial^3 u}{\partial^3 y} = y$

2) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 1$

3) $\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$

4) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = sin(x)$

5) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + sin(u) = e^y$

Chapitre II

Méthodes analytiques — *Séparation des variables*

Ce chapitre présente la méthode de séparation de variables, l'une des techniques analytiques majeure pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires. Cette approche consiste à rechercher des solutions sous la forme d'un produit de fonctions à variable unique, transformant ainsi une EDP en un système de deux équations différentielles ordinaires (EDO), plus simples à résoudre. Pour illustrer la portée et la rigueur de cette méthode, nous l'appliquons successivement aux trois grandes familles d'EDP linéaires du second ordre : Nous étudierons d'abord l'équation de diffusion (type parabolique) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes pour modéliser l'évolution temporelle d'un profil thermique. L'équation de Laplace (type elliptique) en coordonnées cartésiennes pour déterminer des états stationnaires. Puis l'équation des ondes (type hyperbolique) afin de caractériser les phénomènes vibratoires. Grâce au principe de superposition et au développement en série de Fourier, cette méthode fournit les outils mathématiques essentiels à la construction de solutions analytiques exactes, conformes aux contraintes physiques du problème.

II.1 Conditions d'application de la méthode de séparation des variables

Soit une EDP linéaire à deux variables indépendantes x et y. La méthode de séparation des variables ne s'applique que si les trois conditions suivantes sont réunies :

- L'EDP est linéaire et homogène,
- L'une des conditions de l'EDP soit nulle par rapport à une variable,
- Le domaine d'étude avec les deux variables (x, y) est séparable, c'est-à-dire de la forme $\Omega = E \times F$, avec $x \in E$, $y \in$ F

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on cherche une solution particulière sous forme d'un produit de deux fonctions, chacune ne dépendant que d'une seule variable , la solution générale s'obtient ensuite par superposition de ces solutions particulières (série de Fourier).

II.2 Méthode de séparation des variables appliquée à l'équation de la chaleur

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur sur le domaine $\Omega =]0, L[$ avec des conditions de Dirichlet homogènes suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, \quad x \in]0, L[\\ u(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = \alpha(x), \end{cases} \tag{II.1}$$

La démarche se déroule en six étapes :

a. Étape 1 — Séparation. On cherche la solution $u(x)$ sous la forme d'un produit de deux fonctions indépendantes :

$$u(x,t) = f(t)\,.\,g(x),\ t > 0 \quad et\ x \in]0, L[\tag{II.2}$$

b. Étape 2 — Substitution. En reportant (II.2) dans l'EDP, on obtient :

$$f'(t) \times g(x) - c^2 g''(x) \times f(t) = 0 \tag{II.3}$$

c. Étape 3 — Séparation des variables. En divisant (II.3) par $f(t)$ et $g(x)$:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = c^2 \frac{g''(x)}{g(x)} = \boldsymbol{\lambda} \tag{II.4}$$

Le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite ne dépend que de x. Les deux membres sont donc égaux à une même constante réelle, appelée *constante de séparation*, notée $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit le système de deux EDO découplées :

$$\begin{cases} f'(t) - \lambda f(t) = 0, \quad t \geq 0 & \text{(II.5-a)} \\ -c^2 g''(x) + \lambda g(x) = 0,\ x \in \Omega & \text{(II.5-b)} \end{cases}$$

d. Étape 4 — Conditions initiales et aux limites. La condition initiale donne :

$$f(0).g(x) = \alpha(x)$$

et les conditions aux limites homogènes imposent (puisque *f(t)* n'est pas identiquement nulle):

$$g(0) = 0 \text{ et } g(L) = 0$$

e. Étape 5 — Résolution de l'équation (II.5-a) en *t* (l'EDO d'ordre 1). La solution est :

$$\int \frac{df(t)}{f(t)} = \lambda \int dt \Leftrightarrow f(t) = D\, e^{\lambda t} \qquad \text{(II.6)}$$

d'où :

$D = f(t_{=0})$: est déterminer à partir des *C.I*

Étape 6 — Résolution de l'équation (II.5-b) en *x* (EDO d'ordre 2). On pose $g(x) = e^{rx}$, ce qui conduit à l'équation caractéristique : $-c^2 r^2 + \lambda = 0$

Le discriminant réduit : $\Delta = 4c^2\lambda$ impose de distinguer trois cas pour λ :

- Si $\lambda > 0$: on pose $\lambda = c^2\omega^2$

  La solution générale est : $g(x) = (C_1 + C_2)\cosh(\omega x) + (C_1 - C_2)\, sinh(\omega x)$

  avec : C_1 et C_2 sont des constantes déterminées par les conditions aux limites :

  $g(0) = 0$ impose : $C_1 + C_2 = 0$

  $g(L) = 0$ impose : $sinh(\omega L) = 0 \Longrightarrow L\omega = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

  Conclusion : Solution triviale, ce cas est rejeté.

- Si $\lambda = 0$: la solution générale : $g(x) = C_1 + C_2\, x$

  Les mêmes conditions aux limites donnent : $C_1 = C_2 = 0$

  Conclusion : Solution triviale, ce cas est rejeté.

- Si $\lambda < 0$: on pose $\lambda = -c^2\omega^2, \omega > 0$,

  La solution générale est : $g(x) = A\cos(\omega x) + B\ sin(\omega x)$

  Selon les conditions aux limites :

  $g(0) = 0$ impose : $A = 0$,

  $g(L) = B\ sin(\omega L) = 0$ impose : $\omega = \frac{k\pi}{L}$, *où* $k \in \mathbb{N}^*$

  Conclusion :Solution non triviale. pour $A=0$, $B \neq 0$ et $\omega = \frac{k\pi}{L}, soit\ \lambda_k = -\left(c\frac{k\pi}{L}\right)^2$

Les fonctions propres associées sont :

$$g_k(x) = B\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \tag{II.7}$$

Étape 7 — Obtention de la solution générale par superposition. En substituant les expressions (II.6) et (II.7) dans l'équation (II.2), on obtient les solutions élémentaires de l'équation de la chaleur :

$$\boldsymbol{u_k(x,t) = De^{-\left(c\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}.\ B\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = M_k e^{-\left(c\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}.\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)} \tag{II.8}$$

Par le principe de superposition, la solution générale est :

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{k>0} u_k(x,t) = \sum_{k>0} M_k\ e^{-\left(c\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}\ .\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)} \tag{II.9}$$

La condition initiale :

$$\boldsymbol{u(x,0) = \sum_{k>0} M_k\ sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \alpha(x)} \tag{II.10}$$

On identifie les coefficients M_k comme les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction impaire de période $2L$ égale à $\alpha(x)$, $0 \leq x \leq L$.

Application numérique

On prend $L = 1$, $c = 1$ et une condition initiale déjà sous la forme d'un unique mode propre : $\alpha(x) = \sin(\pi x)$.

Comme $\alpha(x)$ coïncide exactement avec la fonction propre $g_1(x) = \sin(\pi x)$ cas $k = 1$, l'intégrale donne directement $M_1 = 1$ et $M_k = 0$ pour $k \geq 2$. La solution exacte du problème se réduit donc à un seul terme de la série :

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$$

On vérifie aisément que cette expression satisfait bien l'EDP, les deux conditions aux limites homogènes, et la condition initiale ce qui illustre concrètement la méthode sur un cas où le calcul des coefficients de Fourier est immédiat.

II.3 Méthode de séparation de variables appliquée à l'équation de Laplace

On s'intéresse à la résolution de l'équation de Laplace sur le rectangle $\Omega =]0,a[\times]0,b[$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u(x,y)}{dx^2} + \dfrac{d^2u(x,y)}{dy^2} = 0, \qquad x \in]0,a[, y \in]0,b[\\ u(0,y) = \alpha(y) \\ u(a,y) = \beta(y) \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = 0 \end{cases} \tag{II.11}$$

a . Étape 1 — Séparation. On pose $u(x,y) = f(x).g(y)$, ce qui transforme l'EDP en :

$$\begin{cases} f''(x) - \lambda f(x) = 0 & \text{(II.12a)} \\ g''(y) + \lambda g(y) = 0 & \text{(II.12b)} \end{cases}$$

b. Étape 2 — Résolution de l'équation (II.12-b) en y. Les conditions homogènes en y $(g(0) = g(b) = 0)$ sont formellement identiques à celles rencontrées en section (II.2) pour

la variable x. Le même raisonnement (étude du signe de λ) montre que seul le cas de $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$, fournit des solutions non triviales :

$$g_k(y) = B_k \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right), k \in \mathbb{N}^*, \text{ et } \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \quad \text{(II.13)}$$

c. Étape 3 — Résolution de l'équation (II.12-a) en x :

En reportant le terme λ_k dans l'équation (II.12-a) , puis on écrit l'équation caractéristique :

$$r^2 - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 = 0$$

Puisque $\Delta > 0$, L***a solution générale de (II.12-a) est de la forme :***

$$f_k(x) = C_k \cosh\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + D_k \sinh\left(\frac{k\pi}{b}x\right) \quad \text{(II.14)}$$

d. Étape 4 — Obtention de la solution générale par superposition. Par superposition, la solution générale $u_k(x,y)$ s'écrit :

$$u(x,y) = \sum_{k>0}\left[M_k \cosh\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + N_k \sinh\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\right] . \left[\sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)\right] \quad \text{(II.15)}$$

Les conditions $u(0,y) = \alpha(y)$ et $u(a,y) = \beta(y)$ donnent respectivement les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction impaire de période $2b$ égale à $\alpha(y)$, $0 \le y \le b$:

$$M_k = \frac{2}{b}\int_0^b \alpha(y) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right) dy$$

$$N_k = \frac{2}{b} \times \frac{\int_0^b \beta(y)\sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right) dy - \frac{b}{2}M_k \cosh\left(\frac{k\pi}{b}a\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{b}a\right)}.$$

II.4 Méthode de séparation de variables appliquée à l'équation des ondes

On s'intéresse à la résolution de l'équation des ondes suivante, sur $]0, L[$:

$$\begin{cases} c^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \alpha(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \beta(x) \end{cases} \tag{II.16}$$

a . Étape 1 — Séparation. On pose $u(x,y) = f(t).g(x)$, et on obtient la constante de séparation λ telle que :

$$\begin{cases} f''(t) - \lambda f(t) = 0, \quad t \geq 0 & \text{(II.17-a)} \\ c^2 g''(x) - \lambda\, g(x) = 0,\ x \in \Omega & \text{(II.17-b)} \end{cases}$$

b. Étape 2— Résolution de l'équation (II.17-b) en x avec les conditions initiales et aux limites. avec les conditions $g(0) = g(L) = 0$. L'équation en g est identique à Etape 6 de la section (II.1), seules les valeurs $\lambda_k = -\left(\frac{ck\pi}{L}\right)^2, k \in \mathbb{N}^*$, donnent des solutions non triviales :

$$g_k(x) = sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \tag{II.18}$$

c. Étape 3 — Résolution de l'équation (II.17-a) en t. En reportant λ_k dans l'équation de $f: f''(t) + \left(\frac{ck\pi}{L}\right)^2 f(t) = 0$, la solution d'équation caractéristique à racines complexes donne :

$$f_k(t) = C_k cos\left(\frac{kc\pi}{L}t\right) + D_k sin\left(\frac{kc\pi}{L}t\right) \tag{II.19}$$

d. Étape 4 — Obtention de la solution générale de l'équation des ondes par superposition.

$$u(x,t) = \sum_{k>0} \left[M_k \cos\left(\frac{kc\pi}{L}t\right) + N_k\, sin\left(\frac{kc\pi}{L}t\right) \right] \times \left[\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right] \tag{II.20}$$

La condition $u(x,0) = \alpha(x)$ donne, comme précédemment :

$$u(x,0) = \sum_{k>0} M_k \times \left[sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right] = \alpha(x)$$

Les M_k sont les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction impaire de période $2L$ égales à $\alpha(x)$, $0 \leq x \leq L$.

$$\mathrm{M_k} = \frac{2}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}} \alpha(\mathrm{x})\ \sin\left(\frac{\mathrm{k\pi}}{\mathrm{L}}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} \qquad \text{(II.21)}$$

On dérive la solution par rapport à t et on utilise la deuxième condition initiale

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{x},0) = \sum_{\mathrm{k>0}} \frac{\mathrm{kc\pi}}{\mathrm{L}}\ \mathrm{N_k} \times \left[\sin\left(\frac{\mathrm{k\pi}}{\mathrm{L}}\mathrm{x}\right)\right] = \beta(\mathrm{x})$$

Les (N_k) sont les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction impaire de période $2L$ égales à $\frac{L}{c\pi}\beta(x)$, $0 \leq x \leq L$:

$$\mathrm{N_k} = \frac{2}{\mathrm{kc\pi}}\int_0^{\mathrm{L}} \beta(\mathrm{x})\ \sin\left(\frac{\mathrm{k\pi}}{\mathrm{L}}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} \qquad \text{(II.22)}$$

Application numérique d'une corde oscillatoire. *En utilisant la méthode de séparation des variables, résoudre l'équation des ondes suivante*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = 0\,, & t > 0 \\ u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = sin(\pi x)\,, & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

D'après l'équation (II.22), comme $\alpha(x) = sin(\pi x)$ *et* $k = 1$ $(L = 1)$, *on obtient immédiatement* $M_1 = 1$, *et* $M_k = 0$, *pour* $k \geq 2$. *Comme la vitesse initiale est nulle* $(\beta \equiv 0)$, *l'équation (II.22) donne* $N_k = 0$, *pour tout* k. *La série (II.20) se réduit donc à son unique premier terme :*

$$u(x,t) = cos(c\pi t)\ .sin(\pi x)$$

On vérifie que cette expression satisfait l'EDP $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$, *les conditions aux limites, ainsi que les deux conditions initiales* $\left((u(x,0) = sin(\pi x)\ et\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\right)$ *; la corde oscille avec la forme fixe d'un demi-sinus, de pulsation* $(c\pi)$.

Exercices — Méthode de séparation des variables

Exercice — Equation de Laplace, Equation des ondes. *En utilisant la méthode de séparation de variables, résoudre les EDP suivantes :*

Equation 1. Equation de Laplace sur un rectangle :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \in]0, a[, y \in]0, b[$$

$$u(0, y) = \alpha(y), \qquad u(a, y) = \beta(y)$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = 0$$

Equation 2. Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in]0, L[, \qquad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \alpha(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x)$$

Chapitre III

Méthodes des différences finies — *Résolution de l'équation parabolique*

Ce chapitre introduit les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), indispensables lorsque la solution analytique exacte est impossible ou trop coûteuse à obtenir. L'étude porte sur le principe de la méthode des différences finies (MDF), qui consiste à remplacer les dérivées d'une équation continue par des approximations algébriques issues du développement de Taylor. Après avoir rappelé les notions fondamentales de stabilité, de consistance et de convergence, indispensables pour garantir la validité de ces approximations, nous verrons comment ces notions sont mises en œuvre à travers les schémas temporels explicite, implicite et de Crank-Nicolson, appliqués à l'équation de diffusion (équation parabolique). Le chapitre se termine par la formulation matricielle de ces schémas et par l'intégration des conditions aux limites de deuxième espèce (conditions de Neumann).

III. 1 Principe de la méthode

La méthode des différences finies fournit une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles en subdivisant le domaine de calcul en un ensemble discret de points appelés nœuds, formant un maillage. Chaque nœud stocke la valeur, scalaire ou vectorielle, de la grandeur recherchée. La valeur en un nœud donné est calculée à partir des valeurs des nœuds voisins, au moyen d'approximations obtenues par développement de Taylor. La discrétisation de l'EDP sur l'ensemble des nœuds du maillage conduit ainsi à un système d'équations algébriques dont la résolution fournit la solution numérique du problème.

III.2 Etapes des méthodes des différences finies

La résolution d'un problème aux dérivées partielles par la méthode des différences finies suit quatre étapes successives : la construction du maillage, la prise en compte des conditions

initiales et aux limites, la discrétisation de l'équation par développement de Taylor, puis la résolution du système algébrique obtenu.

Etape 1 — Subdivision du domaine (construction du maillage).

