

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Mohamed Seddik BENYAHIA



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'électrotechnique

Licence
Electrotechnique et électromécanique

Support du cours

Electrotechnique Fondamentale 1

Par
Dr. Lyes AOMAR, Maitre de conférences en génie électrique
2026

Avant-Propos

Je propose ce modeste support pédagogique, intitulé Electrotechnique Fondamentale 1, qui s'adresse aux étudiants du Licence en Electrotechnique.

L'objectif global de ce support est d'acquérir une compréhension approfondie des concepts fondamentaux de l'électrotechnique. Cela inclut l'analyse détaillée des systèmes électriques monophasés et triphasés, ainsi que l'étude des circuits magnétiques.

Ce support pédagogique joue le rôle d'un socle consistant qui permettra aux étudiants d'affranchir le domaine de génie électriques.

Table de matière

Chapitre I. Système électrique monophasé

I.1. Définition et représentation d'une grandeur sinusoïdale	2
I. 1. 1. Grandeur périodique, alternative	2
I. 1. 2. Grandeur électrique sinusoïdale	3
I. 1. 3. Valeur moyenne et valeur efficace	4
I. 1. 4. Quelques formes usuelles des grandeurs électriques	4
I. 1. 5. Représentation vectorielle d'une grandeur électrique sinusoïdale	5
I. 1. 6. Notation complexe d'une grandeur électrique sinusoïdale	5
I. 2. Loi d'Ohm en courant sinusoïdale, Impédance	7
I. 3. Calculs des puissances	9
I. 3. 1. Définitions, expressions et unités	9
I. 3. 2. Puissances en sinusoïdale	9
I. 3. 3. Puissance complexe	10
I. 3. 4. Energies active, réactive, apparente	10
I. 3. 5. Composantes du triangle des puissances	11
I. 3. 6. Conservation des puissances active et réactive	11
I. 4. Exercices	13
I. 5. Solution des exercices	15

Chapitre II. Système électrique triphasé

II. 1. Définition et représentation d'un système de grandeurs triphasé équilibré	29
II. 1. 1 Système électrique polyphasé	29
II. 1. 2 Système électrique triphasées	29
II. 1. 2. 1. Système triphasé équilibré	29
II. 1. 2. 2. Système triphasé déséquilibré	30
II. 1. 3. Opérateur mathématique de rotation a^-	30
II. 1. 4. Définition des tensions dans un système triphasé	31
II. 1. 4. 1. Tensions simples V	31
II. 1. 4. 2. Tensions composées U	31
II. 1. 4. 3. Relation entre tensions simples et tensions composées	33
II. 2. Charge triphasée	33
II. 2. 1. Charge triphasée équilibrée	33
II. 2. 1. 1. Couplage en étoile (Y)	33

II. 2. 1. 2. Couplage en triangle (Δ)	34
II. 2. 2. Charge triphasée déséquilibrée	35
II. 2. 2. 1. Couplage en étoile (Y) avec neutre	35
II. 2. 2. 2. Couplage en étoile (Y) sans neutre	36
II. 2. 2. 3. Couplage en triangle (Δ)	37
II. 3. Puissance électrique en triphasé	37
II. 3. 1. Calcul de puissance électrique en triphasé	37
II. 3. 2. Mesure de puissance électrique en triphasé	38
II. 3. 2. 1. Méthode de trois wattmètres (ligne à 4 fils)	38
II. 3. 2. 2. Méthode de deux wattmètres (ligne à 3 fils)	39
II. 4. Exercices	41

Chapitre III. Circuit magnétique

III.1. Définition et représentation des grandeurs magnétiques	45
III. 2. Matériaux magnétiques	48
III. 2. 1. Matériaux Ferromagnétiques $\mathcal{X} \gg 0$	49
III. 2. 2. Matériaux Paramagnétiques $\mathcal{X} > 0$	49
II. 2. 3. Matériaux Diamagnétiques $\mathcal{X} < 0$	50
III. 3. Description et Mise en équations d'un circuit magnétique	50
III. 3. 1. Description	50
III. 3. 2. Théorème d'ampère et force magnétomotrice	51
III. 3. 3. Reluctance magnétique	52
III. 3. 3. 1. Reluctances magnétiques en séries	53
III. 3. 3. 2. Reluctances magnétiques en parallèles	54
III. 4. Loi comportementale des milieux ferromagnétiques: courbes $B = \mathcal{F}(H)$	55
III. 4. 1. Courbe de première aimantation	56
III. 4. 2. Boucle d'hystérésis	56
III. 5. Pertes dans les circuits magnétiques	58
III. 5. 1. Pertes par hystérésis	58
III. 5. 2. Pertes par courants de Foucault	59
III. 6. Exercices	60

Chapitre IV. Transformateur électrique monophasé

IV. 1. Définition, classification et constitution des transformateurs électriques	64
IV. 1. 1. Définition et invention du transformateur électrique	64

IV. 1. 2. Classification des transformateurs	64
IV. 1. 3. Constitution d'un transformateur	66
IV. 1. 4. Notations usuelles	66
IV. 2. Principe de fonctionnement du transformateur et schémas équivalents	67
IV. 2.1. Formule de Boucherot	67
IV. 2. 2. Fonctionnement à vide et rapport des tensions	67
IV. 2. 3. Fonctionnement en charge et rapport des courants	68
IV. 2. 4. Chute de tension en charge et schémas équivalents	70
IV. 2. 5. Détermination des éléments des schémas équivalents	74
IV. 2. 5. 1. Essai à vide	74
IV. 2. 5. 2. Essai en court circuit	74
IV. 3. Caractéristiques	75
IV. 3. 1. Chute de tension secondaire	75
IV. 3. 2. Rendement	76
Références bibliographiques	77

Chapitre I

Système électrique monophasé

I. 1. Définition et représentation d'une grandeur sinusoïdale

I. 1. 1. Grandeur périodique, alternative

Considérons une grandeur $g(t)$ (tension ou courant) variable dans le temps. On dit que la grandeur $g(t)$ est périodique si seulement si sa valeur instantanée $g(t)$ est telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, g(t) \equiv g(t + n T) \quad (\text{I.1})$$

T est la période (Unité seconde, s).

On peut définir la fréquence f (Unité Hertz, Hz) par :

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{I.2})$$

On dit que la grandeur $g(t)$ est alternative, si sa valeur instantanée $g(t)$ change de signe régulièrement, tantôt positif et tantôt négatif. On appelle alternance positif la partie où $g(t)$ est positive, alternance négative celle où $g(t)$ est négative.

Afin de fixer les idées, la figure I. 1 représente quelques ondes de grandeurs continues et alternatives

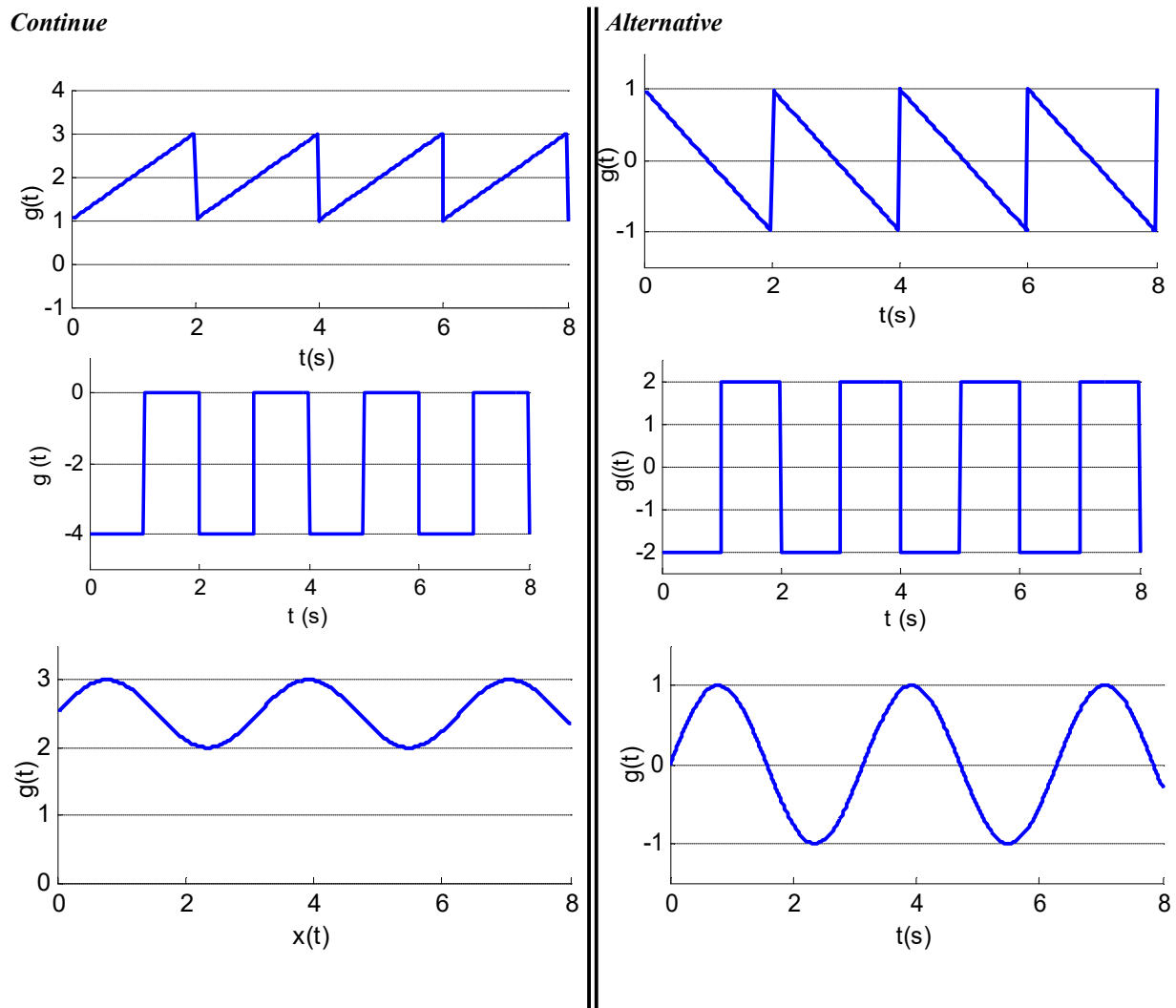


Figure I. 1. Quelques formes de grandeurs continues et alternatives

I. 1. 2. Grandeur électrique sinusoïdale

Dans la majorité des applications en génie électrique, l'onde utilisée est alternative sinusoïdale plutôt que des ondes triangulaires, carrées, ou autres formes.

Une grandeur sinusoïdale $g(t)$ est définie par l'expression mathématique :

$$g(t) = G_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{I.3})$$

G_m : Amplitude (même unité de $g(t)$).

$\omega t + \varphi$: Phase instantanée (unité Radian, rd).

φ : Phase initiale (Unité Radian, rd)

ω : Pulsation (Unité radian /seconde, rd/s). $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Ou $\omega = 2\pi f$.

La figure I. 2 illustre l'évolution temporelle de tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ (Unité volt, V)), telles que :

$$v_1(t) = 10 \sin(100 \pi t) \quad (\text{I.4})$$

$$v_2(t) = 10 \sin\left(100 \pi t - \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{I.5})$$

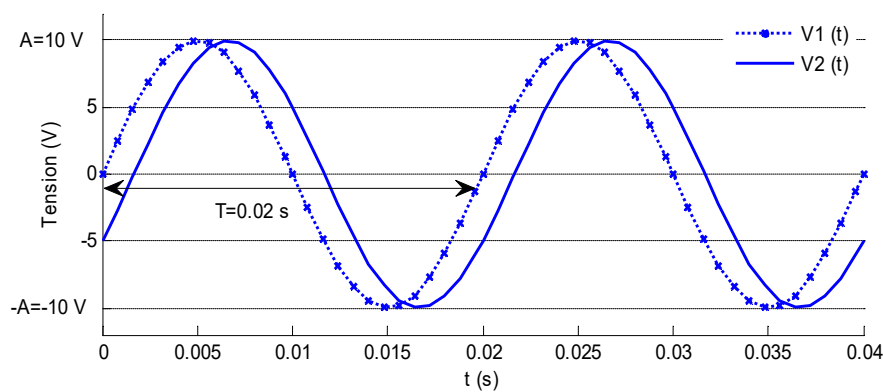


Figure I. 2. Évolution temporelle des tensions sinusoïdales

On peut tracer l'évolution angulaire de la tension, en changeant la base du temps par celle des angles, figure I. 3.

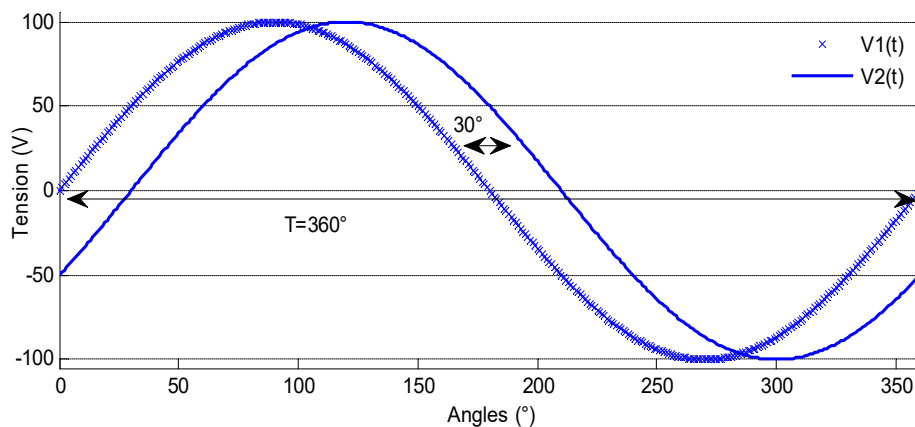


Figure I. 3. Évolution angulaire des tensions sinusoïdales

I. 1. 3. Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne d'une grandeur périodique g est l'inverse de la période multiplié par l'intégrale sur une période de la grandeur g , telle que

$$G_{moy} = \frac{1}{T} \int_{(T)} g(t) dt \quad (I.6)$$

— *Seconde définition d'une grandeur alternative, on dit qu'une grandeur est alternative si seulement si sa valeur moyenne est nulle.*

La valeur efficace d'une grandeur périodique g est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la grandeur g , telle que

$$G = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} g(t)^2 dt} \quad (I.7)$$

— *En sinusoïdale la valeur efficace est égale la valeur de l'amplitude divisée par $\sqrt{2}$.*

$$G = \frac{G_m}{\sqrt{2}} \quad (I.8)$$

I. 1. 4. Quelques formes usuelles des grandeurs électriques

En génie électrique, existe d'autres formes des grandeurs électriques alternatives, outre que les grandeurs sinusoïdales, telles que les grandeurs alternatives rectangulaires (dite aussi carrées) ou triangulaires ou sous d'autres formes. Ces dernières formes de grandeurs ont un domaine d'application bien spécifique. Le tableau I.1 regroupe quelque forme et montre les caractéristiques de chacune.

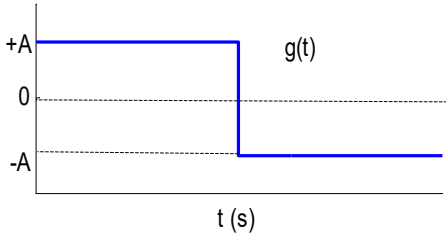
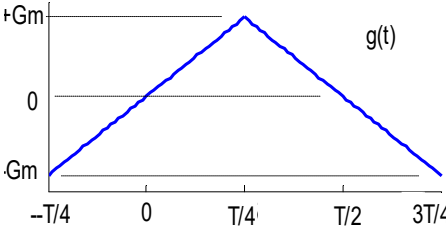
Nature de la grandeur et son expression	Evolution temporelle	Grandeur efficace
— Rectangulaire $g(t) = \begin{cases} \forall t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] & +G_m \\ \forall t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] & -G_m \end{cases}$		$G = G_m$
— Triangulaire $g(t) = \begin{cases} \forall t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] & \frac{4G_m}{T} t \\ \forall t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] & -4G_m T t + 2G_m \end{cases}$		$G = \frac{G_m}{\sqrt{3}}$

Tableau I. 1. Présentation de quelques formes usuelles

I. 1. 5. Représentation vectorielle d'une grandeur électrique sinusoïdale

— Considérons le cercle trigonométrique, figure I. 4. a; la valeur instantanée d'une grandeur sinusoïdale $g(t)$ peut être représentée par le mouvement de la projection du point M sur l'axe des ordonnées situé sur le cercle et décrivant un mouvement de rotation uniforme (à la vitesse angulaire ω).

— Sachant que toutes grandeurs électriques appartiennent au même réseau électriques (installation électriques) doivent avoir la même fréquence et par conséquent la même pulsation. Autrement toutes les grandeurs représentables dans le même diagramme vectorielle ayant même pulsation, leurs vecteurs représentatifs tournent à la même vitesse angulaire ω . On peut faire abstraction de la rotation. Figure I. 4. b.

— En génie électrique on caractérise les grandeurs par leurs valeurs efficaces, on donne au module du vecteur $\overrightarrow{OM}$ la valeur efficace G , on peut prendre l'instant initial $t=0$ comme instant de référence pour représenter la grandeur $g(t)$ comme montre la figure I. 4. c.

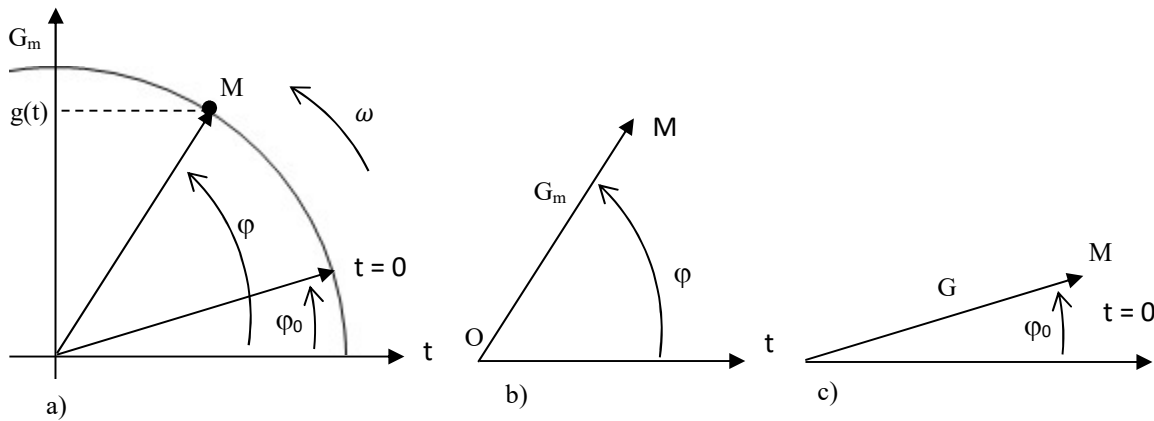


Figure I. 4. Différentes représentations vectorielles d'une grandeur sinusoïdale

I. 1. 6. Notation complexe d'une grandeur électrique sinusoïdale

On démontre mathématiquement que l'on peut associer un nombre complexe à une grandeur alternative. L'intérêt est de faciliter les calculs chaque fois que nous aurons à calculer le produit, le quotient, la racine, la dérivée, l'intégrale, ... de fonctions sinusoïdales.

$$g(t) = G\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}(G\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}) \quad (\text{I. 9})$$

Par convention, pour le reste de tout le document on peut éviter de mettre chaque fois imaginaire (ou réelle) de nombre complexe.

En tenant compte des considérations de la section précédente, on peut écrire

$$g(t) \equiv \bar{G} = Ge^{j\varphi} \quad (\text{I. 10})$$

Ou simplement, sous la forme polaire

$$\bar{G} = G^{\angle \varphi} \quad (\text{I. 11})$$

Soient deux grandeurs sinusoïdales g_1 et g_2 telles que

$$g_1(t) = G_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) \xrightarrow{\text{complexe}} \overline{G_1} = G_1 \angle \varphi_1 \quad (\text{I. 12})$$

$$g_2(t) = G_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_2) \xrightarrow{\text{complexe}} \overline{G_2} = G_2 \angle \varphi_2 \quad (\text{I. 13})$$

— *Addition ou soustraction* de deux grandeurs sinusoïdales de même fréquence résulte une grandeur sinusoïdale de même fréquence aussi, telle que

$$g_1(t) \pm g_2(t) = G \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{complexe}} \overline{G} = G \angle \varphi \quad (\text{I. 14})$$

On trouve

$$G \cos \varphi = G_1 \cos \varphi_1 \pm G_2 \cos \varphi_2 \quad (\text{I. 15})$$

$$G \sin \varphi = G_1 \sin \varphi_1 \pm G_2 \sin \varphi_2 \quad (\text{I. 16})$$

On déduit

$$G = \sqrt{G^2 \cos^2 \varphi + G^2 \sin^2 \varphi} \quad (\text{I. 17})$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{G \sin \varphi}{G \cos \varphi} \right) \quad (\text{I. 18})$$

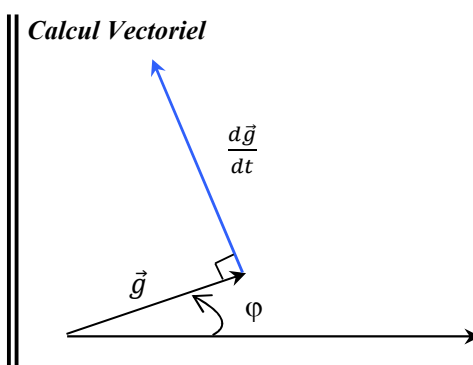
— *Dériver* une grandeur sinusoïdale revient à multiplier la valeur par ω et déphasé en avant de $\frac{\pi}{2}$.

Mathématiquement

$$g(t) = G \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \omega G \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

Calcul Vectoriel



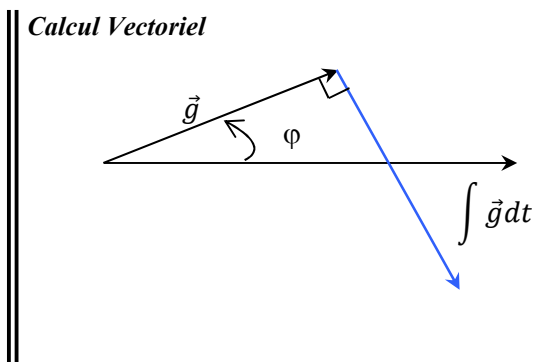
— *Intégrer* une grandeur sinusoïdale revient à diviser la valeur par ω et déphasé en arrière de $\frac{\pi}{2}$.

Mathématiquement

$$g(t) = G \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\int g(t) dt = \frac{1}{\omega} G \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

Calcul Vectoriel



I. 2. Loi d'Ohm en courant sinusoïdale, Impédance

Un circuit électrique linéaire RLC comporte des résistances R, des bobines caractérisées par leurs inductances propres L et des condensateurs caractérisés par leurs capacités C.

En régime établi, l'alimentation de ce circuit par une tension sinusoïdale $u(t)$ détermine un courant électrique sinusoïdale $i(t)$.

On définit l'impédance comme étant quotient de la tension $u(t)$ par le courant $i(t)$ dont son unité est Ohm, Ω .

En utilisant la notation complexe

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \quad (\text{I. 19})$$

En forme algébrique (ou cartésienne)

$$\bar{Z} = R + jX \quad (\text{I. 20})$$

R : Résistance du circuit, (Unité Ω).

X : Réactance du circuit, (Unité Ω).

En forme polaire

$$\bar{Z} = Z \angle \varphi \quad (\text{I.21})$$

z : Module de l'impédance, (Unité Ω). $z = \sqrt{R^2 + X^2}$

φ : Argument de l'impédance, (Unité rad ou $^\circ$). $\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$ (ou $\varphi = \arcsin\left(\frac{X}{Z}\right)$ ou $\varphi = \arccos\left(\frac{R}{Z}\right)$)

Afin d'examiner tous les cas possibles des circuits électriques linéaires composés d'une résistance, d'une inductance et d'une capacité (RLC) en série, on vous propose le tableau I. 2

Selon la valeur et le signe de l'argument φ de l'impédance, il est possible de déterminer le comportement dominant ou la tendance du circuit électrique. Le courant électrique est pris comme grandeur de référence, également appelée grandeur choisie à l'origine des phases.

— Si $\varphi = 0$, la tension et le courant sont en phase. Le circuit se comporte alors soit comme une résistance pure, soit comme un cas particulier de la résonance électrique, caractérisé par $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$. Dans cette situation, l'intensité du courant atteint sa valeur maximale.

— Si $\varphi > 0$, la tension est en avance par rapport au courant. La tendance dominante est alors inductive, le circuit est dit inductif et est caractérisé par $L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$.

— Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la tension est en avance de quadrature sur le courant, ce qui correspond au cas d'un circuit constitué d'une bobine pure.

— Si $\varphi < 0$, la tension est en retard par rapport au courant. La tendance dominante est alors capacitive, le circuit est dit capacitif et est caractérisé par $L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0$.

— Si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, la tension est en retard de quadrature sur le courant, ce qui correspond au cas d'un circuit constitué d'un condensateur pur.

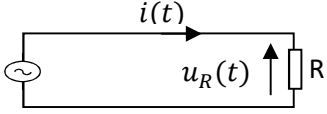
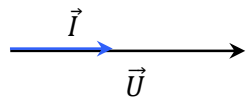
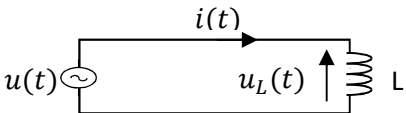
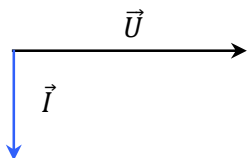
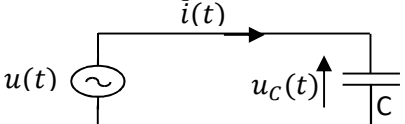
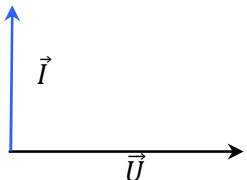
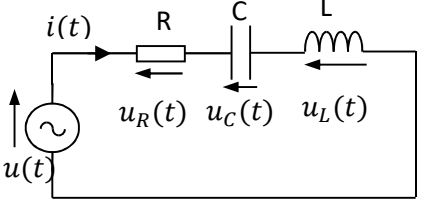
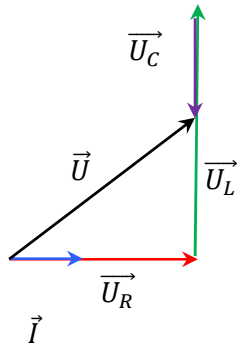
Nature du circuit	Expression de l'impédance	Etude vectorielle
— Résistance pure  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ ou $\bar{U} = U^{L0}$ $\bar{U} = \bar{Z} \bar{I}$	$\bar{U} = \bar{U}_R$ $\bar{U}_R = R \bar{I}$ $\bar{Z} = R$ La tension est en phase avec le courant	
— Bobine pure  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ ou $\bar{U} = U^{L0}$ $\bar{U} = \bar{Z} \bar{I}$	$\bar{U} = \bar{U}_L$ $\bar{U}_L = jL\omega \bar{I}$ ou $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $\bar{Z} = jL\omega$ Le courant est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension d'alimentation	
— Condensateur pur  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ ou $\bar{U} = U^{L0}$ $\bar{U} = \bar{Z} \bar{I}$	$\bar{U} = \bar{U}_C$ $\bar{U}_C = j \frac{1}{C\omega} \bar{I}$ ou $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ $\bar{Z} = -j \frac{1}{C\omega}$ Le courant est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension d'alimentation	
— Circuit RLC sérié  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ ou $\bar{U} = U^{L\varphi}$ $\bar{U} = \bar{Z} \bar{I}$ $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t)$ ou $\bar{I} = I^{L0}$	$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$ $\bar{U}_R = R \bar{I}$ $\bar{U}_L = jL\omega \bar{I}$ ou $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $\bar{U}_C = j \frac{1}{C\omega} \bar{I}$ ou $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ $\bar{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$ $\varphi = \arctan \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)$ Le courant est déphasé de φ par rapport à la tension d'alimentation	

Tableau I. 2. Présentation des différents cas de circuit linéaire RLC en série

L'association des impédances se fait de la même manière que celle des résistances, en remplaçant la résistance R par l'impédance complexe $\bar{Z}$, en fonction de leurs dispositions :

En série $\bar{Z} = \sum_i \bar{Z}_i$ (I.22)

En parallèle $\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sum_i \bar{Z}_i}$ (I.23)

I. 3. Calculs des puissances

I. 3. 1. Définitions, expressions et unités

Considérons une installation électrique alimentée par une source de tension alternative $u(t)$ et parcourue par un courant électrique $i(t)$.

— L'énergie électrique (*exprimée en Joule, J*) reçue par l'installation pendant un intervalle de temps infiniment court dt est donnée par :

$$dW(t) = u(t)i(t) dt \quad (I.24)$$

— La puissance instantanée $p(t)$ (*exprimée en Watt, W*) fournie par la source de tension $u(t)$ est donnée par

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t)i(t) \quad (I.25)$$

— La puissance active P (*exprimée en Watt, W*) correspond à la valeur moyenne de la puissance instantanée sur une période

$$P = \frac{1}{T} \int u(t)i(t) dt \quad (I.26)$$

— La puissance apparente S (*exprimée en Volt – ampère, VA*), par analogie avec le courant continu, où le produit de la tension et du courant représente la puissance apparente, est donnée par

$$S = U I \quad (I.27)$$

— Le facteur de puissance est défini comme le quotient de la puissance active P par la puissance S .

$$F = \frac{P}{S} \quad (I.28)$$

I. 3. 2. Puissances en sinusoïdale

Lorsque la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont sinusoïdaux telles que :

$$u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (I.29)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t) \quad (I.30)$$

— La puissance instantanée $p(t)$ est la somme de la puissance active P et d'un terme sinusoïdal de pulsation 2ω , appelé puissance fluctuante.

$$p(t) = U I \cos \varphi + U I \cos(2\omega t + \varphi) \quad (I.31)$$

— La puissance active P

$$P = U I \cos \varphi \quad (I.32)$$

— Le facteur de puissance F

$$F = \cos \varphi \quad (I.33)$$

— La puissance réactive Q (*exprimée en Volt – ampère réactif, VAR*)

$$Q = U I \sin \varphi \quad (I.34)$$

I. 3. 3. Puissance complexe

Considérons une installation électrique caractérisée par une impédance $\bar{Z} = R + j X$, alimentée par une source de tension $\bar{U}$ et parcourue par un courant électrique $\bar{I}$

— La puissance apparente complexe $\bar{S}$ (*exprimée en volt – ampères, VA*) est définie comme le produit de la tension et du courant complexes conjugués et s'écrit :

$$\bar{S} = \bar{U} \bar{I}^* \quad (\text{I. 35})$$

En développant, on obtient :

$$\bar{S} = P + j Q \quad (\text{I. 36})$$

On définit les puissances précédemment introduites en fonction de la puissance complexe à l'aide des formules suivantes :

— *Puissance active* :

$$P = U I \cos(\varphi) = R I^2 = \frac{U_R^2}{R} = \text{Re}(\bar{U} \bar{I}^*) = \frac{1}{2} (\bar{S} + \bar{S}^*) \quad (\text{I. 37})$$

— *Puissance réactive* :

$$Q = U I \sin(\varphi) = X I^2 = \frac{U_X^2}{X} = \text{Im}(\bar{U} \bar{I}^*) = \frac{1}{2j} (\bar{S} - \bar{S}^*) \quad (\text{I. 38})$$

— *Puissance apparente* :

$$S = U I = Z I^2 = \frac{U^2}{Z} = \text{module} (U \bar{I}^*) \quad (\text{I. 39})$$

— *Facteur de puissance* :

$$F = \cos(\varphi) = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S} \quad (\text{I. 40})$$

I. 3. 4. Energies active, réactive, apparente

Tout dispositif électrique fonctionnant en courant alternatif (moteur, transformateur, etc.) met en jeu deux formes d'énergie : l'énergie active et l'énergie réactive.

— **L'énergie active** (*exprimée en kWh*) est liée à la puissance active P (*en kW*) des récepteurs. Elle est intégralement convertie en travail mécanique et en chaleur (pertes).

— **L'énergie réactive** (*exprimée en kvarh*) est associée à la puissance réactive Q (*en Kvar*) des récepteurs. Contrairement à l'énergie active, qui est convertie en travail utile et en chaleur, l'énergie réactive ne produit pas directement d'effet utile mais est indispensable au bon fonctionnement de nombreux équipements électriques.

Dans un circuit inductif (exemple : moteurs, transformateurs, bobines) l'énergie réactive est positive ($Q > 0$) , stockée temporairement dans le champ magnétique des inductances avant d'être restituée au réseau et elle est nécessaire à l'excitation des circuits magnétiques.

Dans un circuit capacitif (exemple : condensateurs, câbles longs) l'énergie réactive est négative ($Q < 0$) , stockée sous forme d'énergie électrostatique dans les condensateurs avant d'être renvoyée à la source et elle compense l'énergie réactive inductive et peut être utilisée pour améliorer le facteur de puissance.

I. 3. 5. Composantes du triangle des puissances

Dans un circuit électrique alimenté par une tension sinusoïdale, chaque type d'énergie (active ou réactive) est associé à un courant spécifique :

—**Le courant actif I_a** (ou *composante active du courant*) il est responsable du transfert de l'énergie P , ce courant est en phase avec la tension d'alimentation et correspond à la puissance réellement consommée pour effectuer un travail utile (mécanique , thermique, etc.).

—**Le courant réactif I_r** (ou *composante réactive du courant*) il est responsable du transfert de l'énergie réactive Q , ce courant est déphasé de 90° par rapport à la tension d'alimentation, et ne produit pas de puissance active, mais il est nécessaire pour le fonctionnement des éléments inductifs (moteurs, transformateurs) ou capacitifs soit en retard (récepteur inductif), soit en avance (récepteur capacitif).

—**Le courant apparent I** est le courant résultant qui parcourt la ligne depuis la source jusqu'au récepteur.

Ces courants se composent alors vectoriellement comme représente la figure I. 5.

Mathématiquement

$$I_a = I \cos(\varphi)$$

$$I_r = I \sin(\varphi)$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}$$

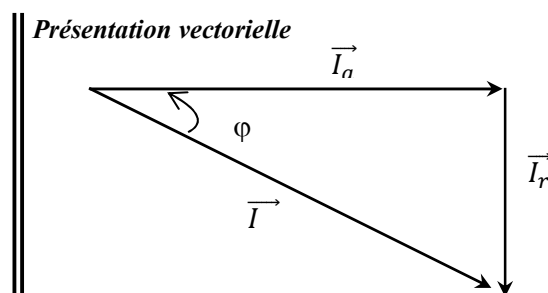


Figure 1. 5. Présentation vectorielle des deux composantes du courant

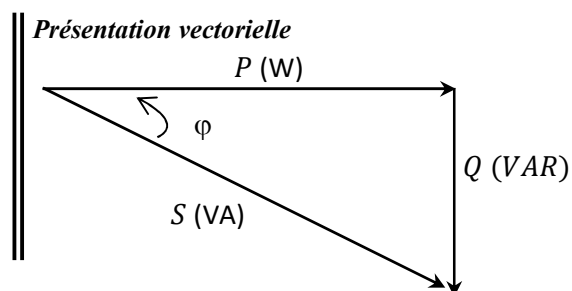
On peut déduire facilement le triangle des puissances

Mathématiquement

$$S = U I$$

$$P = S \cos \varphi$$

$$Q = S \sin \varphi$$



I. 3. 6. Conservation des puissances active et réactive

Les réseaux électriques sont constitués par un ensemble de dipôles; certains sont producteurs d'énergie (alternateurs, condensateurs) d'autres sont consommateurs d'énergie. Le théorème de Boucherot formulé en 1900 simplifier l'analyse du fonctionnement de ces réseaux électriques en se basant sur les puissances mises en jeu plutôt que sur les impédances.

— **Théorème de Boucherot :**

Dans un réseau électrique sinusoïdal constitué de n dipôles ($k = 1, 2, \dots, n$), la puissance active P (respectivement la puissance réactive Q) est égale à la somme algébrique des puissances actives P_k (respectivement des puissances réactives Q_k) des dipôles. Ceci s'applique que les dipôles soient producteurs ou consommateurs, en actif comme en réactif, c'est-à-dire quel que soit le signe des termes P_k et Q_k .

Mathématiquement

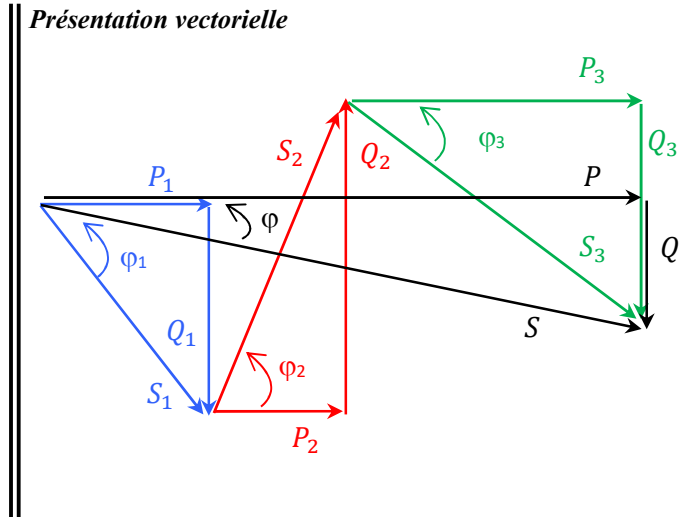
$$P = \sum_{k=1}^n P_k$$

$$Q = \sum_{k=1}^n Q_k$$

$$S \neq \sum_{k=1}^n S_k$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Présentation vectorielle



En appliquant ce théorème, les ingénieurs en électricité peuvent concevoir et gérer efficacement les réseaux électriques en minimisant les effets négatifs de l'énergie réactive et en optimisant la transmission de l'énergie active

I . 4. Exercices

Exercice N° 01

La tension $u(t)$ représentée par la figure I. 6.