Le domaine de calcul est subdivisé par un ensemble de lignes et de colonnes dont les intersections définissent les nœuds du maillage. L'espacement entre deux nœuds consécutifs, appelé pas de discrétisation, est noté Δx, Δy et Δz suivant les directions x, y et z respectivement. Chaque nœud est repéré par ses indices entiers (i, j, k), qui correspondent à sa position suivant chacune de ces directions.

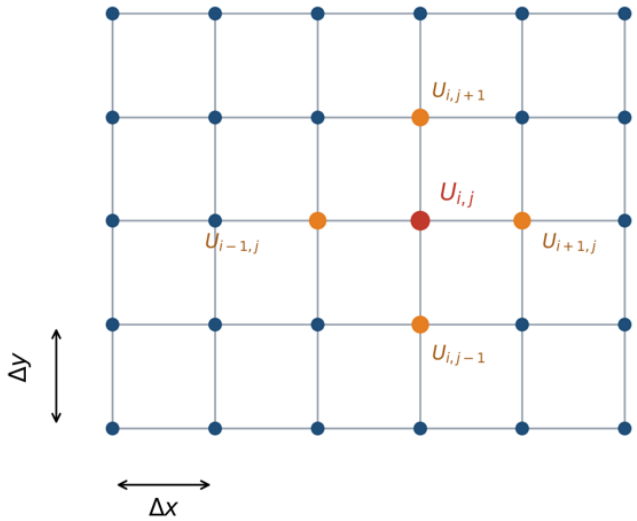


Figure (III.1) : Maillage uniforme du domaine de calcul

Remarque — Types de maillage

- *Maillage uniforme : le pas de discrétisation est constant entre tous les nœuds du domaine.*
- *Maillage non uniforme : le pas de discrétisation varie d'un nœud à l'autre du domaine.*

Etape 2 — Conditions initiales et conditions aux limites

La solution d'une EDP n'est déterminée de manière unique que si l'on précise, en plus de l'équation elle-même, une condition initiale (l'état du système à $t = 0$, pour un problème instationnaire) et des conditions aux limites sur la frontière du domaine. On distingue classiquement trois types de conditions aux limites :

- Condition de Dirichlet : la valeur de la grandeur U est imposée sur la frontière.
- Condition de Neumann : c'est le gradient (la dérivée normale) de U qui est imposé sur la frontière
- Condition de Cauchy (condition mixte) : une combinaison linéaire de U et de sa dérivée normale est imposée sur la frontière

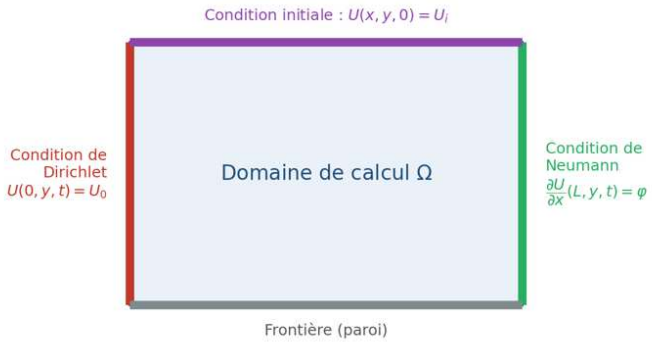


Figure (III.2) : Exemples de conditions aux limites associées aux frontières du domaine de calcul

Etape 3 — Discrétisation de l'EDP par développement de Taylor

L'approximation de la fonction $u(x, y)$ de deux variables indépendantes par la méthode des différences finies repose sur le développement de Taylor, qui permet d'approcher une fonction au voisinage d'un point de référence (x_0, y_0) par un polynôme dont les coefficients dépendent que des dérivées de la fonction en ce point.

Définition — Développement de Taylor à deux variables

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x, y \in I$, et $U: \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On fixe un entier naturel n. Supposons que U est une fonction de deux variables réelles, définie et continue et dérivable jusqu'à l'ordre n sur un intervalle I contenant (x_0, y_0) point en voisinage. Le développement de Taylor de U, à l'ordre n, au voisinage de (x_0, y_0) s'écrire :

$$U_{x,y} = \sum_{|k|=0}^{n} \frac{\overbrace{(x-x_0)^{k_2}}^{h_x^{k_1}} \overbrace{(y-y_0)^{k_2}}^{h_y^{k_2}}}{k_1!\ k_2!} \frac{\partial^{|k|} U_{x_0,y_0}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} + \left[\underbrace{\frac{1}{n!}\left(h_x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} + h_y^n \frac{\partial^n}{\partial y^n}\right) U_{x+\tau h_x, x+\eta h_y}}_{\varepsilon_n} \right], \tau \in]0,1[,\ \eta \in]0,1[\quad \text{(III.1)}$$

Tel que :

- $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$: est un multi-indice, $|k| = k_1 + k_2$ désigne l'ordre totale de dérivation
- $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$ sont les pas de discrétisation
- $\boldsymbol{\varepsilon_n}$: Reste, qui peut s'exprimer par :

$$\boldsymbol{\varepsilon_n} = O\left[\left(|h_x| + |h_y|\right)^n\right]$$

Et vérifie :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} |\varepsilon_n| = 0$$

- $\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\frac{(x-x_0)^{\boldsymbol{k_1}}(y-y_0)^{\boldsymbol{k_2}}}{\boldsymbol{k!}}\right)$: Polynôme de Taylor de U à l'ordre de n au point (x, y) par rapport au point de référence (x_0, y_0)
- Lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0). L'ordre de grandeur de ce reste s'exprime, pour un pas $h = max(|x - x_0|, |y - y_0|)$, par $\varepsilon_n = \mathrm{O}(h^{n+1})$.

Exemple *— Dans le cas particulier de l'ordre 2, le développement précédent se réduit à l'expression usuelle suivante, qui fait apparaître explicitement le terme croisé de dérivation :*

$$U_{x,y} \approx U_{x_0,y_0} + (x, x_0)\frac{\partial U}{\partial x} + (y, y_0)\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{(y - y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

À partir de ce développement, on obtient, par combinaison de développements de Taylor de la fonction discrète U aux nœuds voisins d'un nœud (i, j), des approximations algébriques des dérivées partielles de U. On note désormais h le pas de discrétisation suivant x (h = Δx) ; les approximations suivant y s'obtiennent de la même manière, par permutation des indices i et j.

a) Approximation de la dérivée première $\frac{\partial U}{\partial x}$:

En développant $U(i + 1, j)$ au voisinage de $U(i, j)$ et en négligeant les termes d'ordre 2 et plus, on obtient l'approximation à l'ordre 1 par différence progressive (ou avant) :

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial x} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + \varepsilon^2(Oh) \qquad \text{(III.2)}$$

De même, en développant $U(i-1,j)$ au voisinage de $U(i,j)$, on obtient l'approximation à l'ordre 1 par différence régressive (ou arrière) :

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial x} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + \varepsilon^2(Oh)$$

En combinant ces deux développements (par soustraction), on élimine le terme d'erreur d'ordre 1, ce qui conduit à l'approximation par différence centrée, précise à l'ordre 2 :

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial x} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\,h} + \varepsilon^2(Oh) \qquad \text{(III.3)}$$

Une approximation décentrée mais précise à l'ordre 2 peut également être construite à partir des développements de $U(i+1,j)$ et $U(i+2,j)$; on obtient, pour la différence progressive à 3 points :

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial x} = \frac{-3\,U_{i,j} + 4\,U_{i+1,j} + U_{i+2,j}}{2\,h} + \varepsilon^2(Oh) \qquad \text{(III.4)}$$

et, symétriquement, pour la différence régressive à 3 points :

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial x} = \frac{-3\,U_{i,j} - 4\,U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{2\,h} + \varepsilon^2(Oh) \qquad \text{(III.5)}$$

b) Approximation de la dérivée seconde $\partial^2 U/\partial x^2$

En développant $U(i+1,j)$ au voisinage de $U(i,j)$ à l'ordre 3, puis en combinant ce développement à celui de $U(i+2,j)$, on peut éliminer le terme en dérivée première et obtenir une approximation à 3 points, décentrée, de la dérivée seconde, précise à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{U_{i,j} - 2\,U_{i+1,j} + U_{i+2,j}}{h^2} + \varepsilon^2(Oh) \qquad \text{(III.6)}$$

Par un raisonnement symétrique à partir de $U(i-1,j)$ et $U(i-2,j)$, on obtient l'approximation régressive à 3 points, également précise à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{U_{i,j} - 2\,U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{h^2} + \varepsilon^2(Oh) \qquad \text{(III.7)}$$

Enfin, en additionnant les développements de $U(i+1,j)$ et $U(i-1,j)$ autour de $U(i,j)$, les termes de dérivée première et d'ordre 3 s'annulent, et l'on obtient l'approximation centrée, précise à l'ordre 2 (la plus utilisée en pratique) :

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \varepsilon^2(Oh) \qquad \text{(III.8)}$$

Remarque *— Les approximations des dérivées suivant la variable y $(\partial U/\partial y \;et\; \partial^2 U/\partial y^2)$ s'obtiennent exactement de la même manière, par développement de Taylor suivant y , en remplaçant l'indice i par l'indice j et le pas $h = \Delta x$ par le pas Δy.*

Etape 4 — Résolution du système algébrique. L'algorithme de Thomas (DTMA)

La discrétisation d'une EDP par différences finies conduit à un système d'équations linéaires dont la matrice est tri-diagonale : chaque équation ne fait intervenir que l'inconnue du nœud courant et celles de ses deux voisins immédiats. Ce type de système se résout de façon très efficace par l'algorithme de Thomas, ou TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm), qui est une forme simplifiée de l'élimination de Gauss adaptée à la structure tri-diagonale.

Soit un système de n équations à n inconnues U_1, U_2, …., U_n, dont la $i^{ème}$ équation s'écrit sous la forme générale :

$$C_i\,U_{i-1} + A_i\,U_i + B_i\,U_{i+1} = g_i$$

Où :

- A_i, B_i et C_i sont respectivement les coefficients diagonal, sur-diagonal et sous-diagonal de la matrice
- g_i le second membre (avec $C_1 = 0$ et $B_n = 0$ pour les deux équations de bord).

L'algorithme se déroule en deux balayages successifs :

- Balayage aller (élimination) — On construit deux suites auxiliaires P_i et Q_i, initialisées par :

$$P_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad Q_1 = \frac{g_1}{A_1}$$

puis, pour $i = 2, \ldots . n$:

$$P_i = \frac{B_i}{(A_i - C_i \,.\, P_{i-1})}$$

$$Q_i = \frac{(g_i - C_i.\ Q_{i-1})}{(A_i - C_i.\ P_{i-1})}$$

Ce balayage ramène la matrice tri-diagonale initiale à une matrice bi-diagonale supérieure, à diagonale unité, de second membre Q_i.

- Balayage retour (substitution) — Les inconnues sont ensuite calculées par ordre décroissant, de $i = n$ à $i = 1$:

$$U_n = Q_n\,, \quad U_i = Q_i - P_i\, U_{i+1}$$

Propriété. Algorithme de Thomas — Cet algorithme, dont le coût de calcul est proportionnel à n (contrairement à l'élimination de Gauss classique, de coût proportionnel à n^3), est systématiquement employé pour résoudre les systèmes tridiagonaux issus de la discrétisation des schémas implicites, qui seront présentés dans la section suivante appliquée à l'équation de diffusion.

III.3 Discrétisation de l'équation parabolique du second ordre à deux variables

L'équation aux dérivées partielles de type parabolique considérée ici correspond à un problème de conduction pure, instationnaire, unidimensionnelle :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,, 0 < L, t > 0$$

Une fois le domaine restructuré selon un maillage régulier, tous les termes dérivables de l'équation sont approchés, en chaque nœud interne, par l'une des approches de différences finies

(centrée, décentrée à droite ou décentrée à gauche) présentées au chapitre précédent. On obtient ainsi, pour chaque instant, un système de N équations algébriques à N , résolu par une méthode numérique directe (Gauss, Gauss-Jordan, méthode de Thomas ou TDMA pour les systèmes tri-diagonaux).

Trois schémas de base permettent de discrétiser ce type d'équation : le schéma explicite, le schéma implicite et le schéma de Crank-Nicolson. Ils diffèrent par l'instant auquel est évalué le terme de diffusion (spatial), ce qui conditionne directement leur stabilité, leur précision et la structure du système algébrique à résoudre.

III.4 Schéma explicite

III.4.1 Discrétisation de l'équation dans le domaine

Pour chaque nœud interne du domaine $(i = 2, \dots, N-1)$, les dérivées de l'équation parabolique sont remplacées par les approximations aux différences finies présentées au chapitre précédent. Le terme temporel $\partial U/\partial t$ est approché par une différence progressive, tandis que le terme spatial $\partial^2 U/\partial x^2$ est approché par une différence centrée, les deux étant évalués à l'instant n :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^n - 2\,U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

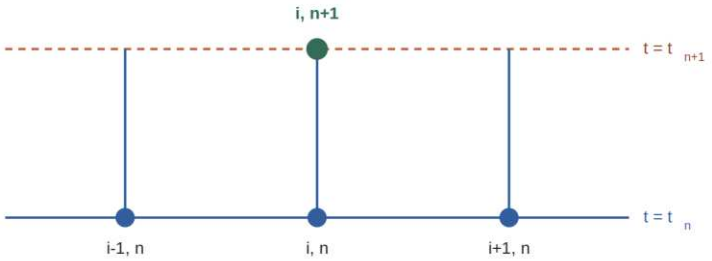


Figure (III.3) : Schéma de discrétisation explicite , la valeur inconnue au nœud $(i, n+1)$ est obtenue directement à partir des trois valeurs connues au temps n.

En posant $\lambda = \Delta t/\Delta x^2$, l'équation discrétisée devient :

$$U_i^{n+1} = \lambda\, U_{i-1}^n + (1 - 2\,\lambda)\, U_i^n + \lambda\, U_{i+1}^n \qquad \text{(III.9)}$$

Remarque – Condition de stabilité. *Le schéma explicite n'est stable que si le pas de temps satisfait : conditionnellement stable en satisfaisant la condition de* $\lambda = \Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$.

Cette contrainte impose un pas de temps très petit dès que le maillage spatial est raffiné, ce qui constitue le principal inconvénient du schéma explicite.

III.4.2 Discrétisation de l'équation aux bords du domaine

Aux nœuds limites (en $x = 0$, en $x = L$), l'équation fait intervenir des nœuds fictifs situés à l'extérieur du domaine ($i = 0$ et $i = N + 1$). Ces termes sont éliminés à l'aide de la condition aux limites, approchée soit par une différence centrée (précision d'ordre 2), soit par une différence décentrée avant/arrière (précision d'ordre 1), comme illustré à la figure III.4. Cette même technique du nœud fictif s'applique, sans changement de principe, aux schémas implicite et de Crank-Nicolson présentés aux paragraphes suivants.



(a) ***(b)***

Figure (III.4) : Bords du domaine : ***(a)*** *à gauche* $(x = 0)$ *avec nœud fictif* $(i = 0)$, ***(b)*** à droite $(\mathrm{x} = \mathrm{L})$ avec nœud fictif $(i = N + 1)$

Tableau (III.1) – Discrétisation du schéma explicite aux bords du maillage (conditions de Neumann et de Cauchy).