1. Calculer la valeur crête à crête, la fréquence et l'amplitude de $u(t)$.
2. Déterminer la nature de $u(t)$.
3. Etablir l'expression de $u(t)$.
4. Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace de $u(t)$.

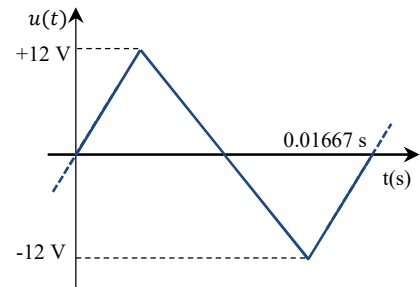


Figure I. 6. Evolution temporelle de la tension $u(t)$

Exercice N° 02

Les deux courants électriques, notés $i_1(t)$ et $i_2(t)$, sont représentés par la figure I. 7.

1. Etablir l'expression de chaque courant.
2. Calculer la valeur moyenne de chaque courant.
3. Calculer la valeur efficace de chaque courant.

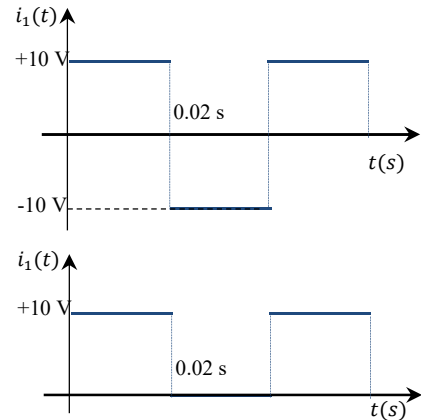


Figure I. 7. Evolution temporelle des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$

Exercice N° 03

Considérons une grandeur électrique sinusoïdale $g(t)$ donnée par l'expression suivante:

$$g(t) = 220 \sqrt{2} \cos \left(100 \pi t - \frac{\pi}{6} \right) (\text{Volt})$$

1. Déterminer l'amplitude, la pulsation, la fréquence et la phase initiale de $g(t)$.
2. Tracer l'évolution de $g(t)$ en fonction du temps sur un intervalle représentatif.
3. Calculer la valeur moyenne de $g(t)$.
4. Calculer la valeur efficace de $g(t)$.

Exercice N° 04

On applique entre les bornes A et B d'un circuit électrique une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace 220 V et de fréquence 50 Hz.

I. On dispose en série entre les bornes A et B une résistance $R = 100 \, \Omega$ et une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 0.5 \, \text{H}$. Déterminer :

- I.1. La valeur efficace de l'intensité du courant dans le circuit.
- I.2. La valeur efficace des tensions aux bornes de la résistance et aux bornes de la bobine.

II. Dans le but de rendre le courant en phase avec la tension aux bornes du circuit A et B, on ajoute un condensateur en série avec la résistance et la bobine.

- II.1. Calculer la valeur de la capacité C du condensateur permettant la correction du facteur de puissance.
- II.2. Après correction du facteur de puissance, déterminer:
 - II.2.1. L'intensité efficace du courant.
 - II.2.2. La tension efficace aux bornes du condensateur.

Exercice N° 05

On considère un circuit RLC en série parcouru par un courant sinusoïdal monophasé de valeur efficace 100 mA et de pulsation $100\pi \text{ rad/s}$. ($R = 1\text{ k}\Omega$, $L = 1.1 \text{ H}$ et $C = 20 \mu\text{F}$)

1. Calculer l'impédance complexe du circuit.
2. Calculer la valeur efficace des tensions aux bornes de chaque élément et de l'ensemble.
3. Calculer le déphasage φ entre la tension et le courant.
4. Le montage est-il inductif ou capacitif? Justifier votre réponse.
5. Calculer la puissance active consommée par le circuit.

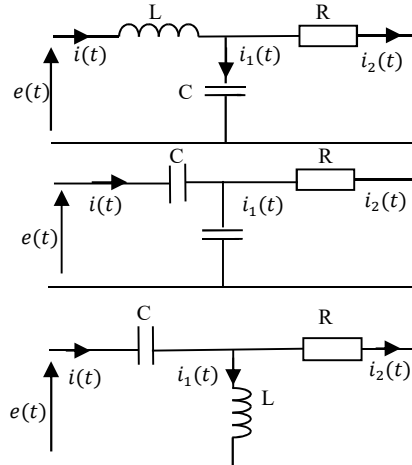


Figure I.8. Trois circuits électriques

Exercice N° 06

Pour les trois circuits suivants, représentés par la figure I.8.

Calculer pour chaque circuit:

1. L'impédance complexe totale.
2. Les intensités i , i_1 et i_2 .
3. La tension aux bornes des résistances.

A.N. $R = 2\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$, $L = 5\mu\text{H}$, $e(t) = 10\sqrt{2} \sin(10^5 t) \text{ V}$

Exercice N° 07

Le circuit représenté sur la figure 1.9 est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace $V=100 \text{ V}$ et de fréquence 50 Hz. Les composants de ce circuit sont caractérisés directement par leur impédance complexe.

1. Calculer la valeur efficace du courant.
2. Calculer la phase du courant (On considère la tension $\bar{V}$ à l'origine des phases).
3. Ecrire la loi de maille (deuxième loi de Kirchhoff) qui régit ce circuit.
4. Représenter le diagramme de Fresnel des grandeurs de la loi des mailles.

Exercice N° 08

Tracer le triangle des puissances pour le circuit série de la figure.1. 9.

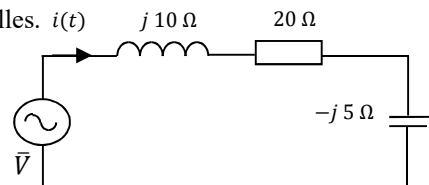


Figure I.9. Circuit électrique RLC série

Exercice N° 09

Un moteur à induction présente les caractéristiques suivantes :

- Rendement de 85%.
- Puissance mécanique fournie de 1492 W.
- Facteur de puissance est de 0,8 inductif.

Déterminer tous les paramètres définissant la puissance électrique fournie au moteur.

Exercice N° 10

Déterminer le triangle des puissances associé à la combinaison des trois charges suivantes :

- Charge n°1 : 250 VA, FP = 0,5 inductif ;
- Charge n°2 : 180 W, FP = 0,8 capacitif ;
- Charge n°3 : 300 VA, 100 vars inductifs.

Exercice N° 11

Un transformateur de puissance nominale 25 kVA alimente une charge de 12 kW ayant un facteur de puissance de 0,6 inductif.

1. Déterminer le taux de charge du transformateur en %.
2. Si ce transformateur doit alimenter d'autres charges ayant un facteur de puissance égal à l'unité, combien de kW sont encore disponibles avant d'atteindre la charge nominale du transformateur ?
3. Déterminer la puissance supplémentaire en kVA que le transformateur peut alimenter pour atteindre sa charge nominale, en supposant que ces charges ont un facteur de puissance de 0,866 capacitif ?

Exercice N° 12

Une machine industrielle monophasée est alimentée sous une tension efficace de 400 V, 50 Hz avec un facteur de puissance inductif de 0,75. Elle absorbe une puissance active de 12 kW.

Déterminer la puissance apparente absorbée par la machine.

Calculer la puissance réactive consommée.

Déterminer le courant efficace absorbé par la machine.

1. Pour améliorer le facteur de puissance à 0,9, calculer la puissance réactive compensatrice à fournir.
2. Déterminer la capacité du condensateur à installer pour réaliser cette correction.

I . 5. Solution des exercices

Solution exercice N° 01

1. Calculer :

La valeur crête à crête: Elle est donnée par la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la tension .

$$U_{crête-crête} = U_{max} - U_{min} = 24 \text{ V}$$

$$A. N. \quad U_{crête-crête} = 12 - (-12) = 24 \text{ V}$$

La fréquence: De la figure I. 6 on peut déduire la période $T = 0.01667 \text{ s}$

$$\text{On sait que : } f = \frac{1}{T}$$

$$A. N. \quad f = 60 \text{ Hz}$$

$$\text{L'amplitude: } A = \frac{U_{crête-crête}}{2}$$

$$A. N. \quad A = 12 \text{ V}$$

2. La nature de la tension $u(t)$: la tension $u(t)$ est une grandeur périodique, alternative et triangulaire.

3. L'expression de $u(t)$

Il suffit une période pour définir une grandeur périodique, comme indique la figure I. 10.

$$u(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta & \text{pour } t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \\ \gamma t + \delta & \text{pour } t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \end{cases} \quad \text{Il reste seulement la définition des constantes } \alpha, \beta, \gamma \text{ et } \delta$$

—Le premier segment de $u(t)$ peut-être défini sur

l'intervalle $\left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right]$ par l'équation d'une droite

qui passe par l'origine $\alpha t + \beta$.

Sachant $\beta = 0$, puisque elle passe par l'origine

α est la pente de la droite : $\alpha = \tan(\theta) = \frac{4A}{T}$

A. N. $\alpha = 2880$

—Le second segment de $u(t)$ peut-être défini dans l'intervalle $\left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$ par l'équation d'une droite $\gamma t + \delta$

γ est la tangente de la droite, $\gamma = \tan(\theta) = -\frac{4A}{T}$

A. N. $\alpha = -2880$

A $t = \frac{T}{2}$, $u(T/2) = 0$ alors $-\frac{4A}{T} \frac{T}{2} + \delta = 0 \Rightarrow \delta = 2A$

A. N. $\delta = 24$

Finalement, l'expression de $u(t)$ est :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T} t & \text{volt pour } t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \\ -\frac{4A}{T} t + 2A & \text{volt pour } t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \end{cases}$$

$$A. N. u(t) = \begin{cases} 2880 t & \text{volt pour } t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \\ -2880 t + 24 & \text{volt pour } t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \end{cases}$$

4. La valeur moyenne et la valeur efficace de $u(t)$

—La valeur moyenne de $u(t)$

Par définition la valeur moyenne d'une grandeur périodique est donnée comme suit :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_{(T)} u(t) dt$$

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} u(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4A}{T} t \right) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(-\frac{4A}{T} t + 2A \right) dt \right)$$

Après intégration on trouve

$$U_{\text{moy}} = 0$$

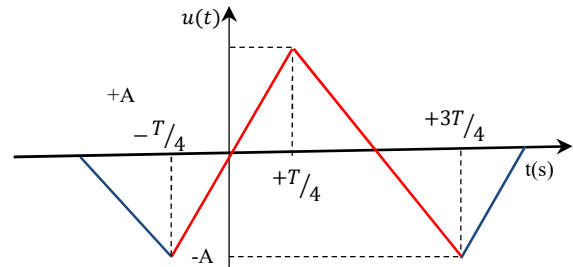


Figure I. 10. L'allure de la tension $u(t)$ sur une période T

—La valeur efficace de $u(t)$

Par définition la valeur efficace d'une grandeur périodique est donnée comme suit :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} u(t)^2 dt}$$

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_{(T)} u(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} u(t)^2 dt = \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4A}{T} t \right)^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(-\frac{4A}{T} t + 2A \right)^2 dt \right)$$

Après intégration on trouve

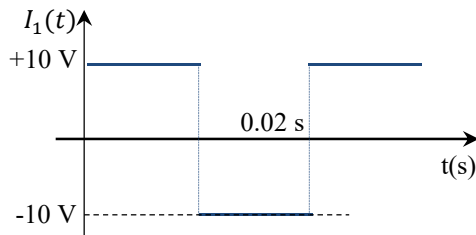
$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} A,$$

$$A. N. \quad U = 6.928 \text{ V}$$

Solution exercice N° 02

1. L'expression de chaque courant

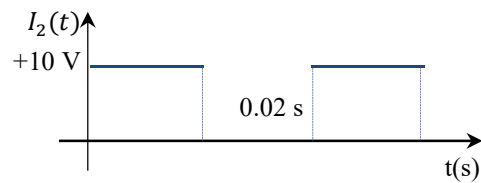
— Courant I_1



$$i_1(t) = \begin{cases} A & \text{pour } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ -A & \text{pour } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases}$$

$$A. N. \quad i_1(t) = \begin{cases} 10 \text{ V} & \text{pour } t \in [0, 0.01[\\ -10 \text{ V} & \text{pour } t \in [0.01, 0.02[\end{cases}$$

— Courant I_2



$$i_2(t) = \begin{cases} A & \text{pour } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right[\\ 0 & \text{pour } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right[\end{cases}$$

$$A. N. \quad i_2(t) = \begin{cases} 10 \text{ V} & \text{pour } t \in [0, 0.01[\\ 0 \text{ V} & \text{pour } t \in [0.01, 0.02[\end{cases}$$

2. La valeur moyenne de chaque courant

— Courant I_1

$$I_{1 \text{ moy}} = \frac{1}{T} \int_{(T)} i_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i_1(t) dt$$

$$I_{1 \text{ moy}} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (A) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-A) dt \right) = 0$$

— Courant I_2

$$I_{2 \text{ moy}} = \frac{1}{T} \int_{(T)} i_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i_2(t) dt$$

$$I_{2 \text{ moy}} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (A) dt \right) = \frac{A}{2}$$

$$A. N. \quad I_{2 \text{ moy}} = 5 \text{ V}$$

3. La valeur efficace de chaque courant

— Courant I_1

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} i_1(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_1(t)^2 dt}$$

$$I_1 = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (A)^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-A)^2 dt \right) = A$$

$$A. N. I_1 = 10 V$$

— Courant I_2

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} i_2(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_2(t)^2 dt}$$

$$I_{2 \text{ moy}} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (A^2) dt \right)} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$A. N. I_{2 \text{ moy}} = \frac{10}{\sqrt{2}} V$$

Solution exercice N° 03

1. Détermination

La tension $g(t)$ est donnée comme suit :

$$g(t) = 220 \sqrt{2} \cos \left(100 \pi t - \frac{\pi}{6} \right) (\text{Volt})$$

Elle est de la forme

$$g(t) = G \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi_0) (\text{Volt})$$

Par identification entre les deux formes précédentes on obtient :

$$\text{L'amplitude: } A = 220 \sqrt{2} V.$$

$$\text{La pulsation: } \omega = 100 \pi \text{ rd/s.}$$

$$\text{La fréquence: } f = \frac{\omega}{2\pi}, A. N. f = 50 \text{ Hz.}$$

$$\text{La phase initiale: } \varphi_0 = \frac{-\pi}{6} \text{ rd ou : } \varphi_0 = -30^\circ$$

2. L'évolution de $g(t)$ en fonction du temps sur un intervalle représentatif.

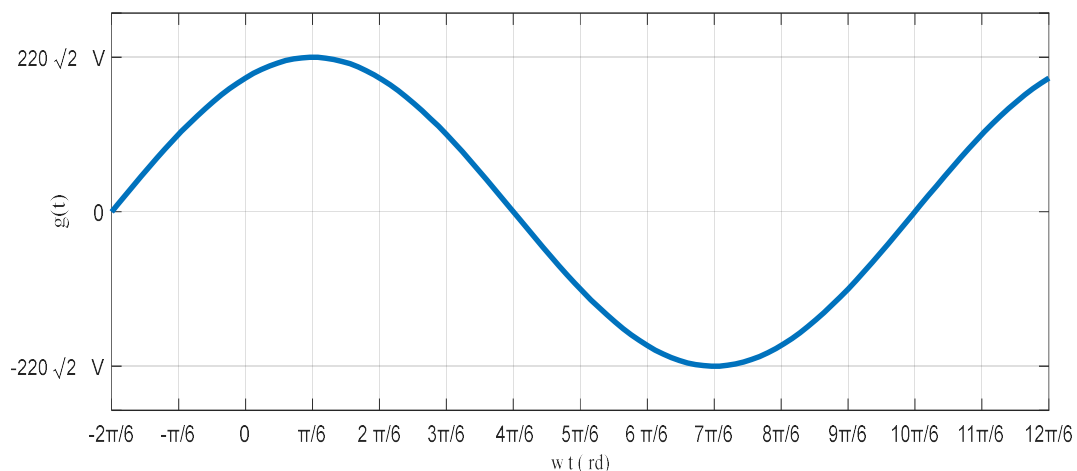


Figure I. 11. L'évolution de $g(t)$ en fonction du temps

4. La valeur moyenne de $G(t)$

Valeur moyenne de $G(t)$

$$G_{moy} = \frac{1}{T} \int_{(T)} G(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \left(220 \sqrt{2} \cos \left(100 \pi t - \frac{\pi}{6} \right) \right) dt \right) = 0$$

5. La valeur moyenne de $G(t)$

La efficace de $G(t)$

$$G = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} G(t)^2 dt}$$

$$G^2 = \frac{1}{T} \int_{(T)} G(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T G(t)^2 dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \left(220 \sqrt{2} \cos \left(100 \pi t - \frac{\pi}{6} \right) \right)^2 dt \right)$$

$$G^2 = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \left(220 \sqrt{2} \left(\frac{1 - \sin \left(100 \pi t - \frac{\pi}{6} \right)}{2} \right) \right)^2 dt \right) = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$A.N. \quad G = 220 V$$

Solution exercice N° 04

I. Pour Circuit RC en série:

I. 1. Intensité efficace du courant

Pour un circuit RL en série, d'après la loi d'ohm en alternatif :

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$$

$$\text{Telle que : } \bar{Z} = R + jX_L$$

Avec

X_L : Réactance inductive, donnée comme suit

$$X_L = \omega L = 2 \pi f L \xrightarrow{A.N.} X_L = 157.08 \Omega$$

$$\text{Donc } \bar{Z} = 100 + j157.08 \Omega \longrightarrow Z \approx 186.2 \Omega$$

Le courant efficace est donnée par :

$$I = \frac{V}{Z} \xrightarrow{A.N.} I = 1.18 A$$

I. 2. Tension efficaces aux bornes des composantes

La valeur de la tension efficace aux bornes de la résistance:

$$V_R = R I \xrightarrow{A.N.} V_R = 100 \times 1.18 = 118 V.$$

La valeur de la tension efficace aux bornes de la bobine:

$$V_C = X_C I \xrightarrow{A.N.} V_C = 157.08 \times 1.18 \approx 185.35 V.$$

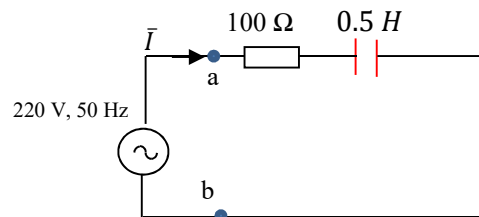


Figure I. 12. Circuit RL série

N.B. On remarque que, $V \neq V_R + V_L$, ceci ne se contrarie pas avec la loi de Kirchhoff (Deuxième loi de Kirchhoff ou loi des mailles), c'est-à-dire $\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L$.