Condition		Position	Approche	Formule du schéma discrétisée
Neumann	$\partial U/\partial x = C$	$x = 0$	**Centrée :** $(U_2^n - U_0^n)/2\,\Delta x = C$	$U_1^{n+1} = 2\,\lambda\,U_2^n + (1 - 2\,\lambda)\,U_1^n - 2\,\lambda\,\Delta x\,C$
		$x = 0$	**Décentrée avant :** $(U_1^n - U_0^n)/\,\Delta x = C$	$U_1^{n+1} = \lambda\,U_2^n + (1 - \lambda)\,U_1^n - \lambda\,\Delta x\,C$
	$\partial U/\partial x = -C$	$x = L$	**Centrée :** $(U_{L+1}^n - U_{L-1}^n)/2\,\Delta x = -C$	$U_L^{n+1} = 2\,\lambda\,U_{L-1}^n + (1 - 2\,\lambda)\,U_L^n - 2\,\lambda\,\Delta x\,C$
		$x = L$	**Décentrée arrière :** $(U_{L+1}^n - U_L^n)/\,\Delta x = -C$	$U_L^{n+1} = \lambda\,U_{L-1}^n + (1 - \lambda)\,U_L^n - \lambda\,\Delta x\,C$
Cauchy	$\partial U/\partial x = U$	$x = 0$	**Centrée :** $(U_2^n - U_0^n)/2\,\Delta x = U_1^n$	$U_1^{n+1} = 2\,\lambda\,U_2^n + \big(1 - 2\lambda\,(1 + \Delta x)\big)\,U_1^n$
		$x = 0$	**Décentrée avant :** $(U_1^n - U_0^n)/\,\Delta x = U_1^n$	$U_1^{n+1} = 2\,\lambda\,U_2^n + (1 - \lambda(1 + \Delta x))\;U_1^n$
	$\partial U/\partial x = -U$	$x = L$	**Centrée :** $(U_{L+1}^n - U_{L-1}^n)/\,2\,\Delta x = -U_L^n$	$U_L^{n+1} = 2\,\lambda\,U_{L-1}^n + (1 - 2\,\lambda(1 + \Delta x))\,U_L^n$
		$x = L$	**Décentrée arrière :** $(U_{L+1}^n - U_L^n)/\,\Delta x = -U_L^n$	$U_L^{n+1} = 2\,\lambda\,U_{L-1}^n + (1 - \lambda(1 + \Delta x))\,U_L^n$

III.5 Schéma implicite

III.5.1 Discrétisation de l'équation dans le domaine

De la même façon, l'équation EDP est discrétisée par différences finies, mais le terme spatial $\partial^2 U/\partial x^2$ est cette fois évalué à l'instant $n+1$:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2\,U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

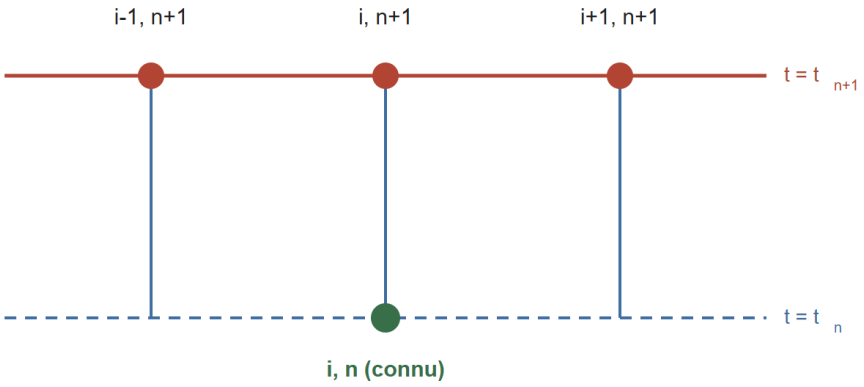


Figure (III.5) : Schéma de discrétisation implicite, les trois valeurs inconnues au temps $n+1$ dépendent de la seule valeur connue au nœud (i, n).

Soit, après réarrangement des inconnues au temps $n+1$ dans le membre de gauche :

$$U_i^n = -\lambda\, U_{i+1}^{n+1} + (1 + 2\,\lambda) U_i^{n+1} - \lambda\, U_{i-1}^{n+1} \qquad \text{(III.10)}$$

Remarque – stabilité inconditionnelle. *Contrairement au schéma explicite, le schéma implicite est inconditionnellement stable : le facteur d'amplification vérifie $|g| \leq 1$ quelle que soit la valeur de λ (voir § III.7.2). Cette propriété autorise des pas de temps beaucoup plus grands, au prix de la résolution, à chaque instant, d'un système linéaire tri-diagonal complet*

III.5.2 Discrétisation de l'équation aux bords du domaine

Le même principe de nœud fictif est appliqué, la condition aux limites étant ici exprimée à l'instant $n+1$ (tableau III.2).

Tableau (III.2) – Discrétisation du schéma implicite aux bords du maillage (conditions de Neumann et de Cauchy).

Condition		Position	Approche	Formule du schéma discrétisée
Neumann	$\partial U/\partial x = C$	$x = 0$	**Centrée :** $\frac{(U_2^{n+1} - U_0^{n+1})}{2\,\Delta x} = C$	$U_1^n = -2\,\lambda\,U_2^{n+1} + (1 + 2\,\lambda)\,U_1^{n+1} - 2\,\lambda\,\Delta x\,C$
		$x = 0$	**Décentrée avant :** $\frac{(U_1^{n+1} - U_0^{n+1})}{\Delta x} = C$	$U_1^n = -\lambda\,U_2^{n+1} + (1 + \lambda)\,U_1^{n+1} - \lambda\,\Delta x\,C$
	$\partial U/\partial x = -C$	$x = L$	**Centrée :** $\frac{(U_{L+1}^{n+1} - U_{L-1}^{n+1})}{2\,\Delta x} = -C$	$U_L^n = -2\,\lambda\,U_{L-1}^{n+1} + (1 + 2\,\lambda)\,U_L^{n+1} - 2\,\lambda\,\Delta x\,C$
		$x = L$	**Décentrée arrière :** $\frac{(U_{L+1}^{n+1} - U_L^{n+1})}{\Delta x} = -C$	$U_L^n = -\lambda\,U_{L-1}^{n+1} + (1 + \lambda)\,U_L^{n+1} - \lambda\,\Delta x\,C$
Cauchy	$\partial U/\partial x = U$	$x = 0$	**Centrée :** $\frac{(U_2^{n+1} - U_0^{n+1})}{2\,\Delta x} = U_1^{n+1}$	$U_1^n = -2\,\lambda\,U_2^{n+1} + \left(1 + 2\lambda\,(1 + \Delta x)\right)U_1^{n+1}$
		$x = 0$	**Décentrée avant :** $\frac{(U_1^{n+1} - U_0^{n+1})}{\Delta x} = U_1^{n+1}$	$U_1^n = -2\,\lambda\,U_2^{n+1} + (1 + \lambda(1 + \Delta x))\,U_1^{n+1}$
	$\partial U/\partial x = -U$	$x = L$	**Centrée :** $\frac{(U_{L+1}^{n+1} - U_{L-1}^{n+1})}{2\,\Delta x} = -U_L^{n+1}$	$U_L^n = -2\,\lambda\,U_{L-1}^{n+1} + (1 + 2\,\lambda(1 + \Delta x))\,U_L^{n+1}$
		$x = L$	**Décentrée arrière :** $\frac{(U_{L+1}^{n+1} - U_L^{n+1})}{\Delta x} = -U_L^{n+1}$	$U_L^n = -2\,\lambda\,U_{L-1}^{n+1} + (1 + \lambda(1 + \Delta x))\,U_L^{n+1}$

III.5.3 Formulation matricielle du système implicite

À chaque instant $n + 1$, l'ensemble des équations (nœuds internes et nœuds limites) constitue un système linéaire de N équations à N inconnues, de structure tri-diagonale :

$$A\ U^{n+1} = U^j + b$$

Ou :

- A : est une matrice tridiagonale
- U^{n+1} : le vecteur des inconnues au temps $n + 1$
- b : le vecteur regroupant les termes connus liés aux conditions aux limites.

Ce système est résolu efficacement par l'algorithme de Thomas (méthode tri-diagonale directe, TDMA), en $O(N)$ opérations, à chaque pas de temps.

III.6 Schéma de Crank-Nicolson

III.6.1 Discrétisation de l'équation dans le domaine

L'application des deux méthodes explicite et implicite au même temps consiste à additionner les deux méthodes menant alors à approcher les valeurs de la fonction U en $\frac{\Delta t}{2}$, on obtient :

Le schéma de Crank-Nicolson consiste à moyenner les approximations spatiales des schémas explicite et implicite, c-à-d à évaluer le terme de diffusion au temps intermédiaire $n + 1/2$:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - 2\,U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+1}^{n} - 2\,U_i^{n} + U_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}\right)$$

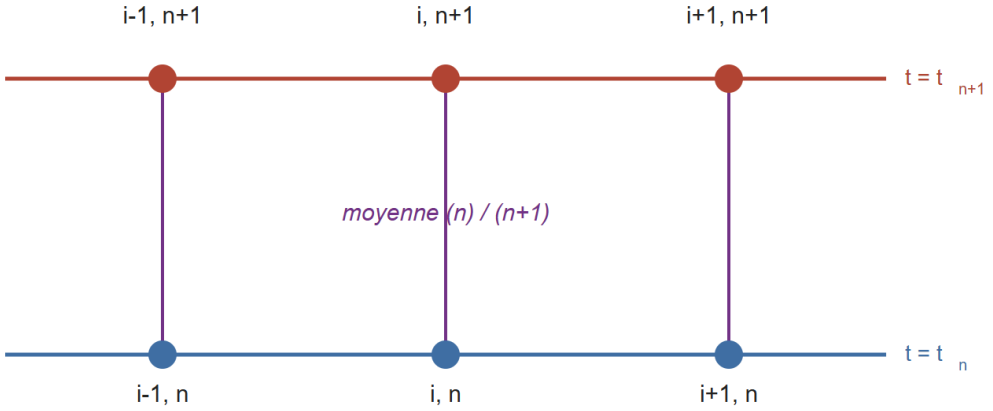


Figure (III.6) : Schéma de discrétisation Crank-Nicolson, moyenne des valeurs inconnues entre les temps n et $n + 1$.

Soit, après multiplication par 2 et regroupement des inconnues au temps $n + 1$:

$$-\lambda\, U_{i+1}^{n+1} + 2(1+\lambda)U_i^{n+1} - \lambda\, U_{i-1}^{n+1} = \lambda\, U_{i+1}^{n} + 2(1-\lambda)U_i^{n} + \lambda\, U_{i-1}^{n} \qquad \text{(III.11)}$$

Remarque – Précision et stabilité. *Le schéma de Crank-Nicolson est inconditionnellement stable et sa précision est du second ordre en temps (l'erreur de troncature en Δt est nettement plus faible que dans les schémas explicite et implicite, tous deux du premier ordre en temps). C'est le schéma le plus utilisé en pratique lorsque la précision temporelle est déterminante.*

III.6.2 Discrétisation de l'équation aux bords du domaine

Tableau (III.3) – Discrétisation du schéma Crank-Nicolson aux bords du maillage (conditions de Neumann et de Cauchy).

Condition		Position	Approche	Formule du schéma discrétisée
Neumann	$\partial U/\partial x = C$	$x = 0$	**Centrée :** $\frac{(U_2^n - U_0^n)}{2\,\Delta x} = C$; $\frac{(U_2^{n+1} - U_0^{n+1})}{2\,\Delta x} = C$	$-2\,\lambda\,U_2^{n+1} + 2(1+\lambda)\,U_1^{n+1} = 2\,\lambda\,U_2^n + 2(1-\lambda)\,U_1^n - 4\,\lambda\,\Delta x\,C$
		$x = 0$	**Décentrée avant :** $\frac{(U_1^n - U_0^n)}{\Delta x} = C$; $\frac{(U_1^{n+1} - U_0^{n+1})}{\Delta x} = C$	$-\lambda\,U_2^{n+1} + (2+\lambda)\,U_1^{n+1} = \lambda\,U_2^n + (2-\lambda)\,U_1^n - 2\,\lambda\,\Delta x\,C$
	$\partial U/\partial x = -C$	$x = L$	**Centrée :** $\frac{(U_{L+1}^n - U_{L-1}^n)}{2\,\Delta x} = -C$; $\frac{(U_{L+1}^{n+1} - U_{L-1}^{n+1})}{2\,\Delta x} = -C$	$-2\,\lambda\,U_{L-1}^{n+1} + 2(1+\lambda)\,U_L^{n+1} = 2\,U_{L-1}^n + 2(1-\lambda)\,U_L^n - 4\,\lambda\,\Delta x\,C$
		$x = L$	**Décentrée arrière :** $\frac{(U_{L+1}^n - U_L^n)}{\Delta x} = -C$; $\frac{(U_{L+1}^{n+1} - U_{L,j+1}U_L^{n+1})}{\Delta x} = -C$	$-\lambda\,U_{L-1}^{n+1} + (2+\lambda)\,U_L^{n+1} = \lambda\,U_{L-1}^n + (2-\lambda)\,U_L^n - 2\,\lambda\,\Delta x\,C$
Cauchy	$\partial U/\partial x = U$	$x = 0$	**Centrée :** $\frac{(U_2^n - U_0^n)}{2\,\Delta x} = U_1^n$; $\frac{(U_2^{n+1} - U_0^{n+1})}{2\,\Delta x} = U_1^{n+1}$	$-2\lambda\,U_2^{n+1} + (2 + 2\lambda(1+\Delta x))\,U_1^{n+1} = 2\lambda\,U_2^n + (2 - 2\lambda(1+\Delta x))\,U_1^n$
		$x = 0$	**Décentrée avant :** $\frac{(U_1^n - U_0^n)}{\Delta x} = U_1^n$; $\frac{(U_1^{n+1} - U_0^{n+1})}{\Delta x} = U_1^{n+1}$	$-2\lambda\,U_2^{n+1} + (2 + \lambda(2+\Delta x))\,U_1^{n+1} = 2\lambda\,U_2^n + (2 - \lambda(2+\Delta x))\,U_1^n$
	$\partial U/\partial x = -U$	$x = L$	**Centrée :** $\frac{(U_{L+1}^n - U_{L-1}^n)}{2\,\Delta x} = -U_L^n$; $\frac{(U_{L+1}^{n+1} - U_{L-1}^{n+1})}{2\,\Delta x} = -U_L^{n+1}$	$-2\lambda\,U_{L-1}^{n+1} + (2 + 2\lambda(1+\Delta x))\,U_L^{n+1} = 2\lambda\,U_{L-1}^n + (2 - 2\lambda(1+\Delta x))\,U_L^n$
		$x = L$	**Décentrée arrière :** $\frac{(U_{L+1}^n - U_L^n)}{\Delta x} = -U_L^n$; $\frac{(U_{L+1}^{n+1} - U_L^{n+1})}{\Delta x} = -U_L^{n+1}$	$-2\lambda\,U_{L-1}^{n+1} + (2 + \lambda(2+\Delta x))\,U_L^{n+1} = 2\lambda\,U_{L-1}^n + (2 - \lambda(2+\Delta x))\,U_L^n$

III.6.3 Formulation matricielle du système Crank-Nicolson

Comme pour le schéma implicite, le système s'écrit sous forme matricielle tri-diagonale à chaque pas de temps :

$$A\ U^{n+1} = B\ U^{n} + b$$

Ou :

- A, B : deux matrices tri-diagonale constantes (indépendantes du temps). La résolution, à chaque itération, se ramène donc également à un système tri-diagonal traité par l'algorithme de Thomas.

III.7 Propriétés associés aux méthodes numériques des EDP

La qualité d'un schéma aux différences finies est caractérisée par trois propriétés complémentaires : la consistance, la stabilité et la convergence.

III.7.1 Consistance (erreur de troncature locale)

Définition—La consistance vérifie que le schéma numérique reproduit bien l'équation différentielle lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro. Soit une EDP notée $L(U) = 0$, où U est la solution exacte, et son approximation discrète $L_{h_x,h_t}(\widetilde{U}) = 0$, où $\widetilde{U}$ est la solution numérique, et h_x, h_t représentent respectivement le pas à x et t. L'erreur de consistance (ou erreur de troncature locale) est la différence entre le schéma numérique appliqué à la solution exacte U et l'équation différentielle continue définie par :

$$|\mathcal{E}| = \left|\boldsymbol{L_{h_x,h_t}(U) - L(U)}\right|$$

Le schéma est dit consistant si :

$$\boldsymbol{lim|\mathcal{E}| = 0, (\ quand\ h_x \to 0\ et\ h_t \to 0\ )}$$

Pour les trois schémas présentés, un développement de Taylor des termes discrétisés autour du nœud (i, n) montre que :

- Le schéma **explicite** est consistant à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace : ordre $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$
- Le schéma **implicite** possède le même ordre de consistance : $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$
- le schéma de **Crank-Nicolson** est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace : $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$, ce qui explique sa meilleure précision.

III.7.2 Stabilité

Définition. En pratique, les valeurs numériques obtenues $\widetilde{U}_i^n$ (entachées d'une perturbation) diffèrent des valeurs U_i^n réellement calculées. Cette perturbation provient de deux sources : la précision finie de la machine de calcul (erreur d'arrondi $\left|U_i^n - \widetilde{U}_i^n\right|$, pouvant atteindre une valeur relative de l'ordre de $1O^{-9}$), et l'incertitude expérimentale sur la condition initiale U_i^0, remplacée par une valeur mesurée $\widetilde{U}_i^0$. Un schéma est dit stable si ces perturbations restent bornées au cours du calcul, sans s'amplifier de façon incontrôlée.

La stabilité peut être étudiée par deux méthodes :

- L'analyse matricielle, fondée sur l'étude des valeurs propres de la matrice d'itération
- L'analyse de Von Neumann, qui suppose que la solution numérique se propage sous forme d'une onde plane de Fourier :

$$U_i^n = g^i \, e^{\boldsymbol{K}n\theta}, \; |g| \leq 1$$

Où :

- g: est facteur d'amplification d'onde
- $\boldsymbol{K}^2$: nombre complexe (-1)
- θ: est la phase discrète $(0 \leq \theta \leq \pi)$

L'application de ce critère aux trois schémas donne :

- schéma explicite : $g = 1 - 4\lambda \sin^2(\theta/2)$, stable si et seulement si $\lambda \leq 1/2$
- schéma implicite : $g = 1/(1 + 4\lambda \sin^2(\theta/2))$, stable quel que soit λ (schéma inconditionnellement stable)
- schéma de Crank-Nicolson : $g = (1 - 2\lambda \sin^2(\theta/2))/(1 + 2\lambda \sin^2(\theta/2))$, également inconditionnellement stable.

Remarque. *La méthode de Von Neumann présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte les conditions aux limites de l'équation ; elle renseigne uniquement sur la stabilité du schéma dans le domaine intérieur.*

III.7.3 Convergence (erreur globale)

Définition et theoreme de Lax. Un schéma numérique est dit convergent si, pour toute solution exacte $U(x,t)$ définie sur $\Omega \times [t_0,\ t_0+T]$ et toute suite U_i^n solution du schéma numérique :

$$\boldsymbol{lim}\ \underbrace{|\boldsymbol{U(x,t)-U_i^n}|}_{\boldsymbol{erreur\ globale}} = \boldsymbol{0}, (\boldsymbol{quand\ h_x \to 0\ et\ h_t\ \to 0}\ )$$

Cette limite représente l'erreur globale du schéma. Le théorème de Lax-Richtmyer énonce que, pour un problème linéaire bien posé, un schéma consistant est convergent si et seulement s'il est stable. C'est ce théorème qui justifie, dans la pratique, de se limiter à l'étude séparée de la consistance et de la stabilité plutôt qu'à celle, plus difficile, de la convergence elle-même.

III.8 Schéma classique en multidimensionnel (à 5 points)

Considérons l'équation aux dérivées partielles parabolique en deux dimensions (2D) simplifiée EDP :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

III.8.1 Discrétisation de EDP par le schéma explicite

L'évaluation des termes Laplaciens à l'instant n par le schéma explicite donne :

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \lambda_x\left(U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n\right) + \lambda_y\left(U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n\right) \qquad \text{(III.12)}$$

où l'on pose les coefficients de diffusion : $\lambda_x = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$, et $\lambda_y = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}$

Remarque – Condition de stabilité en 2D et 3D. L'analyse de Von Neumann montre que la condition de stabilité est beaucoup plus restrictive qu'en 1D. si $\Delta x = \Delta y$, il faut que :

$$\lambda_x + \lambda_y \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4\alpha}$$

En 3D, la condition devient : $\lambda \leq \frac{1}{6}$ soit $\left(\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{6\alpha}\right)$. Le pas de temps admissible devient donc extrêmement petit, ce qui rend les calculs très coûteux en dimension supérieure à 1.

III.8.2 Discrétisation de EDP par le schéma implicite

Pour s'affranchir de cette restriction, on peut utiliser un schéma implicite en évaluant les dérivées spatiales à l'instant l'instant $(n+1)$:

$$U_{i,j}^{n} = U_{i,j}^{n+1} - \lambda_x\left(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}\right) - \lambda_y\left(U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{(i,j-1)}^{n+1}\right) \qquad \text{(III.13)}$$

Pour résoudre ce système, il faut transformer la grille 2D en un seul grand vecteur inconnu U de taille $\left(M_x \times M_y\right)$.

D'où : M_x et N_x y étant respectivement le nombre de nœuds dans les directions x et y.

Remarque. *Quel que soit le sens de numérotation retenu pour transformer la grille en vecteur (ligne par ligne ou colonne par colonne), les indices* $(j+1)$ *et* $(j-1)$ *se retrouvent nécessairement éloignés de l'indice central* j *dans le vecteur, contrairement aux indices* $(j+1)$ *et* $(j-1)$ *qui reste adjacents.*

La matrice du système n'est plus triangulaire : elle devient penta-diagonale (2D) ou hepta-diagonale (3D) avec une large bande de zéros entre les diagonales non nulles. L'algorithme de Thomas ne s'applique plus. Inverser cette matrice nécessite des méthodes itératives plus coûteuses comme ; (Gauss-Seidel, Gradient Conjugué), très gourmandes en calcul. Pour cela la solution figure dans la méthode ADI (Alternating Direction Implicit).

a) Méthode ADI (Alternating Direction Implicit)

La méthode ADI résout brillamment ce problème. Elle conserve la stabilité inconditionnelle du schéma implicite tout en permettant d'utiliser l'algorithme de Thomas (calcul ultra-rapide sur système tri-diagonaux). Le principe est de découper la transition de l'instant (n) à l'instant $(n+1)$ en deux étapes intermédiaires séparées par un demi-pas de temps $\Delta t/2$:



(a) *(b)*

Figure (III.7) : Principe de la méthode ADI , ***(a)*** *Balayage imlicite selon x à l'étape* 1, ***(b)*** *Balayage implicite selon y à l'étape* 2.

Etape 1 – Direction x implicite (du temps n au temps $(n+1/2)$. Les dérivées selon x sont traitées de manière implicite, celles selon y de manière explicite :

$$\frac{\left(U_{i,j}^{n+1/2}-U_{i,j}^{n}\right)}{\Delta t/2}=\alpha\left[\frac{U_{i+1,j}^{n+1/2}-2U_{i,j}^{n+1/2}+U_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}+\frac{U_{i,j+1}^{n}-2U_{i,j}^{n}+U_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right]$$

En regroupant les inconnues au temps $n+1/2$ à gauche :

$$-\frac{\lambda_x}{2}U_{i-1,j}^{n+1/2}+(1+\lambda_x)U_{i,j}^{n+1/2}-\frac{\lambda_x}{2}U_{i+1,j}^{n+1/2}=\frac{\lambda_y}{2}U_{i,j-1}^{n}+\left(1-\lambda_y\right)U_{i,j}^{n}+\frac{\lambda_y}{2}U_{i,j+1}^{n} \qquad \text{(III.14)}$$

Remarque. *Pour une ligne (j) fixée, cette équation est strictement tridagonale par rapport à l'indice (i) . on résout M_y systèmes tridiagonaux indépendants, chacun de taille M_x , à l'aide de l'algorithme de Thomas.*

Etape 2 – Direction y implicite (du temps $n+1/2$ au temps $(n+1)$. On inverse les rôles : les dérivées selon y deviennent implicites et celles selon x explicite :

$$\frac{\left(U_{i,j}^{n+1}-U_{i,j}^{n+1/2}\right)}{\Delta t/2}=\alpha\left[\frac{U_{i+1,j}^{n+1/2}-2U_{i,j}^{n+1/2}+U_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2}+\frac{U_{i,j+1}^{n+1}-2U_{i,j}^{n+1}+U_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right]$$

En regroupant les inconnues au temps $(n+1)$ à gauche :

$$-\frac{\lambda_y}{2}U_{i,j-1}^{n+1}+\left(1+\lambda_y\right)U_{i,j}^{n+1}-\frac{\lambda_y}{2}U_{i,j+1}^{n+1}=\frac{\lambda_x}{2}U_{i-1,j}^{n+1/2}+(1-\lambda_x)U_{i,j}^{n+1/2} \qquad \text{(III.15)}$$

$$+\frac{\lambda_x}{2}U_{i+1,j}^{n+1/2}$$

Remarque. *Pour une colonne (i) fixée, cette équation est strictement tri-diagonale par rapport à l'indice (j). On résout M_x systèmes tridiagonaux indépendants, chacun de taille M_y.*

Exercices — Équations aux Dérivées Partielles Paraboliques

Exercice 1. *Soit la fonction* $f(x,y) = e^{x+y}$, *simple et analytique. On se propose de construire son développement de Taylor au voisinage du point de référence* $(x_0\ ,\ y_0) = (0\ ,0)$, *aux ordres* $n = 2$ *et* $n = 3$, *pour un pas de* $h_x = 1$ *et* $h_y = 1$, *puis d'évaluer ce développement au point* $(x\ ,\ y) = (0.1\ ,0.1)$ *et de comparer le résultat à la valeur exacte.*

Exercice 2. *Considérons un système de 4 équations à 4 inconnus de la fonction T :*

$$\begin{cases} -2\,T_1 + T_2 = -100 \\ T_1 - 2T_2 + T_3 = 0 \\ T_2 - 2T_3 + T_4 = 0 \\ T_3 - 2T_4 = -500 \end{cases}$$

Résoudre ce système d'équation en utilisant l'algorithme de Thomas

Exercice 3. *Afin d'illustrer la mise en œuvre du schéma explicite, on considère une barre unidimensionnelle de longueur* $L = 1$, *discrétisée en* $N = 3$ *nœuds internes* $(\Delta x = 0.25)$, *avec une condition initiale et des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :*

$$U_i^0 = sin(\pi\, x_i),\ U_1^k = U_N^k = 0 \text{ pour } k$$

On choisit $\Delta t = 0.03$, *de sorte que* $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0.03}{0.0625} = 0.48 < 0.5$ *: la condition de stabilité du schéma explicite est satisfaite.*

1. *Compléter le calcul de U dans le tableau suivant :*

i	1	2	3	4	5
x	0	0.25	0.5	0.75	1
U_i^0	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0
U_i^1	0	$\boldsymbol{U_2^1}$	$\boldsymbol{U_3^1}$	$\boldsymbol{U_4^1}$	0
U_i^2	0	$\boldsymbol{U_2^2}$	$\boldsymbol{U_3^2}$	$\boldsymbol{U_4^3}$	0

2. *Le même exemple peut être repris avec le schéma implicite ou de Crank-Nicolson*
3. *comparer les trois solutions numériques à un même instant t pour un même λ, puis de faire croître λ au-delà de 0.5 afin d'observer expérimentalement l'instabilité du schéma explicite.*

Exercice 4. *Soit l'équation aux dérivées partielles (EDP) :*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Étudier les propriétés (consistance, stabilité, convergence) associées aux schémas numériques des différences finies suivants :

- *Schéma explicite*
- *Schéma implicite*
- *Schéma de Crank-Nicolson*

Exercice 5. *On considère par ailleurs le problème du transfert de chaleur dans une barre de fer, dont les extrémités sont maintenues aux conditions initiales et aux limites suivantes :*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, 0 < x < 1$$

$$T(x,0) = 0°C,$$

$$à\ t = 0\ ,\ 0 \leq x \leq 1$$

$$T(0,t) = 100°C,\quad à\ x = 0\ ,\ 0 < t < k$$

$$T(1,t) = 100°C,\quad à\ x = 1\ ,\ 0 < t \leq k$$

Partie (I) : *Déterminer, à l'aide du schéma explicite de la méthode des différences finies (M.D.F), la température le long de la barre à l'instant $t = 0.03\ s$, pour un pas d'espace $\Delta x = 0.2$ et un pas de temps $\Delta t = 0.01\ s$.*

Partie (II) : *Si la barre est isolée en $x = 0$, refaire les calculs en utilisant les schémas numériques suivants:*

a. *Expression du schéma explicite (approche centrée)*

b. *Expression du schéma explicite (approche à gauche)*

Exercice 6. *Les extrémités d'une barre sont mises en contact avec des blocs de glace à* $0\ °C$. *Sachant que l'équation aux dérivées partielles de la distribution de température est donnée sous la forme adimensionnelle suivante :*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, 0 < x < 1$$

$$T(x,0) = 2x, \text{ à } t = 0\ ,\ 0 \leq x \leq 1/2$$

$$T(x,0) = 2(1-x), \text{ à } t = 0\ ,\ 1/2 \leq x \leq 1$$

$$T(0,t) = 0, \quad \text{à } x = 0\ ,\ t > 0$$

$$T(1,t) = 0, \quad \text{à } x = 1\ ,\ t > 0$$

Déterminer, par la méthode de Crank-Nicolson, la solution de l'équation à l'instant $t = 0.002\ s$, *pour* $\Delta x = 0.1$ *et* $\Delta t = 0.001\ s$.

Exercice 7. *Une équation aux dérivées partielles de type parabolique en fonction des conditions initiales et aux limites est donnée comme suit :*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, 0 < x < 1$$

$$U(x,0) = 1, \text{ à } t = 0\ ,\ 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U, \text{ à } x = 0\ ,\ 0 < t \leq 0.01$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -U, \quad \text{à } x = 1\ ,\ 0 < t \leq 0.01$$

Pour un pas $\Delta x = 0.1$ *et* $\Delta t = 0.0025\ s$, *résoudre le problème posé par la méthode implicite :*

- *En approchant les conditions aux limites par les différences centrées*
- *En approchant les conditions aux limites par les différences à droite et à gauche*

Chapitre IV

Equation Elliptique — Laplace / Poisson

Ce chapitre est dédié à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques bidimensionnelles et très dimensionnelles, à travers l'étude approfondie de l'équation de Laplace et de son extension, l'équation de Poisson**.**

Nous aborderons en premier lieu la construction algébrique du problème à travers la formulation classique à cinq points et à neuf points issue de la méthode des différences finies, qui permet de discrétiser l'opérateur de Laplace sur une grille bidimensionnelle régulière. Afin de coller aux réalités physiques, l'accent sera mis sur la prise en compte de conditions de Dirichlet variables le long des frontières du domaine, ainsi que sur l'intégration des conditions de Neumann (liées aux flux) et de Cauchy (mixte).

Face aux grands systèmes linéaires générés par ces discrétisations, nous explorerons les principales méthodes de résolution directes et itératives adaptées à leur structure particulière. Nous généraliserons ensuite l'approche à l'équation de Poisson, qui intègre un terme source non nul, avant d'étendre la formulation aux problèmes multidimensionnels (3D).

IV. 1 Problème posé

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $x, y \in \boldsymbol{\Omega}$, *et* $\boldsymbol{U}: \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction, l'EDP de* $\boldsymbol{U}$ *pour les variables* x, y *de type elliptique s'écrit :*

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(IV.1)}$$

IV.2 Discrétisation de EDP pour les nœuds internes du maillage

On discrétise le domaine Ω par un maillage régulier de pas Δx suivant x et Δy suivant y. Le nœud générique est noté (i, j), auquel correspond la valeur approchée $U_{i,j} \approx U(x_i, y_j)$. Pour chaque nœud interne du domaine, les dérivées secondes de l'équation elliptique sont remplacées par les approximations à l'ordre 2 par différences finies centrées :

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2\,U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

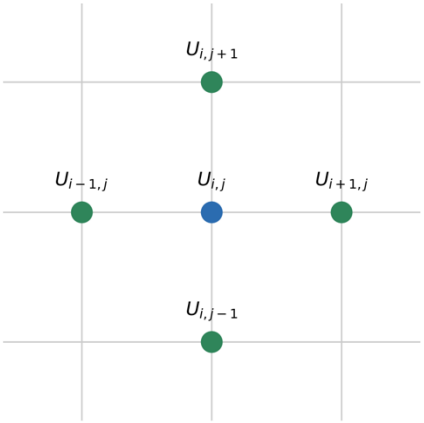


Figure (IV.1) : Schéma numérique des MDF centrées à 5 nœuds : nœud central et ses quatre voisins

En remplaçant les termes discrétisés dans l'équation elliptique, on obtient le schéma à 5 points :

$$U_{i+1,j} - 2(1 + \lambda^2)U_{i,j} + U_{i-1,j} + \lambda^2(U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) = 0 \qquad \text{(IV.2)}$$

Avec $\lambda = \Delta x/\Delta y$, le rapport de maillage. Lorsque le maillage est carré ($\Delta x = \Delta y$, soit $\lambda = 1$), le schéma se simplifie en moyenne des quatre voisins :

$$U_{i,j} = \big(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}\big)/4$$

Propriété — Principe du maximum discret. Le schéma à 5 points ci-dessus exprime que la valeur en tout nœud interne est égale à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins directs.