II. Correction du facteur de puissance avec un condensateur

II. 1. Valeur de la capacité C du condensateur permettant la correction du facteur de puissance

Pour rendre le courant en phase avec la tension, nous devons annuler la réactance totale en ajoutant une capacité C qui compense X_L , c'est-à-dire :

$$X_L = X_C$$

Où la réactance capacitive est donnée par :

$$X_C = \frac{1}{C\omega}$$

Ainsi

$$\frac{1}{C\omega} = L\omega \longrightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} \xrightarrow{A.N.} C \approx 20.3\mu F$$

II. 2.1. Valeur efficace du courant après correction

Après correction, l'impédance totale du circuit devient purement résistive :

$$\bar{Z}' = 100 \Omega \longrightarrow Z' = 100 \Omega$$

Le courant devient :

$$I' = \frac{V}{Z'} = \frac{220}{100} = 2.2 A$$

II.2.2. Tension efficace aux bornes du condensateur

$$V_C = X_C I \xrightarrow{A.N.} V_C = 157.08 \times 2.2 \approx 345.6 V$$

Solution exercice N° 05

1. L'impédance complexe du circuit

Circuit RLC en série, l'impédance est :

$$\bar{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad \text{ou} \quad \bar{Z} = R + j(X_L - X_C) \quad \text{ou} \quad \bar{Z} = R + \bar{X}_L + \bar{X}_C$$

$$\bar{Z} = 1000 + j\left(1.1 \times 100 \pi - \frac{1}{20 \times 10^{-6} \times 100 \pi}\right)$$

$$\text{Donc } \bar{Z} = 1000 + j 186.43 \Omega \xrightarrow{\text{Sous la forme polaire}} \bar{Z} \approx 1017.2^{\angle 10.55^\circ} \Omega$$

2. Calculer la valeur efficace des tensions aux bornes de chaque élément et de l'ensemble.

$$\text{La valeur efficace de la tension aux bornes de la résistance: } V_R = R I \Rightarrow V_R = 1000 \times 0.1 = 100 V$$

$$\text{La valeur efficace de la tension aux bornes de la bobine: } V_L = X_L I \Rightarrow V_L = 345.58 \times 0.1 = 34.56 V$$

$$\text{La valeur efficace de la tension aux bornes du condensateur : } V_C = X_C I \Rightarrow V_C = 159.15 \times 0.1 = 15.92 V$$

$$\text{La valeur efficace de la tension totale dans le circuit : } V = Z I \Rightarrow V = 1017.2 \times 0.1 = 101.72 V$$

3. Calculer le déphasage φ entre la tension et le courant

Le déphasage est donné par :

$$\Delta\varphi = \varphi_V - \varphi_C = \varphi_Z \longrightarrow \Delta\varphi = \arctg\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right) = \arctg\left(\frac{345.58 - 159.15}{1000}\right) \approx 10.55^\circ$$

4. Le montage est-il inductif ou capacitif? Justifier votre réponse

Le montage est inductif parce que $\Delta\varphi > 0$ c'est-à-dire $L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$ Ou $X_L > X_C$

On dit que l'effet inductif est plus dominant que l'effet capacitif

5. Calculer la puissance active consommée par le circuit

$$P = R I^2 = 1000 \times 0.1^2 = 10 \text{ Watt}$$

Solution exercice N° 06

L'impédance des éléments du circuit est donnée par :

$$\text{Impédance de la résistance : } \overline{Z}_R = R = 2\Omega$$

$$\text{Impédance de l'inductance : } \overline{Z}_L = j\omega L = j(10^5 \times 5 \times 10^{-6}) = j0.5\Omega$$

$$\text{Impédance du condensateur : } \overline{Z}_C = -j\frac{1}{C\omega} = -j\frac{1}{(10^5 \times 10 \times 10^{-6})} = -j\Omega$$

$$\text{La tension d'alimentation } e(t) = 10\sqrt{2}\sin(10^5 t) \text{ V} \xrightarrow{\text{Sous la forme complexe}} \overline{E} = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

I. Pour le circuit 1, figure I.13

I.1. L'impédance complexe totale

$$\overline{Z} = \overline{Z}_L + (\overline{Z}_R // \overline{Z}_C) = \overline{Z}_L + \left(\frac{\overline{Z}_R \overline{Z}_C}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C} \right)$$

$$\overline{Z} = j0.5 + \left(\frac{2 \times -j}{2 - j} \right) = -0.4 - 0.3j \xrightarrow{\text{Sous la forme polaire}} \overline{Z} = 0.5\angle -143.13^\circ \Omega$$

$$\xrightarrow{\text{Ou en radian}} \overline{Z} = 0.5\angle -2.5 \text{ rad} \Omega$$

I.2. Les intensités i , i_1 et i_2

L'intensité totale dans le circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}} = \frac{10\angle 0^\circ}{0.5\angle -143.13^\circ} = 0.5\angle -143.13^\circ \text{ A}$$

Selon la loi du diviseur du courant :

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C} \overline{I} = \frac{-j}{2 - j} \times 0.5\angle -143.13^\circ = 0.447\angle -116.56^\circ \text{ A}$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{Z}_L}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C} \overline{I} = \frac{j}{2 - j} \times 0.5\angle -143.13^\circ = 0.2235\angle -206.56^\circ \text{ A}$$

I.3. La tension aux bornes de la résistance

$$\overline{V}_R = \overline{Z}_R \overline{I}_2 = 2 \times 0.2235\angle -206.56^\circ = 0.447\angle -206.56^\circ \text{ V}$$

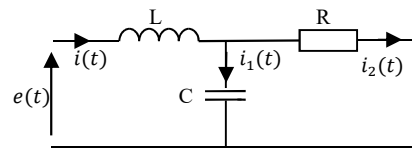


Figure I.13. Circuit L en série avec R // C

II. Pour le circuit 1, figure I.14

II.1. L'impédance complexe totale

$$\bar{Z} = \bar{Z}_C + (\bar{Z}_R // \bar{Z}_C) = \bar{Z}_C + \left(\frac{\bar{Z}_R \bar{Z}_C}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C} \right)$$

$$\bar{Z} = -j + \left(\frac{2 \times -j}{2-j} \right) = 0.4 - 1.8j \xrightarrow{\text{Sous la forme polaire}} \bar{Z} \approx 1.84 \angle -77.47^\circ \Omega$$

II.2. Les intensités i_1 et i_2

L'intensité totale dans le circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{1.84 \angle -77.47^\circ} = 5.43 \angle 77.47^\circ A$$

Selon la loi du diviseur du courant :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{Z}_R}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C} \bar{I} = \frac{2}{2-j} \times 5.43 \angle 77.47^\circ = 4.86 \angle 104.04^\circ A$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C} \bar{I} = \frac{-j}{2-j} \times 5.43 \angle 77.47^\circ = 2.43 \angle 14.04^\circ A$$

II.3. La tension aux bornes de la résistance

$$\bar{V}_R = \bar{Z}_R \bar{I}_2 = 2 \times 2.43 \angle 14.04^\circ = 4.86 \angle 14.04^\circ V$$

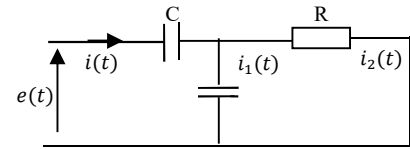


Figure I.14. Circuit C en série avec $R // C$

III. Pour le circuit 1, figure I.15

II.1. L'impédance complexe totale

$$\bar{Z} = \bar{Z}_C + (\bar{Z}_R // \bar{Z}_L) = \bar{Z}_C + \left(\frac{\bar{Z}_R \bar{Z}_L}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L} \right)$$

$$\bar{Z} = -j + \left(\frac{2 \times j0.5}{2+j0.5} \right) = 0.118 - 0.529j \xrightarrow{\text{Sous la forme polaire}} \bar{Z} \approx 0.542 \angle -77.47^\circ \Omega$$

II.2. Les intensités i_1 et i_2

L'intensité totale dans le circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{0.542 \angle -77.47^\circ} = 18.45 \angle 77.47^\circ A$$

Selon la loi du diviseur du courant :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{Z}_R}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L} \bar{I} = \frac{2}{2+j0.5} \times 18.45 \angle 77.47^\circ = 5.27 \angle 63.43^\circ A$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L} \bar{I} = \frac{j0.5}{2+j0.5} \times 18.45 \angle 77.47^\circ = 1.317 \angle 153.43^\circ A$$

II.3. La tension aux bornes de la résistance

$$\bar{V}_R = \bar{Z}_R \bar{I}_2 = 2 \times 1.317 \angle 153.43^\circ = 2.634 \angle 153.43^\circ V$$

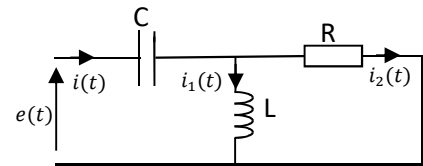


Figure I.15. Circuit C en série avec $R // L$

Solution exercice N° 07

1. La valeur efficace du courant

D'après la figure I.9, le circuit est RLC en série, l'impédance est :

$$\bar{Z} = R + \bar{X}_L + \bar{X}_C \quad \bar{Z} = 20 + j(10 - 5) = 20 + j 5 \Omega$$

$$\bar{Z} = 20.61^{\angle 14.04^\circ} \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{20.61} = 4.85 \text{ A}$$

2. La phase du courant (On considère la tension $\bar{V}$ à l'origine des phases).

La tension $\bar{V}$ à l'origine des phases $\Rightarrow \bar{V} = 100^{\angle 0^\circ} \text{ V}$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{V}{Z} \\ \varphi_c = \varphi_V - \varphi_Z \end{cases}$$

$$\varphi_c = 0 - 14.04 = -14.04^\circ$$

3. Ecrire la loi de maille (deuxième loi de Kirchhoff) qui régit ce circuit

La valeur de la tension aux bornes de la résistance: $\bar{V}_R = R \bar{I} \Rightarrow \bar{V}_R = 20 \cdot 4.85^{\angle -14.04^\circ} = 97^{\angle -14.04^\circ} \text{ V}$

La valeur de la tension aux bornes de la bobine: $\bar{V}_L = \bar{X}_L \bar{I} \Rightarrow \bar{V}_L = 10^{\angle 90^\circ} 4.85^{\angle -14.04^\circ} = 48.5^{\angle 75.96^\circ} \text{ V}$

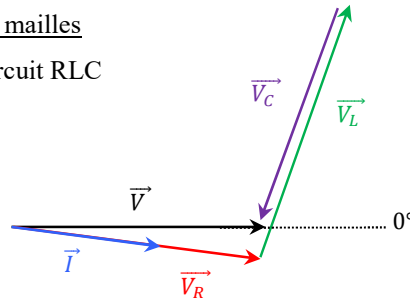
La valeur de la tension aux bornes du condensateur : $\bar{V}_C = \bar{X}_C \bar{I} \Rightarrow \bar{V}_C = 5^{\angle -90^\circ} 4.85^{\angle -14.04^\circ} = 24.25^{\angle -104.04^\circ} \text{ V}$

La loi des mailles dite aussi la deuxième loi de Kirchhoff

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C \xrightarrow{\text{Numériquement}} 97^{\angle -14.04^\circ} + 48.5^{\angle 75.96^\circ} + 24.25^{\angle -104.04^\circ} = 100^{\angle 0^\circ} \text{ V}$$

4. Diagramme de Fresnel des grandeurs de la loi des mailles

la figure I. 16 illustre la loi de maille régissant le circuit RLC



Solution exercice N° 08

$$V(t) = 150 \sin(\omega t + 10^\circ) \xrightarrow{\text{En complexe}} \bar{V} = \frac{150}{\sqrt{2}}^{\angle 10^\circ} \text{ V}$$

$$i(t) = 5 \sin(\omega t - 50^\circ) \xrightarrow{\text{En complexe}} \bar{I} = \frac{5}{\sqrt{2}}^{\angle -50^\circ} \text{ A}$$

— La puissance apparente complexe $\bar{S}$ est :

$$\bar{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = 106.07^{\angle 10^\circ} \times 3.54^{\angle -50^\circ} = 375.5^{\angle -60^\circ} \text{ VA} = 187.75 + j325.25 \text{ VA}$$

$$S = 375.5 \text{ VA}$$

On peut déduire :

— La puissance active P

$$P = \operatorname{Re}(\bar{S}) = 187.75 \text{ W}$$

— La puissance réactive Q

$$Q = \operatorname{Im}(\bar{S}) = 325 \text{ vars inductifs}$$

— Le facteur de puissance F

$$F = \cos(60^\circ) = 0.5 \text{ inductif}$$

Le triangle de puissance est représenté par la figure I. 17.

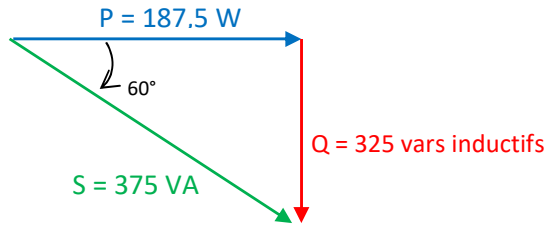


Figure I.17. Triangle de puissance

Solution exercice N° 09

Les paramètres définissant la puissance électrique fournie au moteur :

— La puissance électrique absorbée P (la puissance active)

$$P = \frac{P_m}{\eta} = \frac{1492}{0.85} = 1755.29 \text{ W}$$

— La puissance apparente S

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{1755.29}{0.8} = 2194.11 \text{ VA}$$

— La puissance réactive Q

$$\varphi = \arccos(0.8) = 36.9^\circ$$

$$Q = S \times \sin \varphi = 2194.11 \times \sin 36.9 = 1316.47 \text{ vars inductifs}$$

Solution exercice N° 10

— Charge n°1 :

$$S_1 = 250 \text{ VA}, F_1 = \cos \varphi_1 = 0.5 \text{ inductif}$$

$$P_1 = S_1 \cos \varphi_1 = 250 \times 0.5 = 125 \text{ W}$$

$$Q_1 = S_1 \sin \arccos \varphi_1 = 250 \times \sin \arccos 0.5 = 216.5 \text{ vars inductifs}$$

— Charge n°2 :

$$P_2 = 180 \text{ W}, F_2 = \cos \varphi_2 = 0.8 \text{ capacitif}$$

$$S_2 = \frac{P_2}{\cos \varphi_2} = \frac{180}{0.8} = 225 \text{ VA}$$

$$Q_2 = S_2 \sin \arccos \varphi_2 = 225 \times \sin \arccos 0.8 = 135 \text{ vars capacitifs}$$

— Charge n°3 :

$$S_3 = 300 \text{ VA}, Q_3 = 100 \text{ vars inductifs}$$

$$P_3 = \sqrt{S_3^2 - Q_3^2} = \sqrt{300^2 - 100^2} = 282.84 \text{ W}$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{P_3}{S_3} = \frac{282.84}{300} = 0.9428 \text{ inductif}$$

—Somme des puissances (Triangle des puissances total)

Puissance active totale :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 125 + 180 + 282.84 = 587.84 \text{ W}$$

Puissance réactive totale :

$$Q = Q_1 - Q_2 + Q_3 = 216.5 - 135 + 100 = 181.5 \text{ vars inductifs}$$

Puissance apparente totale :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{587.84^2 + 181.5^2} = 614.14 \text{ VA}$$

Facteur de puissance total :

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{587.84}{616} = 0.957 \text{ inductif}$$

Le triangle de puissance est représenté par la figure I. 18.

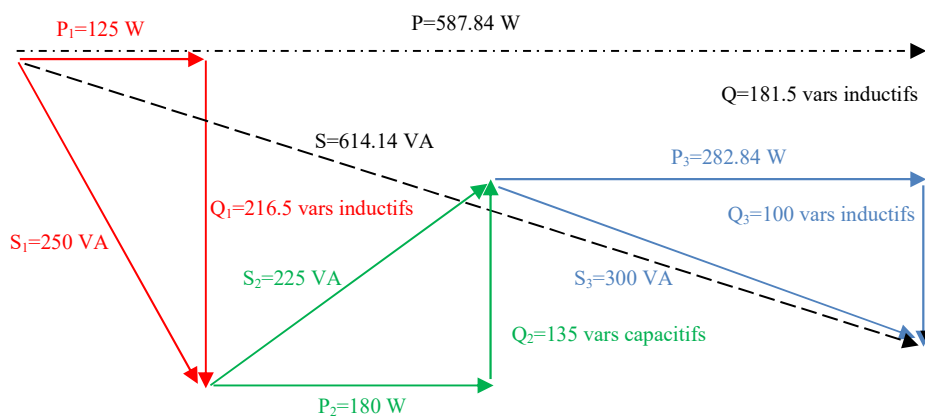


Figure I.18. Triangle de puissance de trois charges

Solution exercice N° 11

1. Le taux de charge du transformateur en %

Le taux de charge τ du transformateur est :

$$\tau = \frac{S_1}{S_n} \times 100$$

Or, la puissance apparente S_1 de la charge actuelle est :

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos \varphi_1} = \frac{12}{0.6} = 20 \text{ KVA}$$

$$\xrightarrow{\text{Donc}} \tau = \frac{S_1}{S_n} = \frac{20}{25} \times 100 = 80\%$$

2. Puissance encore disponible avant d'atteindre la charge nominale

On peut calculer

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ Kvars inductifs}$$

$$\varphi_1 = \arccos 0.6 = 53.13^\circ$$

La charge additionnelle est caractérisée par P_{ad} , Q_{ad} , S_{ad} et $F_{ad} = \cos \varphi_{ad} = 1$
 La charge additionnelle possède un facteur de puissance égal à 1 $\Rightarrow Q_{ad} = 0 \text{ vars}$

Par conséquent :

la puissance réactive $Q_n = Q_1 = 16 \text{ Kvars inductifs}$, comme illustre la figure I.19

On peut calculer

$$P_n = \sqrt{S_n^2 - Q_n^2} = \sqrt{25^2 - 16^2} = 19.2 \text{ W}$$

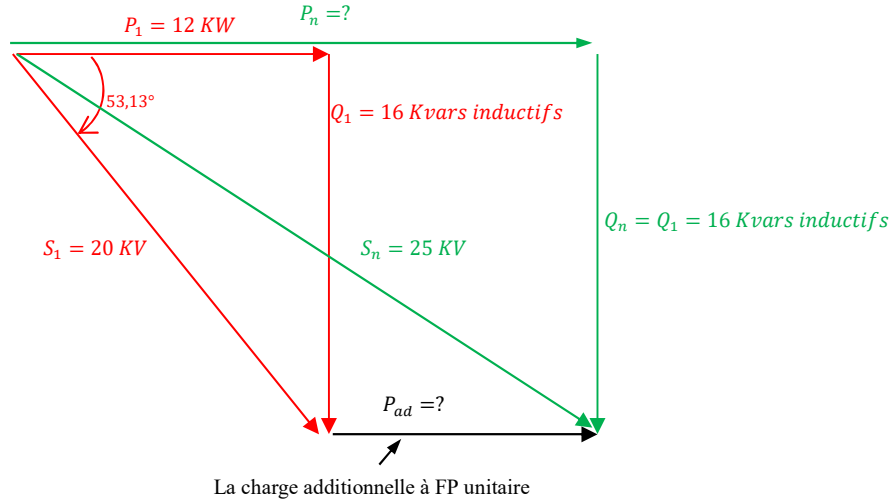


Figure I.18. Triangle de puissance avec une charge additionnelle à FP unitaire

$$P_n = P_1 + P_{ad} \Rightarrow P_1 = P_n - P_{ad} = 19.2 - 12 = 7.2 \text{ W}$$

3. Déterminer la puissance supplémentaire en kVA que le transformateur peut alimenter pour atteindre sa charge nominale, en supposant que ces charges ont un facteur de puissance de 0.866 capacitif ?