Ce résultat est l'analogue discret de la propriété de la moyenne des fonctions harmoniques et garantit que la solution numérique ne présente ni maximum ni minimum strict à l'intérieur du domaine : les extrema sont nécessairement atteints sur la frontière $\partial\Omega$.

L'application de ce schéma à chacun des nœuds internes du maillage conduit à un système linéaire creux de N équations à N inconnues, où N est le nombre de nœuds internes. La matrice associée est symétrique, à diagonale dominante, et présente une structure bande caractéristique (pentadiagonale pour une numérotation par lignes).

IV.3 Discrétisation de l'EDP pour les nœuds situés sur les bords du domaine

La discrétisation de l'équation sur les bords du domaine nécessite d'introduire les conditions aux limites, qui permettent d'éliminer les termes faisant intervenir des nœuds fictifs situés à l'extérieur du domaine. On distingue trois types classiques de conditions aux limites :

IV.3.1 Conditions de Dirichlet variables

Lorsque les conditions de Dirichlet sont directement disponibles sur tous les nœuds de frontières, aucune discrétisation supplémentaire n'est nécessaire : ces valeurs sont introduites telles quelles comme termes connus (second membre) dans le système linéaire des nœuds internes.

Exemple d'application — Condition de Dirichlet variables. *Déterminer le champ des valeurs prises par la fonction* $T(x,y)$ *dans le domaine carrée* $[0,5] \times [0,5]$, *pour un pas identique* $\Delta x = \Delta y = 1$, *solution de l'équation de Laplace :*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

avec les conditions aux limites suivantes :

- $T = 0\ °C$, à $x = 0$, $\forall y$
- $T = 0°C$, à $y = 0$, $\forall x$
- $T = x^3$, à $y = 5$, $\forall x$
- $T = 16\ y$, à $x = 5$, $\forall y$

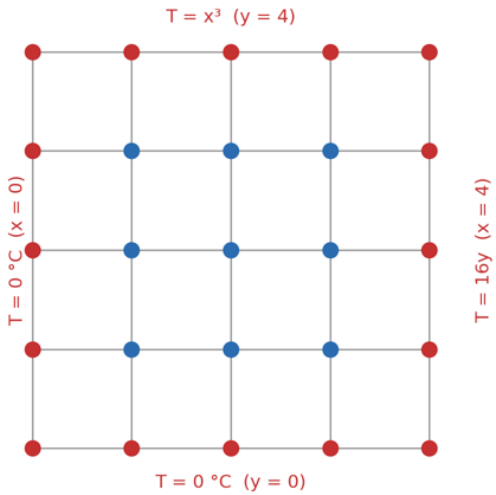


Figure (IV.2) : *Maillage* 5×5 *et conditions aux limites de l'exemple traité*

Le maillage comporte 25 *nœuds* (5×5)*, dont* 9 *nœuds internes inconnus* $U_{i,j}$ *et* 16 *nœuds de frontières connus présenté respectivement dans la figure (IV.2) en bleu et en rouge, et le schéma à* 5 *points se réduit pour chaque nœud interne à :*

$$U_{i+1,j} - 4\,U_{i,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} = 0$$

Les valeurs frontières se déduisent directement des conditions aux limites $(avec\ i,j \in \{1,2,3,4,5\})$ *:*

- $U_{1,j} = 0$ *pour* $j = 1 \dots 5$ *(bord gauche à* $x = 0$*)*
- $U_{i,1} = 0$ *pour* $i = 1 \dots 5$ *(bord bas à* $y = 0$*)*
- $U_{i,5} = i^3$ *, soit* $U_{2,5} = 1$, $U_{3,5} = 8$, $U_{4,5} = 27$, $U_{5,5} = 64$ *(bord haut,* $y = 5$*)*
- $U_{5,j} = 16j$ *, soit* $U_{5,2} = 16$, $U_{5,3} = 32$, $U_{5,4} = 48$, $U_{5,5} = 64$ *(bord droit,* $x = 5$*)*

En appliquant le schéma à 5*points aux* 9 *nœuds internes, on obtient le système linéaire suivant (les inconnues sont ordonnées* $U_{2,2}$, $U_{3,2}$, $U_{4,2}$, $U_{2,3}$, $U_{3,3}$, $U_{3,4}$, $U_{4,2}$, $U_{4,3}$, $U_{4,4}$ *) :*

$$4U_{2,2} - U_{2,1} - U_{1,2} = 0$$
$$4U_{2,1} - U_{1,1} - U_{3,1} - U_{2,2} = 0$$
$$4U_{3,1} - U_{2,1} - U_{3,2} = 16$$
$$4U_{1,2} - U_{2,2} - U_{1,1} - U_{1,3} = 0$$
$$4U_{2,2} - U_{1,2} - U_{3,2} - U_{2,1} - U_{2,3} = 0$$
$$4U_{3,2} - U_{2,2} - U_{3,1} - U_{3,3} = 32$$

$$4U_{1,3} - U_{2,3} - U_{1,2} = 1$$
$$4U_{2,3} - U_{1,3} - U_{3,3} - U_{2,2} = 8$$
$$4U_{3,3} - U_{2,3} - U_{3,2} = 75$$

Ce système de 9 équations à 9 inconnues, résolu par une méthode directe (élimination de Gauss), donne les résultats suivants :

***Tableau (IV.1) :** Champ de température $T(x,y)$ obtenu par résolution directe du système en °C*

Nœuds $(y\backslash x)$ **:**	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$j=1$	0	0	0	0	0
$j=2$	0	2.607	5.964	10.5	16
$j=3$	0	4 .464	10.75	20.036	32
$j=4$	0	4.5	12.536	26.893	48
$j=5$	0	1	8	27	64

On observe que les valeurs internes sont comprises entre 0 et 64, respectant le principe du maximum discret : la solution atteint ses bornes uniquement sur la frontière du domaine.

IV.3.2 Conditions de Neumann

Tableau (IV.2) – Discrétisation du schéma aux bords du domaine $(x=0,\forall y)$, $(x=L,\forall y)$, $(y=0,\forall x)$, et $(y=H,\forall x)$ par la condition de Neumann.

Bord	Approche	Formule du schéma discrétisée
$x=0$, *et* $y>0$	**Centrée :** $(U_{2,j}-U_{0,j})/2\,\Delta x = C$	$2U_{2,j}-2(1+\lambda^2)U_{1,j}+\lambda^2(U_{1,j+1}+U_{1,j-1})-2\,\Delta x\,C=0$
	Décentrée avant : $(U_{1,j}-U_{0,j})/\,\Delta x = C$	$U_{2,j}-(1+2\lambda^2)U_{1,j}+\lambda^2(U_{1,j+1}+U_{1,j-1})-\,\Delta x\,C=0$
$x=L$, $y>0$	**Centrée :** $(U_{L+1,j}-U_{L-1,j})/2\,\Delta x = -C$	$2U_{L-1,j}-2(1+\lambda^2)U_{L,j}+\lambda^2(U_{L,j+1}+U_{L,j-1})-2\,\Delta x\,C=0$
	Décentrée arrière : $(U_{L+1,j}-U_{L,j})/\,\Delta x = -C$	$-(1+2\lambda^2)U_{L,j}+U_{L-1,j}+\lambda^2(U_{L,j+1}+U_{L,j-1})-\,\Delta x\,C=0$
$y=0$, *et* $x>0$	**Centrée :** $(U_{i,2}-U_{i,0})/2\,\Delta y = C$	$U_{i+1,1}-2(1+\lambda^2)U_{i,1}+U_{i-1,1}+\lambda^2(2U_{i,2}-2\Delta y\,C)=0$
	Décentrée avant : $(U_{i,1}-U_{i,0})/\,\Delta y = C$	$U_{i+1,1}-(2+\lambda^2)U_{i,1}+U_{i-1,1}+\lambda^2(U_{i,2}-\Delta y\,C)=0$
$y=H$, *et* $x>0$	**Centrée :** $(U_{i,H+1}-U_{i,H-1})/2\Delta y = -C$	$U_{i+1,H}-2(1+\lambda^2)U_{i,H}+U_{i-1,H}+2\lambda^2(U_{i,\mathrm{H}-1}-\Delta y\,C)=0$
	Décentrée arrière : $(U_{i,H+1}-U_{i,H-1})/\Delta y = -C$	$U_{i+1,\mathrm{H}}-(2+\lambda^2)U_{i,H}+U_{i-1,H}+\lambda^2(U_{i,\mathrm{H}-1}-\Delta y\,C)=0$

Lorsque le flux $\partial U/\partial n = C$ est imposé sur un bord, la dérivée normale est discrétisée soit par une différence centrée d'ordre 2 (en introduisant un nœud fictif hors du domaine, ensuite éliminé), soit par une différence décentrée (avant/arrière) d'ordre 1, plus simple mais moins précise. Le tableau IV.2 résume, pour chacun des quatre bords du domaine rectangulaire $[0, L] \times [0, H]$, les deux approches et le schéma discrétisé correspondant obtenu après élimination du nœud fictif.

De la même façon, aux quatre coins du domaine, deux conditions de flux (une suivant x, une suivant y) doivent être combinées. Le tableau IV.3 donne les schémas obtenus.

Tableau (IV.3) – Discrétisation de EDP pour les quatre coins du domaine $(x, y) = (0,0)$, $(x, y) = (L, 0)$, $(x, y) = (0, H)$, et $(x, y) = (L, H)$ par conditions de Neumann.

Bord	Approche	Formule du schéma discrétisée
$(x, y) = (0,0)$	**Centrée :** $(U_{2,1} - U_{0,1})/2\,\Delta x = C_x$ $(U_{1,2} - U_{1,0})/2\,\Delta y = C_y$	$2U_{2,1} - 2(1+\lambda^2)U_{1,1} + 2\lambda^2 U_{1,2} - 2\lambda^2 \Delta y\, C_y - 2\,\Delta x\, C_x = 0$
	Décentrée : $(U_{1,1} - U_{0,1})/\Delta x = C_x$ $(U_{1,1} - U_{1,0})/\Delta y = C_y$	$U_{2,1} - (1+\lambda^2)U_{1,1} + \lambda^2 U_{1,2} - \lambda^2 \Delta y\, C_y - \Delta x\, C_x = 0$
$(x, y) = (L,0)$	**Centrée :** $(U_{L+1,1} - U_{L-1,1})/2\,\Delta x = -C_x$ $(U_{L,2} - U_{L,0})/2\,\Delta y = C_y$	$2U_{L-1,1} - 2(1+\lambda^2)U_{L,1} + 2\lambda^2 U_{L,2} - 2\lambda^2 \Delta y\, C_y - 2\,\Delta x\, C_x = 0$
	Décentrée : $(U_{L+1,1} - U_{L,1})/\Delta x = -C_x$ $(U_{L,1} - U_{L,0})/\Delta y = C_y$	$-(1+\lambda^2)U_{L,1} + U_{L-1,1} + \lambda^2 U_{L,2} - \lambda^2 \Delta y\, C_y - \Delta x\, C_x = 0$
$(x, y) = (0,H)$	**Centrée :** $(U_{2,H} - U_{0,H})/2\,\Delta x = C_x$ $(U_{1,H+1} - U_{1,H-1})/2\Delta y = -C_y$	$2U_{2,H} - 2(1+\lambda^2)U_{1,H} + 2\lambda^2 U_{1,H-1} - 2\lambda^2 \Delta y\, C_y - 2\,\Delta x\, C_x = 0$
	Décentrée : $(U_{1,H} - U_{0,H})/\Delta x = C_x$ $(U_{1,H+1} - U_{1,H})/\Delta y = -C_y$	$U_{2,H} - (1+\lambda^2)U_{1,H} + \lambda^2 U_{1,H-1} - \lambda^2 \Delta y\, C_y - \Delta x\, C_x = 0$
$(x, y) = (L,H)$	**Centrée :** $(U_{L+1,H} - U_{L-1,H})/2\,\Delta x = -C_x$ $(U_{L,H+1} - U_{L,H-1})/2\Delta y = -C_y$	$2U_{L-1,H} - 2(1+\lambda^2)U_{L,H} + 2\lambda^2 U_{L,H-1} - 2\lambda^2 \Delta y\, C_y - 2\,\Delta x\, C_x = 0$
	Décentrée : $(U_{L+1,H} - U_{L,H})/\Delta x = -C_x$ $(U_{L,H+1} - U_{L,H})/\Delta y = -C_y$	$-(1+\lambda^2)U_{L,H} + U_{L-1,H} + \lambda^2 U_{L,H-1} - \lambda^2 \Delta y\, C_y - \Delta x\, C_x = 0$

IV.3.3 Conditions de Cauchy

La condition de Cauchy (ou condition mixte de Robin) combine linéairement la valeur de U et sa dérivée normale sur le bord considéré :

Tableau (IV.3) – Discrétisation du schéma aux bords du domaine $(x = 0, \forall y)$, $(x = L, \forall y)$, $(y = 0, \forall x)$, et $(y = H, \forall x)$ par la condition de Cauchy.

	Approche	Formule du schéma discrétisée
$x = 0, et\ y > 0$	**Centrée :** $(U_{2,j} - U_{0,j})/2\,\Delta x = U$	$2U_{2,j} + \lambda^2 U_{1,j+1} + \lambda^2 U_{1,j-1} - 2(1 + \Delta x + \lambda^2)U_{1,j} = 0$
	Décentrée avant : $(U_{1,j} - U_{0,j})/\Delta x = U$	$U_{2,j} + \lambda^2 U_{1,j+1} + \lambda^2 U_{1,j-1} - (1 + \Delta x + 2\lambda^2)U_{1,j} = 0$
$x = L,\ y > 0$	**Centrée :** $(U_{L+1,j} - U_{L-1,j})/2\,\Delta x = -U$	$2U_{L-1,j} + \lambda 2U_{L,j+1} + \lambda^2 U_{L,j-1} - 2(1 + \Delta x + \lambda^2)U_{L,j} = 0$
	Décentrée arrière : $(U_{L+1,j} - U_{L,j})/\Delta x = -U$	$U_{L-1,j} + \lambda^2 U_{L,j+1} + \lambda^2 U_{L,j-1} - (1 + \Delta x + 2\lambda^2)U_{L,j} = 0$
$y = 0, et\ x > 0$	**Centrée :** $(U_{i,2} - U_{i,0})/2\,\Delta y = U$	$U_{i+1,1} + U_{i-1,1} + 2\lambda^2 U_{i,2} - 2\big(1 + \lambda^2(1 + \Delta y)\big)U_{i,1} = 0$
	Décentrée avant : $(U_{i,1} - U_{i,0})/\Delta y = U$	$U_{i+1,1} + U_{i-1,1} + \lambda^2 U_{i,2} - \big(2 + \lambda^2(1 + \Delta y)\big)U_{i,1} = 0$
$y = H, et\ x > 0$	**Centrée :** $(U_{i,H+1} - U_{i,H-1})/2\Delta y = -U$	$U_{i+1,H} + U_{i-1,H} + 2\lambda^2 U_{i,H-1} - 2\big(1 + \lambda^2(1 + \Delta y)\big)U_{i,H} = 0$
	Décentrée arrière : $(U_{i,H+1} - U_{i,H-1})/\Delta y = -U$	$U_{i+1,H} + U_{i-1,H} + \lambda^2 U_{i,H-1} - \big(2 + \lambda^2(1 + \Delta y)\big)U_{i,H} = 0$

Comme pour la condition de Neumann, les quatre coins du domaine nécessitent la combinaison des deux conditions de Cauchy (suivant x et suivant y). Le tableau IV.4 donne les schémas obtenus.

Tableau (IV.4) — Discrétisation de EDP pour les quatre coins du domaine $(x, y) = (0,0)$, $(x, y) = (L, 0)$, $(x, y) = (0, H)$, et $(x, y) = (L, H)$ par conditions de Cauchy.

	Approche	Formule du schéma discrétisée
$(x, y) = (0,0)$	**Centrée :** $(U_{2,1} - U_{0,1})/2\,\Delta x = U$ $(U_{1,2} - U_{1,0})/2\,\Delta y = U$ **Décentrée :** $(U_{1,1} - U_{0,1})/\,\Delta x = U$ $(U_{1,1} - U_{1,0})/\,\Delta y = U$	$2U_{2,1} - 2(\lambda^2\,(1 + \Delta y) + 1 + x)U_{1,1} + 2\lambda^2 U_{1,2} = 0$ $U_{2,1} - (\lambda^2\,(1 + \Delta y) + 1 + x)U_{1,1} + \lambda^2 U_{1,2} = 0$
$(x, y) = (L,0)$	**Centrée :** $(U_{L+1,1} - U_{L-1,1})/2\,\Delta x = -U$ $(U_{L,2} - U_{L,0})/2\,\Delta y = U$ **Décentrée :** $(U_{L+1,1} - U_{L,1})/\,\Delta x = -U$ $(U_{L,1} - U_{L,0})/\,\Delta y = U$	$2U_{L-1,1} + 2\lambda^2 U_{L,2} - 2(\lambda^2(1 + \Delta y) + 1 + \Delta x)U_{L,1} = 0$ $U_{L-1,1} + \lambda^2 U_{L,2} - (\lambda^2(1 + \Delta y) + 1 + \Delta x)U_{L,1} = 0$
$(x, y) = (0,H)$	**Centrée :** $(U_{2,H} - U_{0,H})/2\,\Delta x = U$ $(U_{1,H+1} - U_{1,H-1})/2\Delta y = -U$ **Décentrée :** $(U_{1,H} - U_{0,H})/\,\Delta x = U$ $(U_{1,H+1} - U_{1,H})/\Delta y = -U$	$2U_{2,H} + 2\lambda^2 U_{1,H-1} - 2(\lambda^2(1 + \Delta y) + 1 + \Delta x)U_{1,H} = 0$ $U_{2,H} + \lambda^2 U_{1,H-1} - (\lambda^2(1 + \Delta y) + 1 + \Delta x)U_{1,H} = 0$
$(x, y) = (L,H)$	**Centrée :** $(U_{L+1,H} - U_{L-1,H})/2\,\Delta x = -U$ $(U_{i,H+1} - U_{i,H-1})/2\Delta y = -U$ **Décentrée :** $(U_{L+1,H} - U_{L,H})/\,\Delta x = -U$ $(U_{L,H+1} - U_{L,H})/\Delta y = -U$	$2U_{L-1,H} + 2\lambda^2 U_{L,H-1} - 2(\lambda^2(1 + \Delta y) + 1 + \Delta x)U_{L,H} = 0$ $U_{L-1,H} + \lambda^2 U_{L,H-1} - (\lambda^2(1 + \Delta y) + 1 + \Delta x)U_{L,H} = 0$

Remarque *— les conditions de Cauchy sont peu employées seules en régime elliptique stationnaire, car elles surdéterminent généralement le problème ; elles sont surtout utiles pour amorcer certains schémas itératifs ou pour traiter des couplages avec des conditions de rayonnement (loi de refroidissement de Newton, par exemple).*

IV.4 Méthode de résolution de l'équation discrétisée

La discrétisation de l'EDP de Laplace (ou de poisson) sur l'ensemble des nœuds internes conduit à un système linéaire de la forme $A\,U = b$, ou A est une matrice creuse, symétrique et à diagonale strictement dominante lorsque les conditions aux limites sont de type Dirichlet. Deux familles de méthodes permettent de résoudre ce système.

IV.4.1 Méthodes directes

- **Élimination de Gauss :** réduction de A à une forme triangulaire par combinaisons de lignes, puis remontée. Coût en $\mathrm{O}(N^3)$ dans le cas général, réduit à $\mathrm{O}(N.\,b^2)$ si l'on exploite la structure bande de largeur b ;
- **Factorisation LU :** $A = L\,.\,U$, avantageuse lorsque plusieurs seconds membres b doivent être traités pour la même matrice A ;
- **Factorisation de Cholesky :** $A = L\,.\,L^T$, applicable car A est symétrique définie positive; environ deux fois moins coûteuse que LU.

Ces méthodes sont exactes (aux erreurs d'arrondi près) mais deviennent coûteuses en mémoire et en temps de calcul lorsque le nombre de nœuds N devient grand, malgré l'exploitation du caractère creux de A (stockage bande ou format creux CSR/CSC).

IV.4.2 Méthodes itératives

Pour les grands systèmes, on préfère des méthodes itératives, moins coûteuses en mémoire, qui construisent une suite de solutions approchées convergeant vers la solution exacte. En décomposant $A = D - E - F$ (D diagonale, E et F parties triangulaires strictement inférieure et supérieure), les principales méthodes s'écrivent :

- **Méthode de Jacobi :**

$$U^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)U^{(k)} + D^{-1}\,b$$

Chaque composante de $U^{(k+1)}$ est calculée à partir des seules valeurs de l'itération précédente $U^{(k)}$. Simple à mettre en œuvre et parallélisable, mais convergence relativement lente.

- **Méthode de Gauss-Seidel :**

$$U^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F U^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

Les valeurs déjà mises à jour au sein de la même itération sont immédiatement réutilisées, ce qui accélère la convergence par rapport à Jacobi (facteur ≈ 2 en général pour ce type de problème).

- **Méthode de sur-relaxation successive (SOR) :**

$$U^{(k+1)} = (1 - \omega)U^{(k)} + \omega \cdot U_{GS}^{(k+1)}$$

où $U_{GS}^{(k+1)}$ est l'itéré de Gauss-Seidel et $\omega \in]0, 2[$ le facteur de relaxation. Un choix optimal ω_{opt}, calculable analytiquement pour un maillage rectangulaire régulier, permet de diviser significativement le nombre d'itérations nécessaires par rapport à Gauss-Seidel ($\omega = 1$).

Le critère d'arrêt usuel est fondé sur la norme du résidu $\|A \cdot U^{(k)} - b\|$ ou sur l'écart relatif entre deux itérées successives $\left\|U^{(k+1)} - U^{(k)}\right\| / \|U^{(k+1)}\|$, comparé à une tolérance ε fixée (typiquement 10^{-6} à 10^{-8}).

Théorème — Convergence. Pour une matrice A à diagonale strictement dominante (ou symétrique définie positive, cas du schéma de Laplace/Poisson à 5 points avec conditions de Dirichlet), les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent quel que soit le vecteur initial U^0. Le taux de convergence de Gauss-Seidel est asymptotiquement le double de celui de Jacobi.

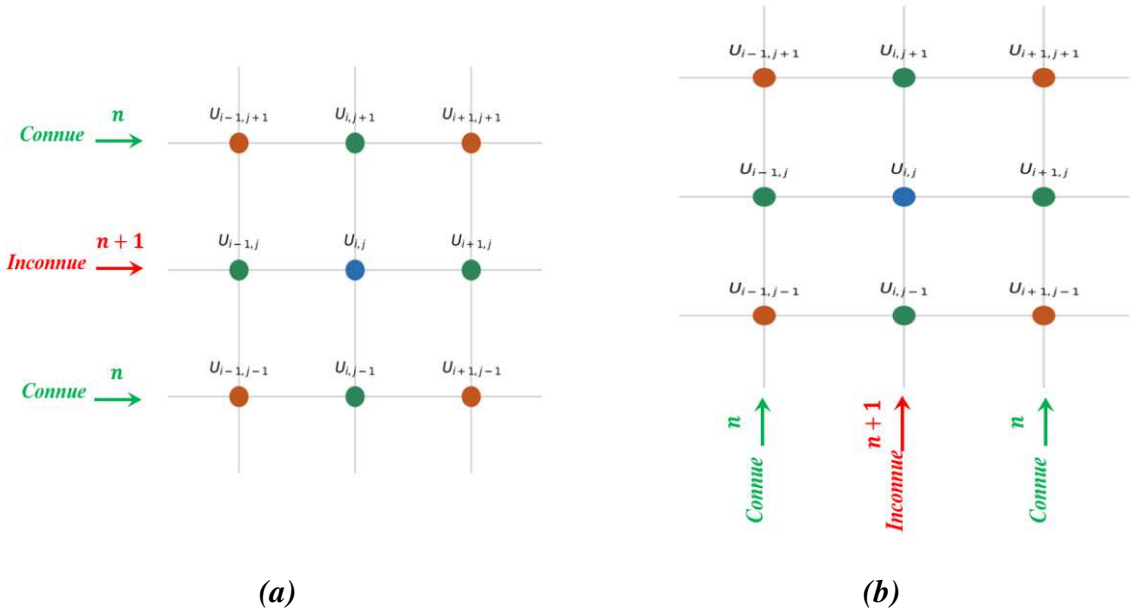
IV.4.3 Méthodes itératives du double balayage (méthode de thomas ligne par ligne)

C'est une méthode très efficace pour la résolution des équations elliptiques. Ayant obtenu à l'itération n une estimation de la solution, on écrit l'équation (IV.4) à l'itération $n + 1$, en procédant à un balayage ligne par ligne :

$$U_{i+1,j}^{n+1} - 2(1 + \lambda^2)U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1} + \lambda^2(U_{i,j+1}^{n} + U_{i,j-1}^{n}) = 0$$

Autrement dit, on calcule les valeurs de la solution U sur la ligne j en utilisant les valeurs déjà connues sur les lignes $j - 1$ et $j + 1$ (valeurs obtenues à l'itération précédente n).

Pour chaque ligne j, l'équation (IV.4) fournit un système de N équations algébriques à N inconnues $U_{1,j}, U_{2,j}, \dots, U_{n,j}$. Ce système, dont la matrice est tri-diagonale, se résout efficacement par l'algorithme de Thomas (méthode de balayage). Les autres lignes sont ensuite traitées successivement de la même manière.



(a) *(b)*

Figure (IV. 3) : Principe de balayage, ***(a)*** *ligne par ligne,* ***(b)*** *colonne par colonne*

Remarque *— Cette méthode s'applique de manière analogue au balayage par colonnes, ainsi qu'au balayage croisé , ce dernier assurant une convergence plus rapide que les balayages simples. Dans tous les cas, le système résultant conduit à des matrices tri-diagonales.*

IV.5 Equation de poisson

Définition — Équation de Poisson. L'équation de Poisson généralise l'équation de Laplace en introduisant un terme source $f(x, y)$, non identiquement nul, dans le domaine Ω :

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad \text{(IV.3)}$$

L'équation de Poisson intervient notamment en électrostatique (f lié à la densité de charge), en mécanique des fluides incompressibles (équation de pression) et en transfert thermique en présence d'une source de chaleur volumique.

IV.5.1 Schéma à 5 points pour l'équation de Poisson

La discrétisation par différences finies centrées d'ordre 2 des dérivées secondes, identique à celle utilisée pour l'équation de Laplace (§ IV.2), conduit à :

$$U_{i+1,j} - 2(1+\lambda^2)U_{i,j} + U_{i-1,j} + \lambda^2(U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) = \Delta x^2 \, f_{i,j}$$

Les conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Cauchy) se traitent exactement comme indiqué au § IV.3 ; seul le second membre des équations internes est modifié par l'ajout du terme source discrétisé $h^2 \cdot f_{i,j}$.

IV.5.2 Schéma compact d'ordre supérieur (schéma à 9 points)

Le schéma à 5 points est d'ordre 2. Pour améliorer l'ordre de convergence, on utilise le schéma compact à 9 points, qui incorpore les quatre nœuds diagonaux et un terme correctif faisant intervenir le Laplacien du terme source, pour un maillage carré, le schéma à 9 points s'écrit :

$$\begin{aligned} 4(\,U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \;+\; (\,U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j-1} \\ + U_{i-1,j-1}) \;-\; 20\,U_{i,j} \\ =\; h^2\,(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + 8\,f_{i,j}) \end{aligned} \qquad \text{(IV.4)}$$

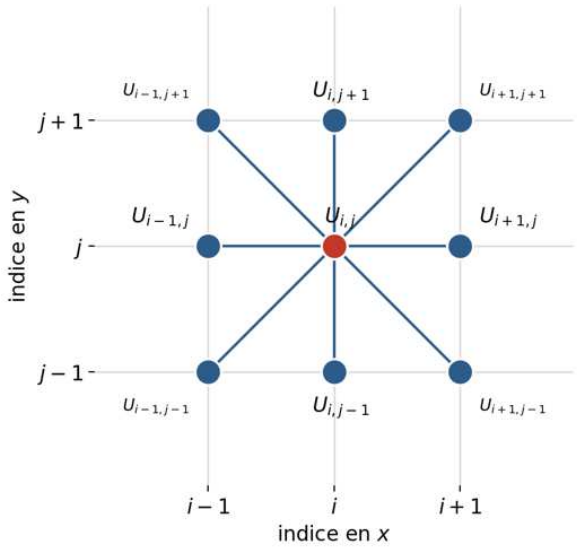


Figure (IV.4) : Maillage utilisée pour le schéma compact d'ordre supérieur à 9 points

Théorème — Ordre de précision du schéma à 9 points. En intégrant le terme correctif faisant intervenir la moyenne pondérée du terme source aux points voisins, le schéma (IV.4) atteint un

ordre de précision 4 en espace ($O(h^4)$) pour l'équation de Poisson, contre l'ordre 2 du schéma à 5 points, moyennant un coût de calcul supplémentaire limité (matrice toujours creuse, à 9 termes non nuls par ligne).

Remarque — Choix du schéma. *Le schéma à 9 points nécessite un stencil plus large : les nœuds adjacents à la frontière font intervenir des nœuds diagonaux pouvant sortir du domaine, ce qui complique le traitement des conditions aux limites. En pratique, le schéma à 5 points reste le plus utilisé pour sa simplicité de mise en œuvre, le schéma à 9 points étant réservé aux applications exigeant une haute précision (acoustique, propagation d'ondes discrétisée en régime harmonique, etc.).*

Exemple numérique *— Considérons l'équation de Poisson* $\Delta U = -2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ *sur le carré unité* $[0,1]\times[0,1]$, *avec conditions de Dirichlet homogènes* $U = 0$ *sur* $\partial\Omega$. *La solution exacte est* $U(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. *Avec un pas* $h = 1/4$ *(soit 9 nœuds internes), le schéma à 5 points (4.5) fournit, au nœud central* $(0.5, 0.5)$, *une valeur numérique* $U_{2,2} \approx 1.053$, *à comparer à la valeur exacte* $U(0.5,0.5) = 1$ *: l'écart relatif d'environ* $5{,}3\ \%$ *illustre l'ordre 2 du schéma et se réduit à environ* $1{,}3\ \%$ *lorsque le pas est divisé par deux* ($h = 1/8$), *le rapport des erreurs* (≈ 4) *confirmant le taux de convergence attendu en* $O(h^2)$.

IV.6 Domaine non rectangulaire

Lorsque le domaine physique n'est pas rectangulaire (frontière courbe, coin biseaute, géométrie quelconque), la frontière $\partial\Omega$ ne coïncide généralement plus avec les nœuds du maillage cartésien. Certains nœuds proches du bord ont alors un ou plusieurs voisins qui tombent en dehors du domaine : le schéma a cinq points classique ne peut plus s'appliquer tel quel en ces points, appelés *nœuds irréguliers*.