Le facteur de puissance de la charge supplémentaire est 0.866 capacitif $\Rightarrow \varphi_{sup} = \arccos 0.866 = 30^\circ$

Le triangle de puissance dans ce cas est représenté par la figure I.19.

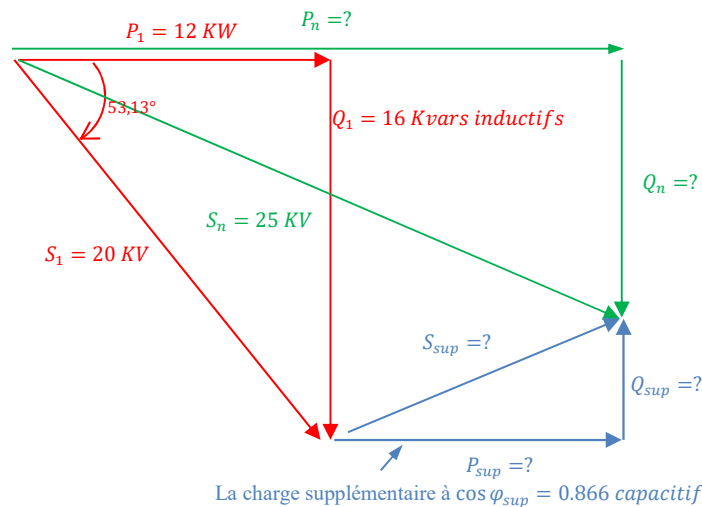


Figure I.19. Triangle de puissance avec une charge additionnelle à supplémentaire à $\cos \varphi_{sup} = 0.866$ capacitif

La puissance active et la puissance réactive de la charge supplémentaire sont:

$$P_{sup} = S_{sup} \times \cos \varphi_{sup} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{sup}$$

$$Q_{sup} = S_{sup} \times \sin \varphi_{sup} = \frac{1}{2} S_{sup}$$

La charge nominale est donnée comme suit :

$$S_n^2 = P_n^2 + Q_n^2 = (P_1 + P_{sup})^2 + (Q_1 - Q_{sup})^2$$

Finalement, on obtient l'équation du second ordre suivante :

$$25^2 = \left(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} S_{sup}\right)^2 + \left(16 - \frac{1}{2} S_{sup}\right)^2$$

La résolution de cette équation donne deux solutions possibles, on garde seule la valeur positive qu'a un sens physique :

$$S_{sup} = 12.8 \text{ KVA}$$

La puissance supplémentaire en kVA que le transformateur peut encore fournir avant d'atteindre sa charge nominale est 12.8 KVA.

Solution exercice N° 12

1. La puissance apparente absorbée par la machine

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{12}{0.75} = 16 \text{ KVA}$$

2. La puissance réactive absorbée par la machine

$$S = \frac{P}{\sin \arccos \varphi} = \frac{12}{\sin \arccos 0.75} = 10.58 \text{ Kvars inductifs}$$

3. Le courant efficace absorbé par la machine

$$S = U I \Rightarrow I = \frac{S}{U} = \frac{16 \times 10^3}{400} = 40 \text{ A}$$

4. La puissance réactive compensatrice à fournir

Après correction, la nouvelle puissance réactive doit être :

$$Q_2 = S \times \sin \arccos \varphi_2 = 16 \times \sin \arccos 0.9 = 6.98 \text{ Kvars inductifs}$$

La puissance réactive compensatrice est :

$$Q_{comp} = Q - Q_2 = 10.58 - 6.98 = 3.6 \text{ Kvars inductifs}$$

5. La capacité du condensateur à installer pour réaliser cette correction

$$Q_{comp} = U^2 C \omega \Rightarrow C = \frac{Q_{comp}}{U^2 2 \pi f} = \frac{3.6 \times 10^3}{400^2 \times 2 \times \pi \times 50} = 71.6 \mu F$$

Chapitre II

Système électrique triphasé

II. 1. Définition et représentation d'un système de grandeurs triphasé équilibré

II. 1. 1 Système électrique polyphasé

Un système électrique polyphasé équilibré est un ensemble P grandeurs électriques de même fréquence, ayant des valeurs efficaces identiques et présentant entre elles un déphasage angulaire régulier de $\frac{2\pi}{P}$.

Dans la pratique, les systèmes les plus couramment rencontrés sont:

- Le système électrique biphasé ($P = 2$) : les deux phases sont déphasées de π radians (180°)
- Le système électrique triphasé ($P = 3$) : les trois phases sont déphasées de $\frac{2\pi}{3}$ radians (120°)
- Le système électrique hexaphasé ($P = 6$) : les six phases sont déphasées de $\frac{2\pi}{6}$ radians (60°)

II. 1. 2 Système électrique triphasées

Le système triphasé est largement utilisé dans la production, le transport et la distribution d'énergie électrique en raison de ses nombreux avantages par rapport aux systèmes monophasés. Il permet notamment une meilleure répartition de la puissance, une réduction des pertes énergétiques et la possibilité d'alimenter aussi des charges équilibrées et déséquilibrées.

Dans un système triphasé, le choix d'une grandeur de référence (tensions ou courants ou flux magnétique) avec un angle de phase égale à zéro degré permet de définir la phase de toutes les autres grandeurs du système. Nous choisissons par la suite la grandeur g_1 comme grandeur de référence.

Ce system peut être classé en deux catégories :

II. 1. 2. 1. Système triphasé équilibré

Un système triphasé est dit équilibré lorsque les trois grandeurs ont la même fréquence, la même valeur efficace et présentent entre elles un déphasage régulier de $\frac{2\pi}{3}$ radians (120°). En fonction l'ordre des trois phases, on distingue deux séquences possibles :

- **Système triphasé équilibré directe** (ou de **séquence directe**) La seconde phase est en retard de $2\pi/3$ (120°) par rapport à la première phase, et la troisième est en retard de $2\pi/3$ (120°) par rapport à la seconde phase. Dans ce cas, les vecteurs tournent dans l'ordre : $1 - 2 - 3 - 1 - 2 - 3 - \dots$. Le tableau II.1 illustre la présentation d'un système de tensions triphasées équilibrées de séquence directe.

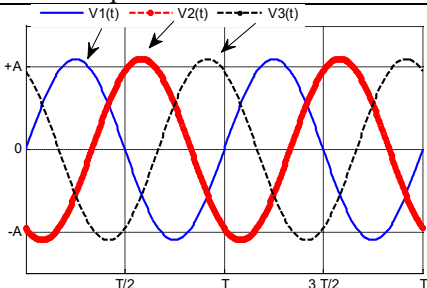
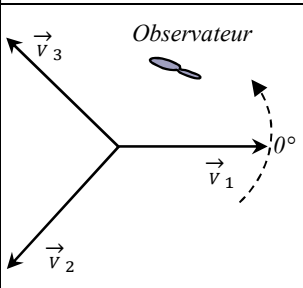
Expression mathématique	Evolution temporelle	Présentation vectorielle
$v_1(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t)$ $v_2(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi/3)$ $v_3(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t - 4\pi/3)$		

Tableau II.1. Présentations d'un système de tensions triphasées équilibrées directe

— **Système triphasé équilibré indirecte** (ou de **séquence indirecte**) L'ordre des phases est inversé, c'est-à-dire que la deuxième phase est en avance de $2\pi/3$ (120°) par rapport à la première phase, et la troisième phase est en avance de $2\pi/3$ (120°) par rapport à la deuxième. Dans ce cas, les vecteurs tournent dans l'ordre : 1 – 3 – 2 – 1 – 3 – 2 – Le tableau II.2 illustre la présentation d'un système de tensions triphasées équilibrées de séquence indirecte.

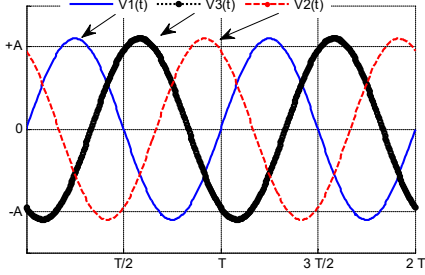
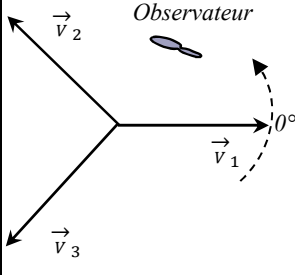
Expression mathématique	Evolution temporelle	Présentation vectorielle
$v_1(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t)$ $v_2(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t - 4\pi/3)$ $v_3(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi/3)$		

Tableau II.2. Présentations d'un système de tensions triphasées équilibrées indirecte

II. 1. 2. 2. Système triphasé déséquilibré

Un système triphasé est dit déséquilibré lorsque les trois grandeurs n'ont pas la même valeur efficace (amplitude), ou/ et ne sont pas déphasés régulièrement de $\frac{2\pi}{3}$ radians (120°) les uns par rapport aux autres.

II. 1. 3. Opérateur mathématique de rotation $\bar{a}$

Afin de simplifier la présentation et les calculs des grandeurs électriques dans un système triphasé équilibré on introduit l'opérateur mathématique de rotation $\bar{a}$, défini comme suit:

$$\bar{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{II.1})$$

Cet opérateur est particulièrement utile pour représenter les déphasages entre les différentes phases d'un système triphasé équilibré.

La multiplication (ou la division) d'une grandeur électrique, exprimée sous sa forme complexe, par l'opérateur mathématique rotation $\bar{a}$ ne modifie pas son module mais modifier son argument de $\frac{2\pi}{3}$ radians. Autrement dit, cette opération fait tourner le vecteur représentatif de la grandeur électrique de $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens positif des angles.

On peut également calculer $\bar{a}^2$ comme suit

$$\bar{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{II.2})$$

On constate que $\bar{a}^2$ est le conjugué de $\bar{a}$

De plus, on peut établir les relations suivantes :

$$\bar{a}^0 = \bar{a}^3 = 1 \quad (\text{II.3})$$

$$\bar{a}^2 = \bar{a}^5 = \bar{a}^* = \bar{a}^{-1} = \frac{1}{\bar{a}} \quad (\text{II.4})$$

$$\bar{a}^4 = \bar{a} = \bar{a}^{-2} \quad (\text{II.5})$$

$$\bar{a}^2 + \bar{a} + 1 = 0 \quad (\text{II.6})$$

Un système de grandeurs électriques triphasées équilibré g_1 , g_2 et g_3 de séquence directe peut être sous la forme suivante :

$$g_1(t) = G\sqrt{2} \sin(\omega t) \quad \text{Sous la forme complexe} \quad \overline{G_1} = G \angle 0^\circ \quad (\text{II.7})$$

$$g_2(t) = G\sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi/3) \quad \text{Sous la forme complexe} \quad \overline{G_2} = G \angle -120^\circ \quad (\text{II.8})$$

Cette grandeur peut être exprimée en fonction de $\overline{G_1}$ comme suit :

$$\overline{G_2} = \overline{a^2 G_1} \quad (\text{II.9})$$

$$g_3(t) = G\sqrt{2} \sin(\omega t - 4\pi/3) \quad \text{Sous la forme complexe} \quad \overline{G_3} = G \angle 120^\circ \quad (\text{II.10})$$

Cette grandeur peut être exprimée en fonction de $\overline{G_1}$ comme suit :

$$\overline{G_3} = \overline{a G_1} \quad (\text{II.11})$$

En additionnant ces trois grandeurs complexes :

$$g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = \overline{G_1} (\overline{a^2} + \overline{a} + 1) = 0 \quad (\text{II.12})$$

— **Seconde définition d'un système électrique triphasé équilibré :** Un système électrique triphasé est dit équilibré si et seulement si la somme de ses trois grandeurs instantanées est nulle à tout instant, c'est-à-dire.

Mathématiquement

$$g_1(t) = G\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

$$g_2(t) = G\sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi/3)$$

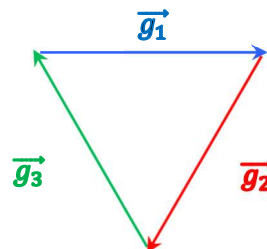
$$g_3(t) = G\sqrt{2} \sin(\omega t - 4\pi/3)$$

$$g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = 0$$

Sous la forme complexe :

$$\overline{G_1} + \overline{G_2} + \overline{G_3} = 0$$

Calcul Vectoriel



II. 1. 4. Définition des tensions dans un système triphasé

II. 1. 4. 1. Tensions simples V

La tension simple d'un système triphasé est la différence de potentiel entre une phase (conducteur 1, 2 ou 3) et le conducteur neutre.

Les tensions simples sont notées : V_1 , V_2 et V_3

II. 1. 4. 2. Tensions composées U

La tension composée d'un système triphasé est la différence de potentiel entre deux phases quelconques du système (1 et 2, 2 et 3, ou 3 et 1).

Les tensions composées sont notées : U_{12} , U_{23} et U_{31}

Le tableau II.3 présente les différentes tensions simples et composées du système pour les séquences 123 et 132 respectivement.

Expression mathématique	Présentation vectorielle
<u>Séquence directe 123</u> $\begin{aligned}\bar{V}_1 &= V^{\angle 0^\circ} \\ \bar{V}_2 &= V^{\angle -120^\circ} \\ \bar{V}_3 &= V^{\angle 120^\circ}\end{aligned}$ $\begin{aligned}\bar{U}_{12} &= \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = (\sqrt{3} V)^{\angle 30^\circ} \\ \bar{U}_{23} &= \bar{V}_2 - \bar{V}_3 = (\sqrt{3} V)^{\angle -90^\circ} \\ \bar{U}_{31} &= \bar{V}_3 - \bar{V}_1 = (\sqrt{3} V)^{\angle 150^\circ}\end{aligned}$	
<u>Séquence indirecte 132</u> $\begin{aligned}\bar{V}_1 &= V^{\angle 0^\circ} \\ \bar{V}_2 &= V^{\angle 120^\circ} \\ \bar{V}_3 &= V^{\angle -120^\circ}\end{aligned}$ $\begin{aligned}\bar{U}_{12} &= \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = (\sqrt{3} V)^{\angle -30^\circ} \\ \bar{U}_{23} &= \bar{V}_2 - \bar{V}_3 = (\sqrt{3} V)^{\angle 90^\circ} \\ \bar{U}_{31} &= \bar{V}_3 - \bar{V}_1 = (\sqrt{3} V)^{\angle -150^\circ}\end{aligned}$	

La figure II. 1 illustre l'évolution temporelle des tensions simples $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ et des tensions composées $u_{12}(t)$, $u_{23}(t)$ et $u_{31}(t)$ d'un système triphasé équilibré de séquence directe, telles que :

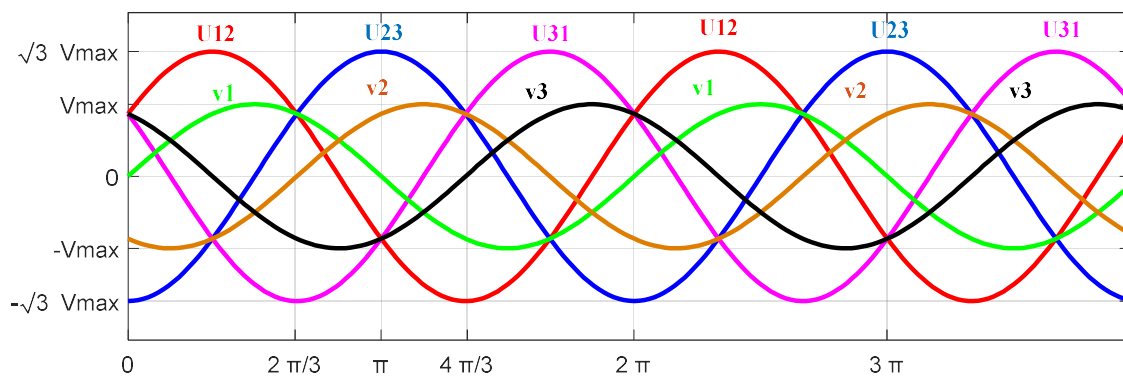


Figure II. 1. Évolution temporelle des tensions simples et composées

II. 1. 4. 3. Relation entre tensions simples et tensions composées

La représentation vectorielle illustrée dans le tableau II.3 a montré qu'une tension composée dans un système triphasé est obtenue par la différence vectorielle entre deux tensions simples. Autrement dit, chaque tension composée peut être représentée par un vecteur reliant les extrémités de deux vecteurs représentant les tensions simples.

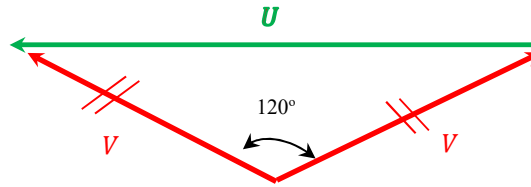


Figure II.2. Présentation vecteur des tensions simple et composée

A partir de la figure II.2, le triangle formé par les vecteurs représentant deux tensions simples et la tension composée est isocèle dont les deux angles de la base du triangle sont égaux à 30° . En appliquant la formule du cosinus dans ce triangle :

$$U^2 = V^2 + V^2 - 2 V V \cos(120^\circ) = 3V^2 \quad (\text{II.13})$$

Ainsi, on obtient la relation fondamentale entre la tension $\bar{U}$ et la tension $\bar{V}$ dans un système triphasé équilibré :

$$U = \sqrt{3} V \quad (\text{II.14})$$

II. 2. Charge triphasée

Une charge triphasée, également appelée récepteur triphasé, est constituée de trois charges, chacune étant caractérisée par une impédance complexe $\bar{Z}_i$ (avec $i = 1, 2$ et 3).

Il existe deux types de couplage pour connecter les charges dans un système triphasé :

- Couplage en étoile (Y)
- Couplage en triangle (Δ)

Ces modes de couplage influencent la relation entre les tensions simples et composées, ainsi que les courants de ligne et courants de phase dans le circuit.

II. 2. 1. Charge triphasée équilibrée

Le récepteur est dit équilibré lorsque toutes les impédances sont identiques, c'est-à-dire que:

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z} \quad (\text{II.15})$$

II. 2. 1. 1. Couplage en étoile (Y)

Le schéma du montage en étoile, représenté par la figure II.3, montre les connexions typiques des charges triphasées avec un point commun au neutre .

Dans un montage en étoile :

- Les courants de ligne sont égaux aux courants de phase : $\bar{I} = \bar{J}$

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_1 \quad (\text{II.16})$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_2 \quad (\text{II.17})$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_3 \quad (\text{II.18})$$

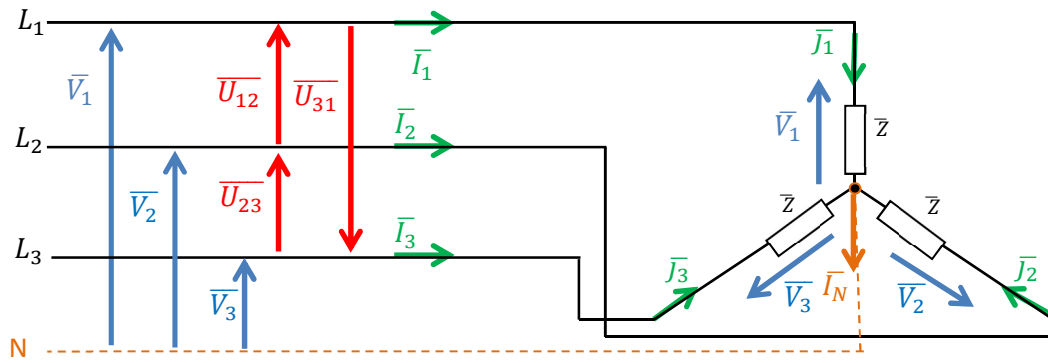


Figure II.3. Présentation de différentes grandeurs du montage triphasé en étoile d'un récepteur équilibré

— Les tensions aux bornes des récepteurs (ou tensions aux bornes des impédances) sont les tensions simples du système.

$$\bar{V}_1 = \bar{Z} \bar{I}_1 \quad (\text{II.19})$$

$$\bar{V}_2 = \bar{Z} \bar{I}_2 \quad (\text{II.20})$$

$$\bar{V}_3 = \bar{Z} \bar{I}_3 \quad (\text{II.21})$$

— Le courant dans le neutre est nul

A nœud N, Si le récepteur est équilibré alors :

$$\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \quad (\text{II.22})$$

II. 2. 1. 2. Couplage en triangle (Δ)

Le montage en triangle est illustré par la figure II.4 où chaque impédance du récepteur est connectée entre deux phases.

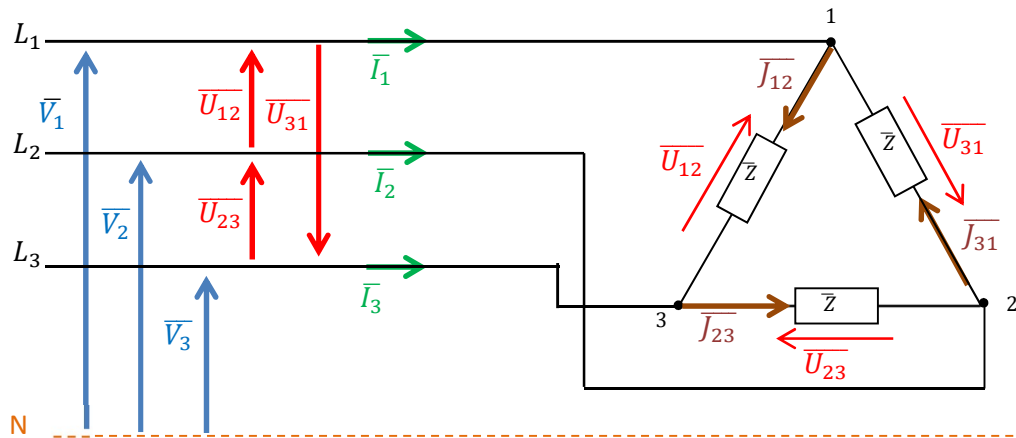


Figure II.4. Présentation de différentes grandeurs du montage en triangle d'un récepteur équilibré

Dans un montage en triangle:

— Les tensions aux bornes des récepteurs (ou aux bornes des impédances) sont les tensions composées du système :

$$\bar{U}_{12} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2 \quad (\text{II.23})$$

$$\bar{U}_{23} = \bar{V}_2 - \bar{V}_3 \quad (\text{II.24})$$

$$\bar{U}_{31} = \bar{V}_3 - \bar{V}_1 \quad (\text{II.25})$$

Dans un système équilibré, la relation entre la valeur efficace de la tension composée et la valeur efficace de la tension simple est donnée par l'équation (II. 14)

— Les courants dans les impédances (appelés aussi courants de phase) :

$$\bar{J}_{12} = \frac{\bar{U}_{12}}{\bar{Z}} \quad (\text{II.26})$$

$$\bar{J}_{23} = \frac{\bar{U}_{23}}{\bar{Z}} \quad (\text{II.27})$$

$$\bar{J}_{31} = \frac{\bar{U}_{31}}{\bar{Z}} \quad (\text{II.28})$$

— Les courants de ligne sont différents des courants de phase, en appliquant la loi des nœuds :

Au nœud 1 :

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_{12} - \bar{J}_{31} \quad (\text{II.29})$$

Au nœud 2 :

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_{31} - \bar{J}_{32} \quad (\text{II.30})$$

Au nœud 3 :

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_{23} - \bar{J}_{31} \quad (\text{II.31})$$

Dans un système équilibré, on peut montrer que les courants de ligne sont :

$$I = \sqrt{3} J \quad (\text{II.32})$$

$$\varphi_I = \varphi_J + 30^\circ \quad (\text{II.33})$$

II. 2. 2. Charge triphasée déséquilibrée

Le récepteur est dit déséquilibré lorsque les trois impédances qui la composent ne sont pas égales c'est-à-dire que:

$$\bar{Z}_1 \neq \bar{Z}_2 \neq \bar{Z}_3 \quad (\text{II.34})$$

Cela peut se produire dans un montage en étoile ou en triangle, et cela entraîne des conséquences importantes sur le fonctionnement du système.

II. 2. 2. 1. Couplage en étoile (Y) avec neutre

Le schéma du montage en étoile avec neutre pour une charge triphasée déséquilibrée est illustré par la figure II.5.

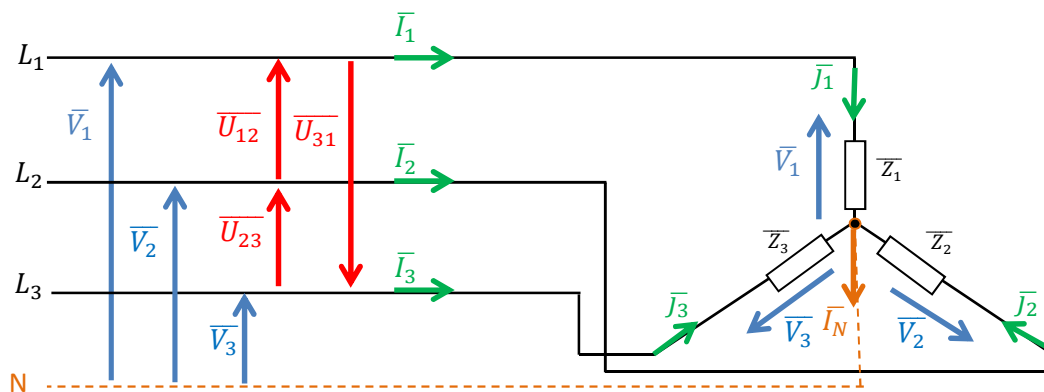


Figure II.5. Schéma du montage triphasé en étoile d'un récepteur déséquilibré

Dans un montage en étoile avec neutre d'une charge déséquilibrée :

— Les tensions appliquées : Chaque impédance est soumise à une tension simple issues d'un système triphasé équilibré $\bar{V}_1, \bar{V}_2$ et $\bar{V}_3$.

— Les courants dans les impédances: Puisque les impédances sont différentes, les courants seront également différents

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} \quad (\text{II.35})$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} \quad (\text{II.36})$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_3} \quad (\text{II.37})$$

— Les courants de ligne sont égaux aux courants dans les charges: $\bar{I}_1 = \bar{I}_1, \bar{I}_2 = \bar{I}_2$ et $\bar{I}_3 = \bar{I}_3$

— Le courant dans le neutre est nul

A nœud N, Si le récepteur est déséquilibré alors :

$$\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \neq 0 \quad (\text{II.38})$$

Ce courant est nécessaire pour rétablir l'équilibre du point neutre de la charge. Plus le déséquilibre est important, plus le courant dans le neutre augmente.

II. 2. 2. 2. Couplage en étoile (Y) sans neutre

Puisque les impédances sont déséquilibrées et qu'il n'y a pas de conducteur de neutre (il n'y a pas de fil de neutre qui relie les trois phases au point central du récepteur), le point neutre de la charge N' n'est pas à potentiel nul : il flotte. Ce phénomène est appelé neutre flottant.

Cela entraîne :

— Des tensions déséquilibrées aux bornes de la charge même si l'alimentation est équilibrée

$$V_1 \neq V_2 \neq V_3 \quad (\text{II.39})$$

— Les courants de lignes sans différents $\bar{I}_1 \neq \bar{I}_2 \neq \bar{I}_3$ mais leurs somme est nulle

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \quad (\text{II.40})$$

Le potentiel du point N' de la charge est flottant c'est-à-dire que la tension à ce point n'est pas nulle et donc peut être calculer en utilisant le théorème de Millman, où :

$$\bar{V}_{N'} = \frac{\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_3}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}} \quad (\text{II.41})$$

Ce type de montage n'est pas recommandé pour les charges très déséquilibrées, car les tensions peuvent varier de manière significative et endommager les équipements.

Puisqu'il n'y a pas de conducteur neutre (ou le neutre n'est pas relié) :

Les tensions simples (entre chaque phase et le point neutre N') ne sont pas connues directement. À la place, on applique des tensions composées

II. 2. 2. 3. Couplage en triangle (Δ)

Le montage en triangle pur un récepteur triphasé déséquilibré est illustré par la figure II.6 où chaque impédance du récepteur est connectée entre deux phases.

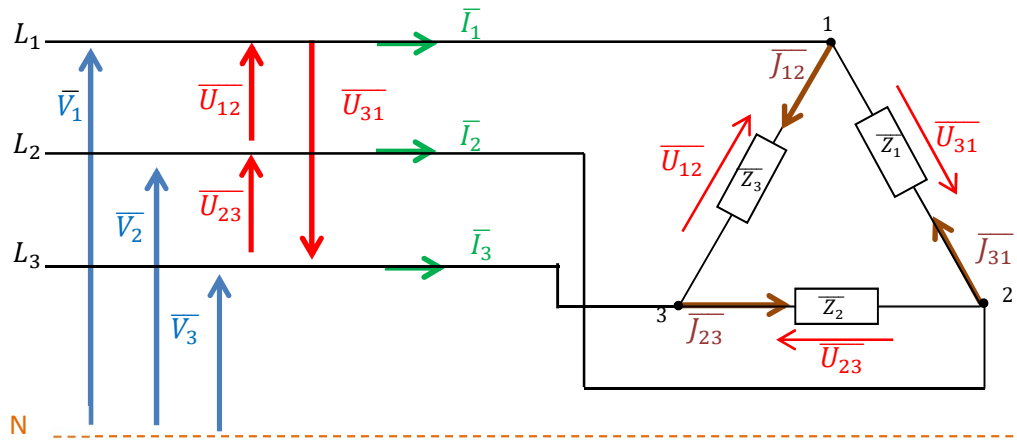


Figure II.6. Schéma du montage triphasé en triangle d'un récepteur déséquilibré

— Les tensions aux bornes des récepteurs (ou aux bornes des impédances) sont les tensions composées du système données par les équations (II. 23), (II. 24) et (II. 25) .

— Les courants dans les impédances (appelés aussi courants de phase) sont différents $J_{12} \neq J_{23} \neq J_{31}$ et données par les équations (II. 26), (II. 27) et (II. 28). Mais la somme de ces courants reste nulle.

$$J_{12} + J_{23} + J_{31} = 0 \quad (\text{II.42})$$

II. 3. Puissance électrique en triphasé

II. 3. 1. Calcul de puissance électrique en triphasé

En régime triphasé, la puissance électrique (active, réactive ou apparente) fait référence à la puissance totale absorbée par l'ensemble des trois phases du récepteur. Cette définition s'applique que le système soit équilibré, et quelle que soit la nature du couplage (étoile ou triangle).

— Quels que soit les tensions simple $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ et les courants de ligne $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ est:

$$\mathcal{P}(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) + v_3(t) i_3(t) \quad (\text{II.43})$$

— Pour les tensions et courants sinusoïdaux

La puissance active P :

$$P = V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + V_3 I_3 \cos \varphi_3 \quad (\text{II.44})$$

La puissance réactive Q :

$$Q = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2 + V_3 I_3 \sin \varphi_3 \quad (\text{II.45})$$

— Si de plus le système triphasé est équilibré

$$V_1 = V_2 = V_3 = V \quad (\text{II.46})$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I \quad (\text{II.47})$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi \quad (\text{II.48})$$

La puissance active P :

$$P = 3 VI \cos \varphi = \sqrt{3} UI \cos \varphi \quad (\text{II.49})$$

La puissance réactive Q :

$$Q = 3 VI \sin \varphi = \sqrt{3} UI \sin \varphi \quad (\text{II.50})$$

La puissance apparente S :

$$S = 3 VI = \sqrt{3} UI \quad (\text{II.51})$$

— En triphasé équilibré, la puissance active P est égale à la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$. En effet, de l'équation II. 43 on peut trouver :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) = & V \sqrt{2} \cos(\omega t) \times I \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) + V \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \times I \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ & V \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \times I \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Finalement,

$$\mathcal{P}(t) = 3 V I \cos \varphi = P \quad (\text{II.53})$$

Ce comportement, illustré par l'équation II.53, constitue l'un des avantages majeurs du triphasé : une puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ continue et sans pulsation, particulièrement utile pour les charges comme les moteurs, car il permet un fonctionnement fluide sans vibrations.

II. 3. 2. Mesure de puissance électrique en triphasé

L'instrument de mesure utilisé pour évaluer la puissance active dans un circuit électrique est le wattmètre. Il est constitué de deux éléments essentiels : une bobine de courant (ou bobine ampèremétrique), généralement fixe, et une bobine de tension (ou bobine voltmétrique), souvent mobile. L'interaction du champ magnétique engendré par la circulation du courant à travers la bobine fixe de courant, connectée en série avec la charge, et le champ magnétique créé par la bobine mobile de tension, connectée en parallèle avec la charge, génère une force de torsion sur l'aiguille (dans le modèle analogique) ou alimente un circuit de mesure (dans les modèles numériques) telle que :

$$P = UI \cos \varphi \quad (\text{II.54})$$

II. 3. 2. 1. Méthode de trois wattmètres (ligne à 4 fils)

Dans le cas générale d'un système triphasé (équilibré ou déséquilibré, avec neutre ou sans neutre), la puissance active consommée par un récepteur triphasé peut être mesurée par la méthode des trois wattmètres, comme illustré à la figure II.7.

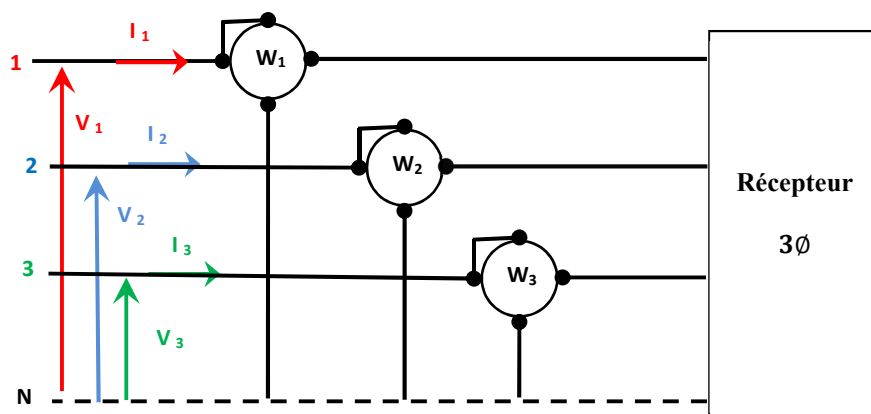


Figure II.7. Schéma de connexion de la méthode des trois wattmètres

La figure II.7 montre le branchement typique des trois wattmètres dans un réseau triphasé. Chaque wattmètre est connecté de manière à mesurer la puissance active d'une phase : la bobine de courant est placée en série avec la phase, tandis que la bobine de tension est connectée entre cette phase et le neutre (ou une autre phase dans les systèmes sans neutre).

La somme des lectures des trois wattmètres donne alors la puissance active totale absorbée par la charge triphasée, même en présence de déséquilibre.

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 \quad (\text{II.55})$$

Autrement dit, elle correspond à la somme des puissances relatives à chacune des charges ou impédances de phase. Cette définition s'applique que le système soit équilibré ou déséquilibré, et quelle que soit la nature du couplage (étoile ou triangle).

II. 3. 2. 2. Méthode de deux wattmètres (ligne à 3 fils)

La méthode des deux wattmètres est une technique classique utilisée pour mesurer la puissance active totale dans un système triphasé à trois fils (sans conducteur neutre). Elle est largement utilisée dans le milieu industriel car elle permet une mesure fiable et efficace avec seulement deux instruments, même en cas de charge déséquilibrée. Cette configuration de mesure est représentée dans la figure II.8.

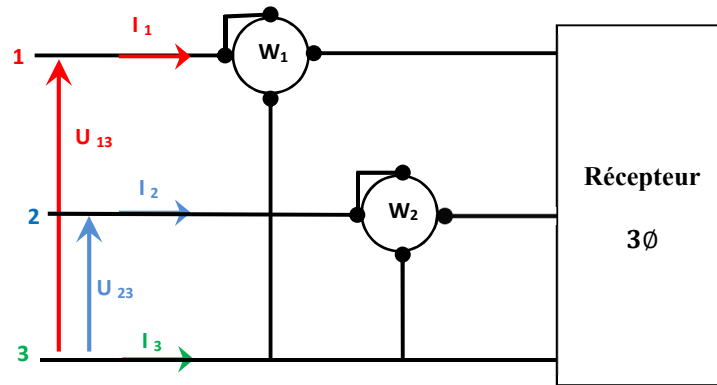


Figure II.8. Schéma de connexion de la méthode des deux wattmètres

La figure II.8 illustre le schéma de connexion typique de la méthode des deux wattmètres. Chaque wattmètre est relié à l'une des phases (souvent L1 et L2) pour la mesure du courant, tandis que leurs bobines de tension sont connectées entre ces phases et une phase de référence (souvent L3).

Grâce à cette disposition, la puissance active totale absorbée par la charge est obtenue en effectuant la somme algébrique des lectures des deux wattmètres, même lorsque le système est déséquilibré. Cette méthode est donc particulièrement utile dans les réseaux industriels où le neutre est absent.