La figure (IV.5) ci-dessous illustre cette situation : le nœud $U_{i,j}$ possède deux voisins réguliers 3 et 4 (à distance h) et deux directions irrégulières (à A et B), situes a des distances θ_1 et θ_2 du nœud central.

les formules précédemment utilisées pour approcher les dérivées aux nœuds à proximité du maillage ne sont plus valables car le pas varie de part et d'autre de ces nœuds. Ce paragraphe concerne les approximations par les différences finies des dérivées en un point tel que « 0 »,

proche de la frontière F sur laquelle les valeurs de f sont supposées connues. Ainsi, pour le cas simple d'un maillage carré de pas h le théorème de Taylor donne :

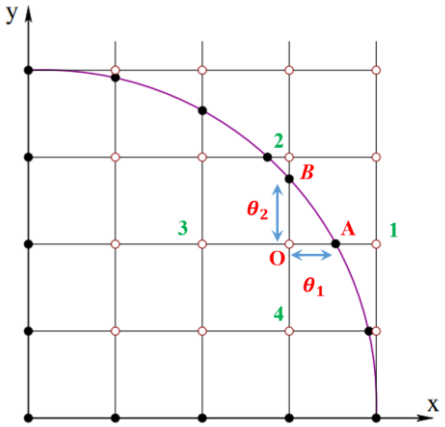


Figure (IV.5) : Nœuds irrégulier au voisinage d'une frontière courbe

$$f_A = f_O + h\theta_1 \frac{\partial f_O}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\theta_1^2 \frac{\partial^2 f_O}{\partial x^2} + O(h^3)$$

$$f_3 = f_O - h\frac{\partial f_O}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2 f_O}{\partial x^2} + O(h^3)$$

L'élimination de $\frac{\partial^2 f_O}{\partial x^2}$ donne :

$$\frac{\partial f_O}{\partial x} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\theta_1(1+\theta_1)} f_A - \frac{(1-\theta_1)}{\theta_1} f_O - \frac{\theta_1}{(1+\theta_1)} f_3\right) + O(h^2)$$

de même, l'élimination de $\frac{\partial f_O}{\partial x}$ mène à :

$$\frac{\partial^2 f_O}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{2}{\theta_1(1+\theta_1)} f_A + \frac{2}{(1+\theta_1)} f_3 - \frac{2}{\theta_1} f_O\right) + O(h)$$

Donc, l'équation de Laplace au point 0 s'écrit :

$$\frac{2\,f_A}{\theta_1(1+\theta_1)} + \frac{2\,f_B}{\theta_2(1+\theta_2)} + \frac{2f_3}{(1+\theta_1)} + \frac{2f_4}{(1+\theta_2)} - 2\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right) f_O = 0 \qquad \text{(IV.5)}$$

Remarque — Prise en compte des conditions aux limites. *Dans le cas d'une condition de Dirichlet, la valeur U(A) ou U(B) au point frontière est directement connue : elle vaut évaluée*

au point d'intersection de la ligne du maillage avec la frontière. Cette valeur est simplement substituée dans l'équation du nœud irrégulier, qui devient alors une équation linéaire ne comportant plus que les inconnues intérieures voisines du nœud (i, j). Dans le cas d'une condition de Neumann, le traitement est plus délicat : il faut soit introduire un nœud fictif au-delà de la frontière et une relation supplémentaire issue de la condition de flux, soit utiliser une approximation décentrée de la dérivée normale s'appuyant sur les valeurs intérieures déjà calculées. Dans les deux cas, on cherche à conserver, autant que possible, un ordre de précision comparable à celui du schéma intérieur.

Remarque — La précision. *Le schéma de Shortley-Weller n'est que du premier ordre localement au voisinage d'un nœud irrégulier (erreur de troncature en O(h) au lieu de O(h²)). Toutefois, le nombre de nœuds irréguliers est proportionnel au périmètre de la frontière, donc de l'ordre de O(1/h), alors que le nombre total de nœuds intérieurs est de l'ordre de O(1/h²). Cette différence d'échelle explique pourquoi, en pratique, l'erreur globale de la solution reste généralement d'ordre O(h²), comme dans le cas d'un domaine rectangulaire : la perte de précision locale a la frontière n'affecte pas l'ordre de convergence global de la méthode.*

IV.7 Equations elliptiques non linéaires

De nombreux problèmes physiques (diffusion non linéaire, écoulements en milieu poreux, équation de Poisson-Boltzmann en électrostatique) font intervenir un opérateur elliptique non linéaire. On considère par exemple l'équation quasi-linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(U)\ \frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(U)\ \frac{\partial U}{\partial y}\right)\ =\ f(x,y)$$

où le coefficient de diffusion $a(U)$ dépend lui-même de la solution U, ce qui rend le problème non linéaire. Un cas particulier fréquent est l'équation de Poisson-Boltzmann linéarisée, $\Delta U\ =\ \kappa^2\ sinh(U)\ -\ f$, où le terme source dépend non linéairement de U.

Définition — Discrétisation non linéaire. La discrétisation par différences finies de (4.9) conduit, en chaque nœud interne, à une équation algébrique non linéaire du type $F_{i,j}(U)\ =\ 0$, où $F_{i,j}$ dépend de $U_{i,j}$ et des nœuds voisins. L'ensemble de ces relations forme un système algébrique non linéaire $F(U)\ =\ 0$ à résoudre.

IV.7.1 Linéarisation par la méthode de Newton

Partant d'une estimation initiale U_0, la méthode de Newton résout, à chaque itération k, le système linéaire tangent :

$$J(U^k) \cdot \delta U^k = -F(U^k) \qquad U^{k+1} = U^k + \delta U^k$$

où $J(U^k)$ désigne la matrice Jacobienne de F évaluée en U^k (matrice creuse, de même structure que la matrice du problème linéarisé). La convergence est quadratique au voisinage de la solution, mais nécessite une estimation initiale suffisamment proche de la solution et le calcul (ou l'approximation) de la Jacobienne à chaque itération.

IV.7.2 Linéarisation par point fixe (méthode de Picard)

Une alternative plus simple à mettre en œuvre consiste à geler le coefficient non linéaire à l'itération précédente, $a(U^k)$, et à résoudre le problème linéaire résultant :

$$\nabla \cdot (a(U^k) \nabla U^{(k+1)}) = f$$

jusqu'à convergence du couple (U^k, U^{k+1}). La convergence de cette méthode de point fixe (ou méthode des approximations successives) est seulement linéaire, mais chaque itération se ramène à la résolution d'un problème de type Laplace/Poisson déjà étudié aux sections précédentes, ce qui en facilite grandement l'implémentation.

IV.8 Généralisation aux problèmes multidimensionnels

La démarche exposée en dimension 2 se généralise directement à un domaine tridimensionnel $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$, pour une fonction $U(x, y, z)$. L'équation de Laplace et l'équation de Poisson s'écrivent alors :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

En introduisant un maillage régulier de pas $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ et les indices (i, j, k), le schéma centré aux différences finies conduit à la molécule à 7 points (schéma de Laplace tridimensionnel) :

$$U_{i+1,j,k} + U_{i-1,j,k} + \lambda_{y^2}(U_{i,j+1,k} + U_{i,j-1,k}) + \lambda_{z^2}(U_{i,j,k+1} + U_{i,j,k-1}) - 2\left(1 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2\right)U_{i,j,k} = 0 \quad \text{(IV.6)}$$

où $\lambda_y = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ et $\lambda_z = \frac{\Delta x}{\Delta z}$.

Remarque — Coût de calcul. *Le passage à la dimension 3 multiplie le nombre de nœuds (et donc la taille du système linéaire) par un facteur de l'ordre de* n*,* n *étant le nombre de nœuds par direction : un maillage* $100 \times 100 \times 100$ *conduit à un système d'un million d'inconnues. Le recours à des méthodes itératives (Gauss-Seidel, SOR, gradient conjugué pré-conditionné) ou à des méthodes multi-grilles devient alors indispensable, les méthodes directes classiques étant prohibitives en temps de calcul et en mémoire.*

Le traitement des conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Cauchy) sur chacune des six faces du domaine, ainsi qu'aux arêtes et aux huit sommets du cube, se traite selon le même principe qu'en dimension 2 (introduction de nœuds fictifs, élimination par la condition imposée), les tableaux de discrétisation étant simplement dupliqués sur les faces, arêtes et coins additionnels propres à la dimension 3.

Exercices — Équations aux Dérivées Partielles Paraboliques

Exercice 1 — *Equation de Laplace, conditions de Dirichlet*

On considère le domaine carre [0,3] × [0,3], discrétise avec un pas identique $\Delta x = \Delta y = h = 1$ *(maillage* 4×4*, soit* 4 *noeuds internes inconnus). Les conditions aux limites de Dirichlet sont :*

- $U = 0$ *sur le bord gauche* $(x = 0)$ *;*
- $U = 0$ *sur le bord bas* $(y = 0)$ *;*
- $U = y^2$ *sur le bord droit* $(x = 3)$ *;*
- $U = 3x$ *sur le bord haut* $(y = 3)$.

Etablir le système linéaire vérifie par les quatre nœuds internes $U_{1,1}, U_{2,1}, U_{1,2}, U_{2,2}$*, puis le résoudre par une méthode directe (élimination).*

Exercice 2 — *Condition de Neumann*

Sur le bord $x = 0$ *d'un domaine, on impose la condition de flux* $\partial U/\partial x = C = 2$ *(Neumann), avec un maillage carre* $(\lambda = 1, h = 1)$*. On donne, au nœud frontière considère (indice de ligne* j*) :* $U_{1,j+1} = 10, U_{1,j-1} = 6, U_{2,j} = 8$*. Calculer* $U_{1,j}$ *par la formule centrée (avec nœud fictif élimine), puis par la formule décentrée avant. Comparer les deux résultats.*

Exercice 3 — *Balayage ligne par ligne et algorithme de Thomas*

On considère une plaque rectangulaire $[0,4] \times [0,3]$*, maillage carre* $h = 1$*, avec* $U = 0$ *sur les bords gauche, haut et bas, et* $U = 20$ *sur le bord droit* $(x = 4)$ *pour* $0 < y < 3$*. Les nœuds internes forment* 2 *lignes* $(j = 1, j = 2)$ *de* 3 *colonnes* $(i = 1, 2, 3)$*. En partant d'une estimation initiale nulle sur la ligne* $j = 2$ *(itération* $n = 0$*), effectuer le premier balayage de la ligne* $j = 1$ *: écrire le système tri-diagonal correspondant et le résoudre explicitement par l'algorithme de Thomas (élimination avant, puis remontée).*

Exercice 4 — *Equation de Poisson*

On reprend l'équation de Poisson $\Delta U = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ *sur le carre unité* $[0,1] \times [0,1]$*, avec conditions de Dirichlet homogènes* $U = 0$ *sur* $\partial\Omega$*, dont la solution exacte est* $U(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$*. Appliquer le schéma a* 5 *points avec un pas* $h = 1/3$ *(soit* 4

nœuds internes), calculer la solution numérique aux nœuds internes, puis comparer à la solution exacte et à l'erreur obtenue avec $h = 1/4$ *(5,3 %) pour vérifier l'ordre de convergence* $O(h^2)$.

Exercice 5 — *Domaine non rectangulaire*

Un nœud interne O *est voisin d'une frontière courbe : ses voisins ouest (point* 3*) et sud (point* 4*) sont réguliers, à distance* h*, avec* $f_3 = 5$ *et* $f_4 = 3$*. Ses voisins est (point A) et nord (point B) sont des points frontières, situes respectivement à une distance* $\theta_1 h = 0.6\,h$ *et* $\theta_2 h = 0.8\,h$ *de* O*, avec des valeurs de Dirichlet connues* $f_A = 10$ *et* $f_B = 8$*. Calculer* f_O *en appliquant la formule générale de Shortley-Weller.*

Chapitre V

Equation d'onde — Hyperboliques

L'équation d'onde est l'une des équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques les plus fondamentales de la physique mathématique. Elle modélise la propagation de perturbations vibrations d'une corde, ondes acoustiques, sismiques ou électromagnétiques, se propageant à une vitesse finie et constante c.

Ce chapitre a pour objectifs de poser le cadre mathématique du problème et de sa discrétisation, d'analyser la stabilité des schémas aux différences finies (analyse de von Neumann, condition CFL) , de présenter et de comparer en détail les principaux schémas explicites ; Euler, Upwind, Lax et Leapfrog , ainsi que des schémas implicites ; de décrire les méthodes de résolution des systèmes linéaires qui en résultent.

De façon générale, il existe deux grandes familles de méthodes pour résoudre les EDP hyperboliques :

- la méthode des différences finies, adaptée aux solutions continues
- la méthode des caractéristiques

indispensable lorsque la fonction ou l'une de ses dérivées présente une discontinuité en un point de la frontière : cette discontinuité se propage alors le long des courbes caractéristiques issues de ce point, et la méthode des caractéristiques fournit dans ce cas des résultats plus précis que les différences finies.

Les méthodes de différences finies présentées dans ce chapitre, elles restent entièrement valables, moyennant adaptation, pour des équations hyperboliques plus générales.

V.1 Position du problème

Définition — Equation d'onde unidimensionnelle. *Soit* $\boldsymbol{\Omega}$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $x, y \in \boldsymbol{\Omega}$, *et* $\boldsymbol{U}: \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction, l'EDP de* $\boldsymbol{U}$ *pour les variables* x, y *de type hyperbolique s'écrit :*

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [a,b], \qquad t > 0 \tag{V.1}$$

où $U(x,t)$ désigne la grandeur physique étudiée (déplacement, pression, température, potentiel…) et $c > 0$ est la célérité (vitesse de propagation) de l'onde, supposée constante et uniforme sur le domaine.

Cette équation, du second ordre en temps, doit être complétée par :

- Des conditions initiales portant à la fois sur u et sur sa dérivée temporelle :

$$U(x,0) = U_0(x) \tag{V.2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \quad x \in [a,b] \tag{V.3}$$

- Des conditions aux limites en $x = a$ et $x = b$, de type Dirichlet, Neumann ou périodiques ; par exemple, pour une corde fixée aux deux extrémités :

$$U(a,t) = U(b,t) = 0$$

Remarque *— Contrairement à une équation d'évolution du premier ordre (équation de la chaleur, équation d'advection), la seule donnée de* $U(x,0)$ *ne suffit pas à déterminer la solution: la vitesse initiale* $\partial U/\partial t\ (x,0) = v_0(x)$ *doit impérativement être prescrite, faute de quoi le problème est mal posé.*

V.2 Résolution d'équation d'onde

V.2.1 Schéma centré d'ordre 2 (schéma explicite de référence)

L'équation (V.1) est discrétisée par un schéma centré, d'ordre 2 à la fois en temps et en espace :

$$\frac{U_i^{n-1} - 2U_i^n + U_i^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

En posant le paramètre de maillage : $\lambda = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x} = C^{te}$

l'équation discrétisée s'écrit sous forme explicite :

$$U_i^{n+1} = 2(1 - \lambda)\, U_i^n + \lambda\,(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) - U_i^{n-1} \qquad \text{(V.4)}$$

Ce schéma fait intervenir trois niveaux de temps $(n - 1, n, n + 1)$: il faut donc calculer U^{-1} pour amorcer le calcul. On utilise pour cela la condition initiale sur la vitesse $(V.3)$, approchée par une différence centrée d'ordre 2 :

$$\frac{\partial U(x_i, 0)}{\partial t} \approx \frac{U_i^1 - U_i^{-1}}{2\Delta t} = v_0(x_i) \qquad \text{(V.5)}$$

d'où :

$$U_i^{-1} = U_i^1 - 2\Delta t\, v_0(x_i) \qquad \text{(V.6)}$$

En écrivant (5.4) au pas de temps $n = 0$, avec la condition initiale $U^0{}_i = U_0(x_i)$, puis en substituant (5.6), on obtient la formule de démarrage :

$$U_i^1 = (1 - \lambda)\, U_0(x_i) + \frac{\lambda}{2}\,[U_0(x_{i-1}) + U_0(x_{i+1})] + \Delta t\, v_0(x_i) \qquad \text{(V.7)}$$

Toutes les valeurs ultérieures se déduisent ensuite de (V.4), en tenant compte des conditions aux limites (par exemple de Dirichlet homogènes $U_0{}^n = U_N^n = 0$).

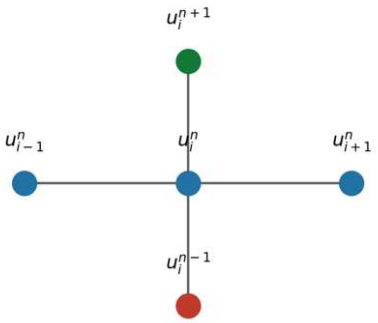


Figure (V.1) : Schéma centré explicite à trois niveau de temps

Remarque *— La condition de stabilité obtenue par l'analyse classique par la méthode de Von Neumann* $\lambda = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \leq 1$ *soit* $c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$*, C'est la célèbre condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) : le pas de temps ne peut excéder le temps que met l'onde physique à parcourir une maille spatiale.*

V.2.2 Différents schémas de discrétisation

On considère à présent l'équation d'advection linéaire du premier ordre $\partial U/\partial t + c\,\partial U/\partial x = 0$ $(c > 0)$, utilisée classiquement comme cas d'école pour comparer les schémas aux différences finies avant de les appliquer à l'équation d'onde du second ordre. Les propriétés d'ordre et de stabilité énoncées ci-dessous , corrigées et complétées par rapport à une première version qui comportait des erreurs sur l'ordre de précision de certains schémas, se transposent directement à la discrétisation de l'équation (V.1), qui peut toujours se ramener à un système de deux équations du premier ordre couplées.

a- Schéma explicite Euler

Discrétisation avant en temps, avant (ou centrée) en espace :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c\,\frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x} = 0 \qquad \text{(V.8)}$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c\,\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad \text{(V.9)}$$

Les deux variantes (V.8) et (V.9) sont précises à l'ordre 1 en temps ; (V.9), centrée en espace, y est précise à l'ordre 2. Malgré cela, l'analyse de von Neumann montre que ces deux schémas sont inconditionnellement instables : aucun choix de Δt, Δx ne permet de les stabiliser. Ils ne sont donc d'usage pratique que couplés à un décentrage (voir Upwind ci-dessous) ou à une autre discrétisation temporelle.

b- Schéma explicite Upwind (décentré amont)

Pour c > 0, on décentre la différence spatiale vers l'amont :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c\,\frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad \text{(V.10)}$$

soit, sous forme explicite :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) \quad (c > 0) \tag{V.11}$$

et, symétriquement pour $c < 0$:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(U_{i+1}^n - U_i^n) \quad (c < 0) \tag{V.12}$$

Ce schéma est précis à l'ordre 1 (en temps comme en espace) et conditionnellement stable, sous la condition CFL :

$$0 \leq |c|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

L'intérêt du décentrage amont est de respecter le sens physique de propagation de l'information (le long des caractéristiques), ce qui explique sa stabilité conditionnelle là où le schéma centré (V.9) reste instable quel que soit le pas de temps.

c- Schéma explicite de Lax (Lax-Friedrichs)

On remplace U_i^n, dans le terme d'évolution temporelle, par la moyenne de ses voisins :

$$\frac{U_i^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n)}{\Delta t} + c\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{V.13}$$

Ce terme de moyenne introduit une diffusion numérique supplémentaire, d'ordre $\Delta x^2/\Delta t$: le schéma de Lax est donc, contrairement à une idée reçue parfois rencontrée, précis seulement à l'ordre 1 globalement (et non à l'ordre 2 en espace), c'est le prix de sa stabilité. Il est conditionnellement stable, sous la même condition CFL que le schéma Upwind : $|c|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Le schéma de Lax–Wendroff, obtenu par un développement de Taylor poussé à l'ordre 2 en temps, corrige ce défaut et atteint l'ordre 2 en temps et en espace ; sa variante à deux pas (prédicteur–correcteur) est particulièrement utilisée pour les équations non linéaires.

d- Schéma explicite Leapfrog (saut-mouton)

Discrétisation centrée à la fois en temps et en espace :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t} + c\,\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad \text{(V.14)}$$

Ce schéma est précis à l'ordre 2 en temps et en espace (c'est le schéma le plus précis parmi les quatre schémas explicites présentés). Il est conditionnellement stable, sous la même condition CFL : $|c|\,\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Comme pour le schéma centré (V.4) de l'équation d'onde, Leapfrog utilise trois niveaux de temps et nécessite donc une procédure de démarrage particulière (typiquement un pas d'Euler ou d'Upwind au premier pas de temps).

e- Schéma implicite d'Euler

Discrétisation arrière en temps, centrée en espace au niveau $n + 1$:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + c\,\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \qquad \text{(V.15)}$$

Ce schéma est précis à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace ; il est inconditionnellement stable, quel que soit Δt. Cette absence de contrainte CFL a pour contrepartie la résolution, à chaque pas de temps, d'un système linéaire tri-diagonal (les inconnues U_i^{n+1}, U_{i-1}^{n+1}, U_{i+1}^{n+1} sont couplées), alors que les schémas explicites précédents ne demandaient qu'une simple évaluation.

V.2.3 Méthode implicite pour l'équation du second ordre

Revenons à l'équation d'onde complète (V.1). La dérivée seconde en temps est approchée comme dans le schéma explicite centré (V.4). La dérivée seconde en espace, en revanche, est évaluée non pas au seul niveau n, mais par la demi somme de ses valeurs aux niveaux $n-1$ et $n+1$:

$$\frac{\partial^2 U(i,n)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U(i,n+1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(i,n-1)}{\partial x^2}\right] \qquad \text{(V.16)}$$

soit, en différences finies :

$$\frac{\partial^2 U(i,n)}{\partial x^2} = \frac{1}{2\Delta x^2}\left[\left(U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}\right) + \left(U_{i+1}^{n-1} - 2U_i^{n-1} + U_{i-1}^{n-1}\right)\right] \tag{V.18}$$

En reportant (V.18) dans (V.1) et en réarrangeant les termes (avec toujours $\lambda = c^2\Delta t^2/\Delta x^2$), il vient le schéma implicite :

$$-\frac{\lambda}{2}U_{i+1}^{n+1} + (1+\lambda)\,U_i^{n+1} - \frac{\lambda}{2}U_{i-1}^{n+1} = 2U_i^n + \frac{\lambda}{2}\left(U_{i+1}^{n-1} - 2U_i^{n-1} + U_{i-1}^{n-1}\right) \tag{V.19}$$

À chaque pas de temps, ce système d'équations couplées, écrit pour $i = 1, \ldots, N-1$, constitue un système linéaire à matrice tri-diagonale sur les inconnues U_i^{n+1}. Ce système peut être résolu par double balayage (algorithme de Thomas) ou par une méthode itérative, à condition de connaître les conditions aux limites en $x = a$ et $x = b$, ce qui n'était pas nécessaire pour amorcer la seule formule explicite.

Remarque — Intérêt de la méthode implicite. *L'avantage principal de la méthode implicite est d'être stable quel que soit Δt : on peut donc utiliser des pas de temps plus grands que ceux imposés par la condition CFL des schémas explicites, ce qui permet de gagner du temps de calcul, au prix d'une complication modérée (résolution d'un système tri-diagonal à chaque pas de temps au lieu d'une simple évaluation explicite).*

V.2.4 Système du premier ordre

L'équation d'onde du second ordre peut toujours se ramener à un système de deux équations du premier ordre couplées, ce qui permet d'appliquer directement les schémas de (Euler, Upwind, Lax, Leapfrog). En posant, pour l'équation adimensionnée :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{V.20}$$

les nouvelles variables $p = \partial U/\partial x$ et $q = \partial U/\partial t$, et en utilisant l'égalité des dérivées croisées $\partial^2 U/\partial x \partial t = \partial^2 U/\partial t \partial x$, on obtient le système du premier ordre équivalent :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{(V.21)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{(V.22)}$$

Soient h et k les pas de discrétisation dans les directions x et t respectivement. On note p_i^n et q_i^n les approximations de p et q au nœud (x_i, t_n). Une approximation explicite classique de (V.20)–(V.21), stable pour $k/h \leq 1$, est :

$$\frac{1}{k}\left[q_i^{n+1} - \frac{1}{2}(q_{i+1}^n + q_{i-1}^n) \right] = \frac{1}{2h}(p_{i+1}^n - p_{i-1}^n) \quad \text{(V.23)}$$

$$\frac{1}{k}\{ p_i^{n+1} - \frac{1}{2}(p_{i+1}^n + p_{i-1}^n) \} = \frac{1}{2h}(q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) \quad \text{(V.24)}$$

Ce schéma explicite (de type Lax appliqué au système couplé) est stable pour $k/h \leq 1$. Un schéma implicite, inconditionnellement stable, s'obtient en décalant certains termes d'une demi-maille en espace :

$$\frac{1}{k}(q_i^{n+1} - q_i^n) = \frac{1}{h}(p_{i+1/2}^n - p_{i-1/2}^n + p_{i+1/2}^{n+1} - p_{i-1/2}^{n+1}) \quad \text{(V.25)}$$

$$\frac{1}{k}(p_{i-1/2}^{n+1} - p_{i-1/2}^n) = \frac{1}{2h}(q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1} + q_i^n - q_{i-1}^n) \quad \text{(V.26)}$$

Cette approche par système du premier ordre est particulièrement utile lorsqu'on veut réutiliser directement les schémas et résultats de stabilité établis pour les équations hyperboliques du premier ordre.

Remarque — Résolution des systèmes linéaire. *Les schémas implicites obtenues conduisent, à chaque pas de temps, à un système linéaire AU = b, dont la matrice A est le plus souvent creuse. Deux grandes familles de méthodes permettent de le résoudre : les méthodes directes et les méthodes itératives déjà expliqué dans les chapitres précédent.*

Exemple d'application — Schéma centré d'ordre 2 (schéma explicite). *On considère une corde vibrante de longueur $L = 1$, fixée à ses deux extrémités, de célérité $c = 1$, lâchée sans vitesse initiale depuis un profil sinusoïdal :*

$$U_0(x) = sin(\pi x), \quad v_0(x) = 0, \quad U(0,t) = U(1,t) = 0$$

On choisit un maillage grossier à des fins pédagogiques : $\Delta x = 0{,}25$ *(*$N = 4$ *intervalles, nœuds* $i = 0, \dots, 4$*) et* $\Delta t = 0{,}25$*, de sorte que* $\lambda = c^2(\Delta t/\Delta x)^2 = 1$*, valeur limite de la condition CFL (dans une application réelle on prendrait plutôt* $\lambda < 1$ *pour garder une marge de sécurité).*

Valeurs initiales $U_i^0 = U_0(x_i) = sin(\pi x_i)$ *sont :*

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.25	0.50	0.75	1
U_i^0	0	0.7071	1	0.7071	0

Comme $v_0 \equiv 0$*, la formule se simplifie pour* $(\lambda = 1)$ *en :*

$$U_i^1 = \frac{1}{2}\,[U_0(x_{i-1}) + U_0(x_{i+1})\,]$$

d'où, pour les nœuds intérieurs $i = 1, 2, 3$ ($U_0{}^{\mathrm{n}} = U_4{}^{\mathrm{n}} = 0$ aux bords) :

$$U^1{}_1 = ½(U^0{}_0 + U^0{}_2) = 0{,}5$$
$$U^1{}_2 = ½(U^0{}_1 + U^0{}_3) = 0{,}7071$$
$$U^1{}_3 = ½(U^0{}_2 + U^0{}_4) = 0{,}5$$

On applique ensuite la formule générale (V.4) :

$$U_i^{n+1} = 2(1-\lambda)\,U_i^n + \lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) - U_i^{n-1}$$

qui se réduit ici ($\lambda = 1$) à $U_i^2 = U_{i-1}^1 + U_{i+1}^1 - U_i^0$, pour calculer le pas $n = 2$:

$$U^2{}_1 = U^1{}_0 + U^1{}_2 - U^0{}_1 = 0$$
$$U^2{}_2 = U^1{}_1 + U^1{}_3 - U^0{}_2 = 0$$
$$U^2{}_3 = U^1{}_2 + U^1{}_4 - U^0{}_3 = 0$$

Interprétation des résultats *— Au bout de deux pas de temps (*$t = 2\Delta t = 0{,}5 = L/c$*, soit une demi-période), la corde repasse exactement par sa position d'équilibre* $U \equiv 0$ *: ce résultat est cohérent avec la solution exacte de d'Alembert pour ce profil sinusoïdal :*

$$U(x,t) = sin(\pi x)\,cos(\pi t)$$

qui s'annule identiquement pour $\pi t = \pi/2$*, c'est-à-dire* $t = 0{,}5$*. Cet exemple illustre à la fois la formule de (V.7) et la récurrence à trois niveaux (V.4).*

Exercices — Équations aux Dérivées Partielles hyperboliques

Exercice 1 — *Établir la condition de stabilité du schéma Upwind par l'analyse de von Neumann, et vérifier qu'elle coïncide avec la condition CFL annoncée.*

Exercice 2 — *Reprendre l'exemple numérique résolu avec un pas de temps deux fois plus grand* $(\Delta t = 0{,}5)$ *et constater que le schéma explicite centré devient instable* $(\lambda = 4)$*. Commenter le résultat obtenu au bout de quelques pas de temps.*

Exercice 3 — *Écrire le schéma de Lax–Wendroff pour l'équation d'advection :*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

à partir d'un développement de Taylor à l'ordre 2 en temps, et vérifier qu'il est précis à l'ordre 2 en temps et en espace.

Exercice 4 — *Montrer que le schéma implicite d'Euler (V.15) est inconditionnellement stable en calculant son facteur d'amplification par la méthode de von Neumann.*

Exercice 5 — *La discrétisation de l'équation d'onde donne :*

$$(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}) / \Delta t^2 \;=\; c^2 (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) / \Delta x^2$$

1. *Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.*
2. *Déterminer le facteur d'amplification de ce schéma* ($\lambda = c^2 \Delta t^2/\Delta x^2$).

Exercice 6 — *Discrétiser l'équation d'onde par :*

3. *Une approximation centrée d'ordre 2 en temps et en espace.*
4. *Une approximation décentrée arrière d'ordre 1 en temps et décentrée avant d'ordre 2 en espace.*

Exercice 7 — *Soient les deux EDP suivantes :*

$\partial^2 u/\partial t^2 - \partial^2 u/\partial x^2 = 0$ *et* $\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2 = 0$

5. *Discrétiser l'équation de la chaleur par une approximation décentrée arrière d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.*
6. *Discrétiser l'équation d'onde par une approximation centrée en temps et décentrée avant d'ordre 2 en espace.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ames, W. F. (1977). Numerical methods for partial differential equations (2e éd.). Academic Press.

[2] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (1998). Numerical methods for engineers (3e éd.). McGraw-Hill.

[3] Collins, P. J. (2006). Differential and integral equations. Oxford University Press.

[4] Croft, D. R., & Lilley, D. G. (1977). Heat transfer calculations using finite difference equations. Applied Science Publishers.

[5] Demailly, J.-P. (2016). Analyse numérique et équations différentielles (4e éd.). EDP Sciences.

[6] Donald L. KATZ. (1990). Applied Numerical Methods. Robert E. Krieger publishing company.

[7] Evans, L. C. (2010). Partial differential equations (2e éd.). American Mathematical Society.

[8] Farlow, S. J. (1993). Partial differential equations for scientists and engineers. Dover Publications.

[9] Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix computations (4e éd.). Johns Hopkins University Press.

[10] Haberman, R. (2013). Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems (5e éd.). Pearson.

[11] Kadja, M. (2001). Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Méthodes des différences finies : Cours et exercices résolus (1e éd.). Les Éditions de l'Université Mentouri Constantine.

[12] Larsson, S., & Thomée, V. (2003). Partial differential equations with numerical methods. Springer.

[13] LeVeque, R. J. (2007). Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

[14] Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). Numerical solution of partial differential equations: An introduction (2e éd.). Cambridge University Press.

[15] Patankar, S. V. (1980). Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation.

[16] Pinchover, Y., & Rubinstein, J. (2005). An introduction to partial differential equations. Cambridge University Press.

[17] Powers, D. L. (2006). Boundary value problems and partial differential equations (5e éd.). Elsevier Academic Press.

[18] Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2007). Numerical mathematics (2e éd.). Springer.

[19] Saad, Y. (2003). Iterative methods for sparse linear systems (2e éd.). SIAM.

[20] Smith, G. D. (1985). Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods (3e éd.). Oxford University Press.

[21] Strauss, W. A. (2008). Partial differential equations: An introduction (2e éd.). John Wiley & Sons.

[22] Strikwerda, J. C. (2004). Finite difference schemes and partial differential equations (2e éd.). SIAM.

[23] Thomas, J. W. (1995). Numerical partial differential equations: Finite difference methods. Springer.

[24] Tveito, A., & Winther, R. (1998). Introduction to partial differential equations: A computational approach. Springer-Verlag.

[25] Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (1995). An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method (1e éd.). Longman Scientific & Technical.

[26] Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2009). Differential equations with boundary-value problems (7e éd.). Brooks/Cole.