L'indication des deux wattmètres est donnée comme suit:

— Wattmètre W_1 :

$$W_1 = U_{13} I_1 \cos(\widehat{\overrightarrow{U_{13}} \overrightarrow{I_1}}) \quad (\text{II.56})$$

D'après la représentation vectorielle de la figure II.9, le déphasage entre le courant $\overrightarrow{I_1}$ et la tension $\overrightarrow{U_{13}}$:

$$\widehat{\overrightarrow{U_{13}} \overrightarrow{I_1}} = \frac{\pi}{6} - \varphi \quad (\text{II.57})$$

En remplaçant l'équation II. 57 dans l'équation II.56, on obtient

$$W_1 = U I \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \quad (\text{II.58})$$

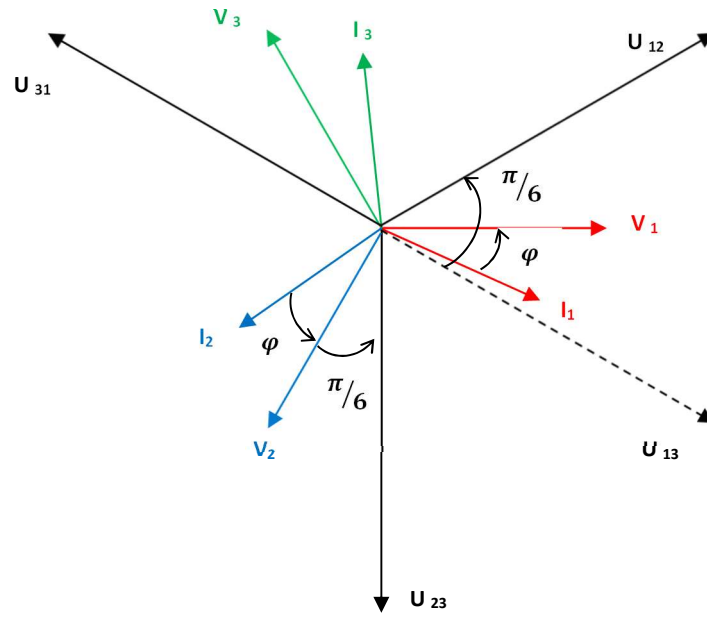


Figure II.9. Représentation vectorielle des différents déphasages

— Wattmètre W_2 :

$$W_2 = U_{23} I_2 \cos(\widehat{U_{23} I_2}) \quad (\text{II.59})$$

D'après la représentation vectorielle de la figure II.9 , le déphasage entre le courant $\bar{I}_2$ et la tension $\overline{U_{23}}$:

$$\widehat{U_{23} I_2} = \frac{\pi}{6} + \varphi \quad (\text{II.60})$$

En remplaçant l'équation II. 59 dans l'équation II.60, on obtient

$$W_2 = U I \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \quad (\text{II.61})$$

Les deux indications W_1 et W_2 , prises individuellement, n'ont aucun sens. Mais le calcul de leurs sommes donne :

$$W_1 + W_2 = U I \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right) = 2 U I \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\varphi) \quad (\text{II.62})$$

La puissance totale consommée par le système est :

$$P = W_1 + W_2 = \sqrt{3} U I \cos(\varphi) \quad (\text{II.63})$$

On déduit aussi que le calcul de la différence entre les deux indications donne :

$$W_1 - W_2 = U I \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \right) = 2 U I \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\varphi) \quad (\text{II.64})$$

La puissance réactive totale du système est :

$$Q = W_1 - W_2 = \sqrt{3} U I \sin(\varphi) \quad (\text{II.65})$$

Dans le cas d'un système triphasé équilibré, il est également possible de mesurer la puissance réactive à l'aide d'un seul wattmètre, en le disposant selon le schéma présenté à la figure II. 10.

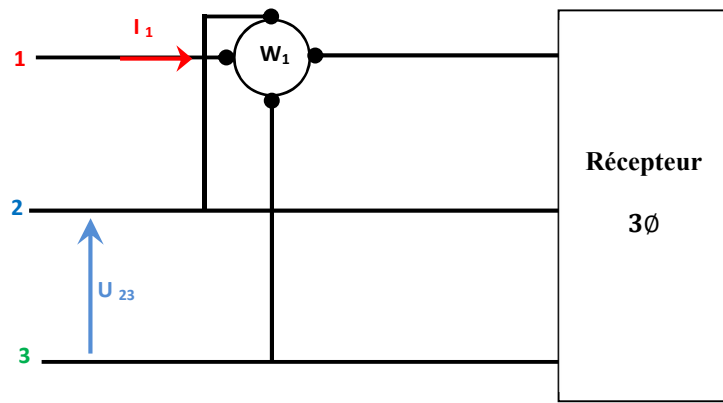


Figure II.10. Schéma de connexion d'un wattmètre pour mesurer la puissance réactive

L'indication du wattmètre est :

$$W = U_{23} I_1 \cos(\widehat{U_{23} I_1}) \quad (\text{II.66})$$

D'après la représentation vectorielle de la figure II.9 , le déphasage entre le courant $\vec{I}_1$ et la tension $\vec{U}_{23}$:

$$\widehat{U_{23} I_1} = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (\text{II.67})$$

En remplaçant l'équation II. 67 dans l'équation II.66, on obtient

$$W = U I \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = U I \sin(\varphi) \quad (\text{II.68})$$

La puissance réactive totale est :

$$Q = \sqrt{3} W = \sqrt{3} U I \sin(\varphi) \quad (\text{II.69})$$

II. 4. Exercices

Exercice N° 01

Un réseau triphasé $100 \times \sqrt{3}$ V – 50 Hz (séquence 123, voire de figure 1) à quatre conducteurs alimente un récepteur équilibré connecté en étoile dans lequel on a $\vec{Z} = 20 \angle 45^\circ \Omega$.

1. Calculer l'intensité des courants électriques dans les conducteurs d'alimentation et dans le neutre (détailler les calculs, écrire les complexes sous formes cartésienne et polaire lorsque nécessaire). En faire une représentation vectorielle.

2. Calculer la puissance active totale absorbée.

3. Calculer la puissance réactive totale absorbée.

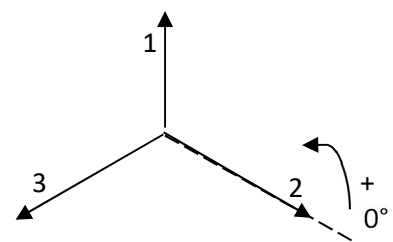
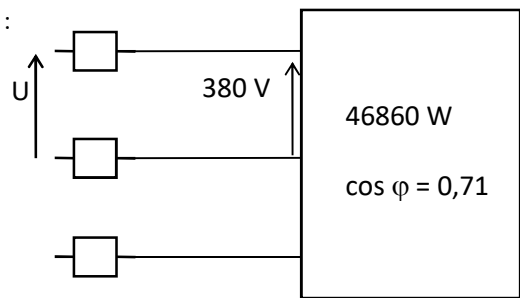


Figure 1

Exercice N° 02

Un récepteur triphasé équilibré absorbe une puissance active totale de 46860 watts avec un $\cos \varphi = 0,71$ (courant en retard sur la tension), ce récepteur doit être alimenté sous 380 V entre phases par une ligne dont chaque conducteur présente une résistance de $0,2 \Omega$. Déterminer :

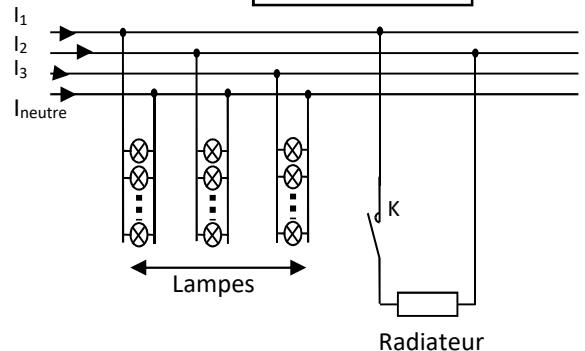
1. le courant de ligne I
2. la tension V nécessaire à l'entrée de la ligne pour que le récepteur soit normalement alimenté.



Exercice N° 03

Sur une distribution triphasé 380 V – 50 Hz avec fil neutre, on branche en dérivation entre phase et neutre, trois groupes de 16 lampes à incandescence de 100 W chacune.

1. Déterminer le courant absorbé dans les lignes lorsque le contacteur K du radiateur est ouvert. Quelle est la valeur du courant dans le fil du neutre ?



2. On ferme le contacteur K permettant de connecter le radiateur. Ce dernier dégage une puissance de 3800 W. Calculer l'intensité qu'il absorbe. Calculer la nouvelle valeur des intensités I1, I2, I3, Ineutre.

Exercice N° 04

Pour alimenter une installation électrique on dispose d'un réseau triphasé 220/380V, 50Hz. Le réseau est utilisé pour alimenter une installation électrique comprenant :

- ❖ 60 lampes de 500W chacune ($\cos \varphi = 1$), réparties de façon à équilibrer les trois phases.
- ❖ un groupe moteur aux bornes duquel la méthode des deux wattmètres a donné les indications suivantes : $P_1 = 60\text{kW}$ $P_2 = 200\text{kW}$.
- ❖ un four thermique absorbant une puissance 1500W.

1. Quelles sont les puissances active, réactive et apparente absorbées par le groupe moteur ?
2. Quels sont l'intensité du courant et le facteur de puissance à l'entrée de la dérivation du groupe moteur ?
3. Quels sont l'intensité du courant et le facteur de puissance en tête de réseau ?

Exercice N° 05

Trois impédances identiques de $30 \angle 30^\circ \Omega$ branchées en triangle sont alimentées par un réseau triphasé $U = 208 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$. Sachant que chaque conducteur de la ligne d'alimentation possède une impédance de : $(0,8 + j 0,6) \Omega$, calculer l'amplitude de la tension aux bornes du récepteur.

On place un ensemble de trois condensateurs de réactance : $-j 60 \Omega$ chacun en parallèle avec le récepteur. Calculer la nouvelle tension aux bornes du récepteur.

Exercice N° 06

Un réseau triphasé 208 V – 50 Hz (séquence 123°) à quatre conducteurs alimente une charge connectée en étoile dans laquelle on a :

$$\underline{Z}_1 = 10 \angle 0^\circ \Omega, \quad \underline{Z}_2 = 15 \angle 30^\circ \Omega, \quad \underline{Z}_3 = 10 \angle -30^\circ \Omega$$

1. Calculer l'intensité des courants électriques dans les différents conducteurs ainsi que la puissance active totale absorbée.

On alimente maintenant cette charge déséquilibrée par un réseau 208 V – 50 Hz à trois conducteurs (le conducteur neutre n'est plus connecté à la charge).

2. Calculer les courants dans les conducteurs ainsi que les tensions aux bornes des impédances constituant la charge.

Chapitre III

Circuit magnétique

III. 1. Définition et représentation des grandeurs magnétiques

— **Champ magnétique** $\vec{B}$, également appelé induction magnétique ou densité de flux magnétique, est une grandeur vectorielle qui traduit l'effet du mouvement des particules chargées, tels que les particules chargées lors du passage d'un courant électrique dans un conducteur ou le mouvement des charges à l'échelle microscopique. Ces mouvements de charges créent un champ magnétique qui interagissent avec d'autres champs magnétiques ou avec des particules chargées, générant des forces magnétiques. Le champ magnétique est mesuré en teslas (T) dans le système international SI.

— **Lignes de champ magnétique** sont des lignes imaginaires utilisées pour représenter visuellement la direction et la structure du champ magnétique dans l'espace, comme indiqué par la figure III.1. Elles indiquent le sens du champ à chaque point, allant conventionnellement du pôle nord magnétique vers le pôle sud magnétique à l'extérieur d'un aimant permanent, puis bouclant à travers celui-ci pour former des lignes fermées et continues. Plus les lignes sont rapprochées, plus le champ magnétique est fort.

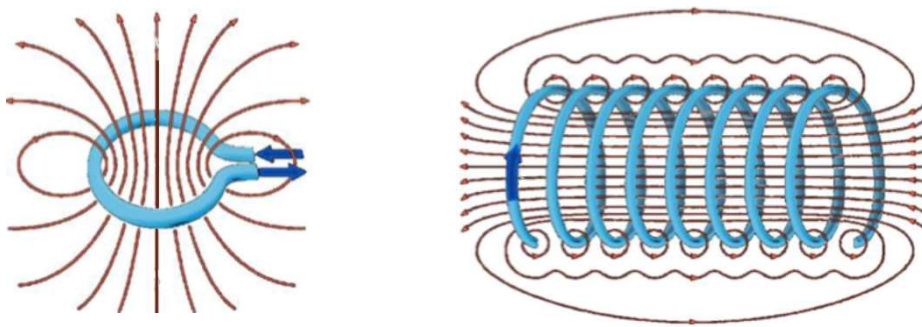


Figure III.1. Exemples de lignes de champ magnétique

— **Champ d'excitation magnétique** $\vec{H}$ est une grandeur vectorielle représentant le champ magnétique appliqué à un matériau dans le but de provoquer ou modifier son aimantation (état magnétique). Il est généralement créé soit par un aimant permanent, soit par un courant électrique circulant dans une bobine (selon la loi d'Ampère). Lorsque ce champ est appliqué à un matériau magnétique, il tend à orienter les moments magnétiques des atomes ou des molécules dans la direction du champ. Ce phénomène conduit à l'aimantation du matériau, par l'alignement partiel ou total des domaines magnétiques internes. Ainsi le champ magnétique $\vec{H}$ joue un rôle fondamental dans la modification des propriétés magnétiques du matériau. Le champ d'excitation magnétique s'exprime en ampères par mètre (A/m) dans SI.

— **Perméabilité magnétique** μ est une grandeur physique qui mesure la capacité d'un matériau à se laisser traverser par un champ magnétique et à canaliser les lignes de champ magnétique. Elle traduit la facilité avec laquelle un matériau peut être magnétisé lorsqu'il est soumis à un champ magnétique. Elle est mesurée en henrys par mètre (H/m) ou en teslas par ampère (T/A).

Perméabilité magnétique du vide μ_0 est une constante physique qui représente la perméabilité magnétique dans le vide ou l'espace libre. Elle est utilisée pour décrire le comportement des champs magnétiques dans le vide ou l'espace libre, où il n'y a pas de matériaux magnétiques. Sa valeur est définie par le SI comme :

$$\mu_0 \approx 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$$

Dans le vide, la relation entre le champ magnétique ($\vec{B}$) et le champ d'induction magnétique ($\vec{H}$) est donnée par :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{III.1})$$

Perméabilité magnétique relative μ_r est une grandeur qui compare la perméabilité magnétique d'un matériau par rapport à celle du vide (ou de l'air), exprimée sans dimension car elle est relative. Elle indique à quel point un matériau est plus ou moins apte à canaliser un champ magnétique que le vide.

Elle est définie par le relation :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (\text{III.2})$$

Dans un matériau, la relation entre le champ magnétique ($\vec{B}$) et le champ d'induction magnétique ($\vec{H}$) est :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{III.3})$$

— **Susceptibilité magnétique d'un matériau χ** caractérise la facilité avec laquelle le matériau peut être aimanté sous l'effet d'un champ magnétique externe. Cette grandeur est spécifique à chaque matériau et dépend de plusieurs facteurs notamment la composition chimique, la structure cristalline, la température, et d'autres propriétés microscopiques du matériau. Elle est directement liée à la perméabilité magnétique μ par la relation :

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \quad (\text{III.4})$$

Cette relation (II.4) montre que la perméabilité magnétique d'un matériau μ est directement influencée par sa susceptibilité magnétique χ . En effet, plus la susceptibilité d'un matériau est élevée, plus sa capacité à canaliser et amplifier un champ magnétique externe est grande. Par conséquent, la perméabilité magnétique du matériau devient supérieure à celle du vide (ce qui en fait un bon conducteur de champ magnétique).

On en déduit également la perméabilité relative :

$$\mu_r = 1 + \chi \quad (\text{III.5})$$

— **Flux magnétique Φ** c'est une grandeur scalaire, exprimée en webers (wb), représente la quantité de champ magnétique vectoriel $\vec{B}$ traversant une surface donnée S . Il est déterminé par le produit scalaire entre le vecteur d'induction magnétique $\vec{B}$ et le vecteur normal au plan de la surface $\vec{S}$, comme illustré dans la figure III.2

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos(\alpha) \quad (\text{III.6})$$

Où α est l'angle entre le vecteur $\vec{B}$ et le vecteur normal au plan de la surface S .

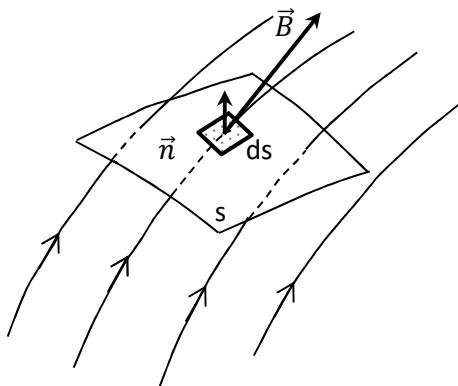


Figure III.2. Evaluation du flux magnétique sur une surface

Si $\alpha = 0$, le champ magnétique est perpendiculaire à la surface, dans ce cas le flux magnétique est maximal.

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le champ magnétique est parallèle à la surface, dans ce cas le flux magnétique est nul.

— **Force électromotrice (f.é.m.)** $\mathcal{Q}$ et **Loi de Faraday exprimée** en volts (V), représente l'énergie électrique fournie par une source, telle qu'une pile, une batterie ou un générateur, pour déplacer une charge électrique dans un circuit.

La loi de Faraday de l'induction électromagnétique **énonce qu'une variation** temporelle du flux magnétique traversant une surface fermée génère une f.é.m. induite dans un circuit.

La force électromotrice induite $\mathcal{Q}$ dans un circuit est proportionnelle à la dérivée temporelle du flux magnétique Φ à travers une surface orientée par rapport au circuit :

$$\mathcal{Q} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{III.7})$$

Le signe négatif traduit la loi de Lenz, qui indique que le courant induit s'oppose à la cause qui l'a généré (la variation du flux). Ainsi, lorsqu'un champ magnétique varie à travers une surface entourée par un circuit, une tension est induite. Si le circuit est fermé, cette tension engendre un courant induit.

— **Force magnétomotrice (f.m.m.)** exprimée en ampères-tours (A t), représente la capacité d'un circuit à créer un champ magnétique. Elle joue un rôle analogue à celui de la force électromotrice (f.é.m.) en électricité, mais dans le domaine magnétique. La f.m.m. est donnée par la relation :

$$fmm = N I \quad (\text{III.8})$$

Où

N : nombre de spires de la bobine.

I : intensité du courant (en ampères)

— **Tubes de flux magnétique** également appelés Tubes de l'induction magnétique, sont des surfaces tubulaires imaginaires délimitées par les lignes d'induction magnétique $\vec{B}$.

En chaque point de la surface latérale d'un tel tube, le vecteur $\vec{B}$ est tangent à la surface, traduisant la direction locale du champ magnétique.

Le vecteur du champ magnétique $\vec{B}$ est donc, en tout point, tangent à la surface latérale d'un tube de flux magnétique.

Le flux magnétique à travers toute section d'un tel tube est constant, d'après l'équation III.6 le flux magnétique à travers la surface latérale d'un tube de flux est nul, l'angle entre le vecteur du champ magnétique et la normale est $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et le flux magnétique est donc canalisé à travers le tube, voire figure III.3.

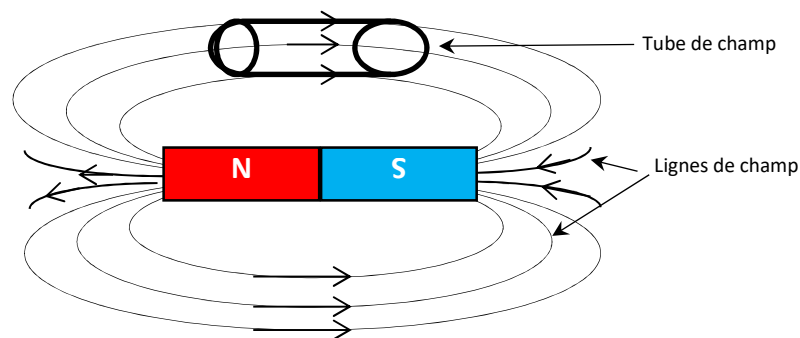


Figure III.3. Tube de flux magnétique

— **Conservation du flux magnétique** La loi de conservation du flux magnétique, également connue sous le nom de la loi de Lenz. Elle affirme que toute variation du flux magnétique à travers une surface fermée induit une force électromotrice (f.é.m.) dans un circuit de manière à s'opposer à cette variation. Cela signifie que le système réagit de façon à conserver le flux magnétique, sauf s'il est modifié par :

une variation temporelle du champ d'induction magnétique $\vec{B}$.

ou un courant électrique induit dans un conducteur.

Ce principe découle de la loi de Faraday, mais précise le sens de la f.é.m. induite. On peut résumer cette conservation dans le cas d'un champ magnétique stationnaire (c'est-à-dire ne variant ni dans le temps, ni avec un courant), de la figure III.4 par :

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{III.9})$$

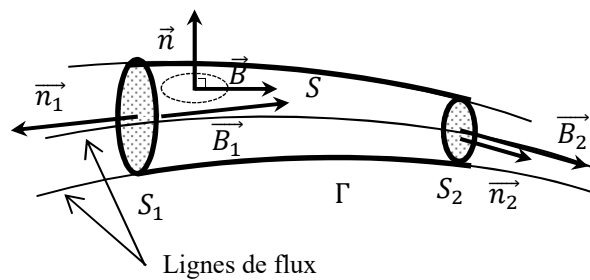


Figure III.4. Conservation de flux magnétique

Le flux magnétique traversant le tube de flux magnétique est nul :

$$\phi = \iint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \, ds + \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \, ds + \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds \quad (\text{III.10})$$

$$\phi = -B_1 S_1 + B_2 S_2 = 0 \quad (\text{III.11})$$

Par conséquent

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (\text{III.12})$$

Nous en déduisant, d'après l'équation (III.12), que le flux magnétique se conserve et dépend, non pas de la forme de surface, mais de la forme du contour qui lui délimite.

III. 2. Matériaux magnétiques

Les matériaux magnétiques sont des substances capables d'interagir de manière significative avec un champ magnétique. Cette interaction dépend principalement de la structure atomique du matériau, notamment de l'alignement des moments magnétiques (ou moments dipolaires) des électrons dans les atomes. En présence d'un champ magnétique externe, ces matériaux réagissent différemment selon leur nature, ce qui permet de les classer en plusieurs catégories.

Cette classification repose sur le comportement magnétique observé : attraction ou répulsion par le champ, persistance ou non de l'aimantation, et intensité de la réponse magnétique. Parmi les types les plus courants, on distingue :

III. 2. 1. Matériaux Ferromagnétiques $\chi \gg 0$

Ils présentent une aimantation spontanée : sous l'effet d'un champ magnétique externe, les moments magnétiques atomiques s'alignent dans une même direction et cette orientation est partiellement conservée même après la disparition du champ. Ce phénomène leur confère une forte rémanence magnétique.

Ces matériaux se distinguent par une perméabilité magnétique bien supérieure à celle du vide μ_0 , ce qui signifie qu'ils ont une capacité élevée à canaliser et amplifier le champ magnétique, comme indique la figure III.5. Cette propriété les rend essentiels pour la fabrication d'aimants permanents, de transformateurs, de machines électriques, ainsi que pour les systèmes de stockage magnétique.

Parmi les principaux matériaux ferromagnétiques, on trouve le fer (élément de référence), le nickel et le cobalt, certains alliages comme les aciers spéciaux, dont les propriétés dépendent de la composition exacte.

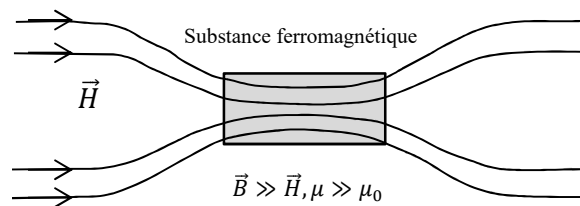


Figure III.5. Répartition de ligne de flux magnétique dans un matériau ferromagnétique

III. 2. 2. Matériaux Paramagnétiques $\chi > 0$

Ces matériaux montrent une faible réponse magnétique en présence d'un champ magnétique externe. Les moments magnétiques atomiques s'alignent temporairement avec le champ appliqué mais perdent leur magnétisation une fois que le champ externe est supprimé. Contrairement aux matériaux ferromagnétiques, les matériaux paramagnétiques n'ont pas d'aimantation permanente et ne conservent pas d'aimantation une fois que le champ magnétique externe est retiré. La perméabilité magnétique des matériaux paramagnétiques est légèrement supérieure à la perméabilité magnétique du vide μ_0 , mais elle est très proche de cette dernière.

En d'autres termes, elle est seulement légèrement différente de l'unité. Cette valeur proche de l'unité indique que ces matériaux permettent assez facilement le passage des lignes de champ magnétique à travers eux, mais leur réponse magnétique est relativement faible par rapport aux matériaux ferromagnétiques. Voir la figure III.6. Parmi ces matériaux on cite l'aluminium, le magnésium et le platine.

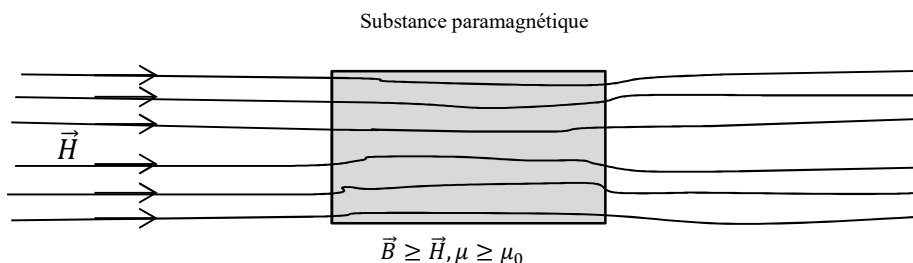


Figure III.6. Répartition de ligne de flux magnétique dans un matériau paramagnétique

II. 2. 3. Matériaux Diamagnétiques $\chi < 0$

Les matériaux diamagnétiques sont une catégorie de matériaux qui montrent une faible réponse magnétique lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique externe. Contrairement aux matériaux ferromagnétiques et paramagnétiques, les matériaux diamagnétiques sont généralement repoussés par un champ magnétique externe plutôt qu'attirés par celui-ci, Voir figure III.7. La perméabilité magnétique des matériaux diamagnétiques est très proche de la perméabilité magnétique du vide μ_0 , et souvent légèrement inférieure à celle-ci. En d'autres termes, elle est généralement très proche de l'unité, voire légèrement inférieure. Comme leur perméabilité est proche de l'unité, cela signifie que les matériaux diamagnétiques offrent une résistance très faible au passage des lignes de champ magnétique à travers eux lorsqu'ils sont exposés à un champ magnétique externe. Cependant, leur réponse magnétique est faible et ces matériaux ne conservent pas d'aimantation significative une fois le champ magnétique externe retiré. Parmi ces matériaux on cite le cuivre, l'eau et le graphite.

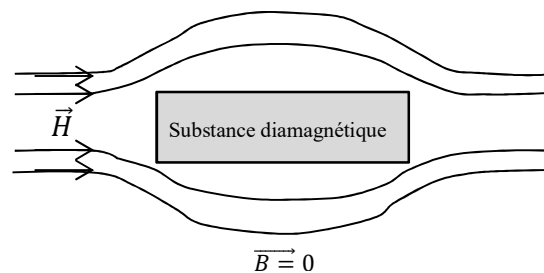


Figure III.7. Répartition de ligne de flux magnétique dans un matériau diamagnétique

III. 3. Description et Mise en équations d'un circuit magnétique

III. 3. 1. Description

Un circuit magnétique, souvent composé de matériaux ferromagnétiques, est un ensemble de pièces ou d'éléments conçus pour canaliser et guider le flux du champ magnétique le long d'un chemin spécifique, de manière analogue à un circuit électrique qui guide le courant électrique. Le but principal est de maximiser l'efficacité du transfert du flux magnétique entre différentes parties d'un système, tout en réduisant les pertes.

Ce concept est fondamental dans des dispositifs tels que les transformateurs, machines électriques, reluctances variables, et électroaimants.

Les principaux éléments d'un circuit magnétique comprennent généralement, voir figure III.8 :

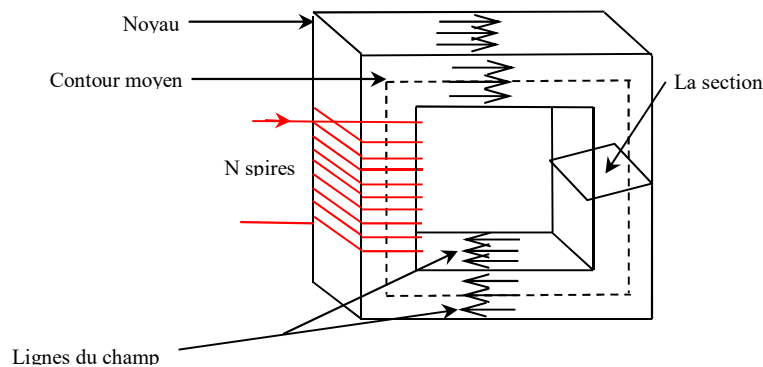


Figure III.8. Représentation de différents éléments constitutifs d'un circuit magnétique

Noyaux magnétiques: généralement en fer doux ou en tôle ferromagnétique empilée pour minimiser les pertes par courants de Foucault.

Entrefer: petite séparation d'air ou d'isolant dans le circuit, qui influencent fortement la réluctance.

Bobines de fil conducteur (ou enroulements): elles produisent le champ magnétique lorsqu'un courant les traverse, créant ainsi la force magnétomotrice (f.m.m.). Dans certains cas, des aimants permanents peuvent être utilisés dans le circuit magnétique pour fournir un champ magnétique constant et stable sans nécessiter de courant électrique externe.

III. 3. 2. Théorème d'Ampère et force magnétomotrice

Le théorème d'Ampère établit une relation fondamentale entre le champ d'excitation magnétique $\vec{H}$ et le courant électrique, permettant de calculer le champ d'excitation magnétique résultant autour d'un conducteur parcouru par un courant électrique. Dans sa forme intégrale, le théorème d'Ampère stipule que la circulation du vecteur d'excitation magnétique $\vec{H}$ le long d'un contour fermé C est égal à la somme algébrique des intensités électriques traversant toute surface délimitée par ce contour.

Mathématiquement, le théorème d'Ampère pour une courbe fermée C peut être exprimé comme suit, en utilisant la notation de l'intégrale de ligne :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N i \quad (\text{III.13})$$

Considérons la figure III. 9 et cherchons à appliquer le théorème d'Ampère au contour Γ . La question qui se pose immédiatement est la détermination du signe des intensités i_1 , i_2 et i_3 .

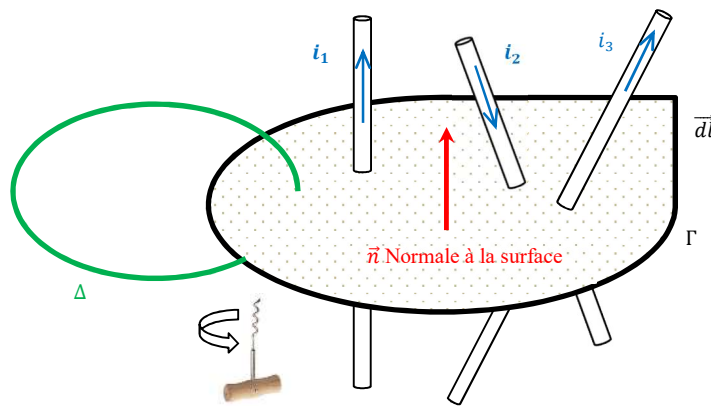


Figure III.9. Schéma illustratif du théorème d'Ampère

Dans la suite de cet ouvrage, nous définirons comme normale positive à une surface la normale obtenue par l'application de la règle du tire-bouchon de Maxwell. Autrement dit, si l'on fait tourner un tire-bouchon dans le sens positif d'un contour fermé Γ , la direction dans laquelle il avance définit la normale positive à la surface bordée par ce contour.

En conséquence, un courant est considéré comme positif s'il circule dans le sens de cette normale, et négatif s'il circule en sens inverse.

Ainsi, l'application du théorème d'Ampère à la courbe Γ de la figure III.8 donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_1 - i_2 + i_3 \quad (\text{III.14})$$

L'application du théorème d'Ampère à la courbe Δ , qui n'entoure aucun courant donne :

$$\oint_{\Delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{III.15})$$

III. 3. 3. Reluctance magnétique

Soit le circuit magnétique en forme de tore ou rectangulaire qui porte un bobinage de N spires, traversées par un courant d'intensité I. figure III.10.

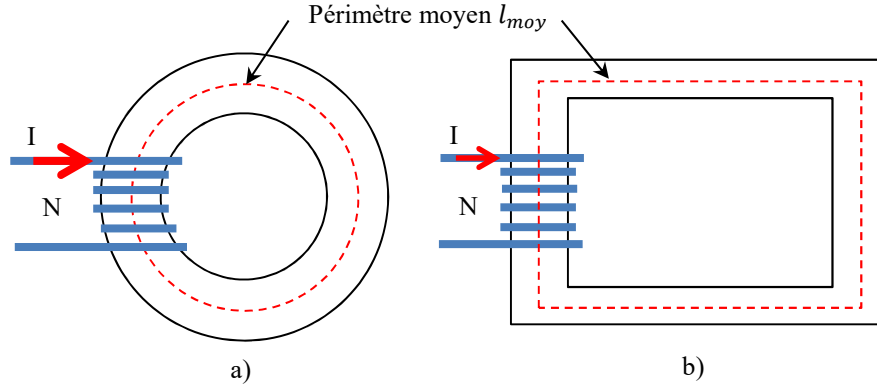


Figure III.10. Schéma d'un circuit magnétique a) en forme de tore b) en forme rectangulaire

L'application du théorème d'Ampère à la courbe Γ de la figure III.10 donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H l_{\text{moy}} = N i \quad (\text{III.16})$$

On sait que

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \quad (\text{III.17})$$

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad (\text{III.18})$$

Finalement,

$$N i = \frac{l_{\text{moy}}}{\mu_0 \mu_r S} \Phi \quad (\text{III.19})$$

Elle est de la forme

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \Phi \quad (\text{III.20})$$

La reluctance magnétique est la résistance qu'un matériau présente au passage du flux magnétique. Elle est l'analogue magnétique de la résistance électrique dans un circuit électrique. La reluctance est inversement proportionnelle à la perméabilité magnétique du matériau et à la section transversale du matériau et directement proportionnelle à la longueur.

Mathématiquement, la reluctance magnétique $\mathcal{R}$ est définie comme :

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} \quad (\text{III.21})$$

On constate qu'il y'a analogie entre les circuits magnétiques et les circuits électriques telle qu'illustre le tableau III.1. Tout comme un courant électrique a besoin d'une différence de potentiel (tension) pour circuler dans un conducteur, le flux magnétique a besoin d'une f.m.m. pour circuler dans un matériau magnétique. De même, la résistance limite le courant, tandis que la réluctance limite le flux magnétique.

Circuit électrique	Circuit magnétique
$E = F.E.M.$ (Force électromotrice), [Volts]	$\mathcal{F} = F.M.M.$ (Force magnétomotrice) [Ampères-tours]
I Intensité du courant électrique [Ampères]	Φ Flux magnétique [Webers]
R Résistance électrique $R = \frac{\rho l}{s}$ [Ohms]	$\mathcal{R}$ Réluctance magnétique $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu s}$ [Ampères-tours/weber]
$E = R I$ Lois d'Ohm	$\mathcal{F} = \mathcal{R} \Phi$ Lois d'Hopkinson
Conducteur électrique	Circuit magnétique
Courant alternatif	Flux magnétique variable

Tableau III.1. Analogie entre le circuit électrique et magnétique

III. 3. 3. 1. Reluctances magnétiques en séries

Le circuit magnétique représenté en figure III.11 est composé de trois parties différentes (l_1, S_1, μ_1) (l_2, S_2, μ_2) et (l_3, S_3, μ_3). Il porte un bobinage de N spires, parcourus par un courant I . On fait la circulation du champ magnétique H le long du contour moyen C

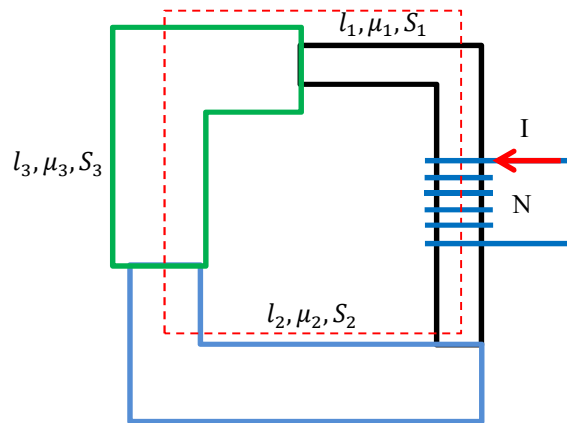


Figure III.11. Schéma d'un circuit magnétique composé de trois différentes parties en séries

L'application du théorème d'Ampère à la courbe Γ de la figure III.11 donne :

$$NI = \oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_{l_3} \vec{H}_3 d\vec{l} \quad (\text{III.22})$$

$$NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 \quad (\text{III.23})$$

$$NI = \frac{B_1}{\mu_1} l_1 + \frac{B_2}{\mu_2} l_2 + \frac{B_3}{\mu_3} l_3 \quad (\text{III.24})$$

$$NI = \frac{\Phi_1}{\frac{s_1}{\mu_1}} l_1 + \frac{\Phi_2}{\frac{s_2}{\mu_2}} l_2 + \frac{\Phi_3}{\frac{s_3}{\mu_3}} l_3 \quad (\text{III.25})$$

D'après le théorème de conservation de flux

$$\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 \quad (\text{III.26})$$

On obtient :

$$NI = \Phi \left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3}{\mu_3 S_3} \right) \quad (\text{III.27})$$

Elle est de la forme

$$NI = \Phi (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3) \quad (\text{III.28})$$

Avec

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1}, \quad \mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_2 S_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu_3 S_3}$$

Finalement ;

$$NI = \Phi \mathcal{R}_{eq} \quad (\text{III.29})$$

Telle que

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \quad (\text{III.30})$$

Finalement, la reluctance équivalente d'un ensemble de N tronçons en série est la somme algébrique des reluctances individuelles. C'est l'analogie exact des résistances en série en électricité.

$$\mathcal{R}_{eq} = \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_i \quad (\text{III.31})$$

III. 3. 3. 2. Reluctances magnétiques en parallèles

Le circuit magnétique représenté en figure III.12 est composé de deux parties différentes (l_1, S_1, μ_1) (l_2, S_2, μ_2) en parallèles associées avec une partie (l, S, μ). Il porte un bobinage de N spires, parcourus par un courant I. On fait la circulation du champ magnétique H le long du contour moyen C.

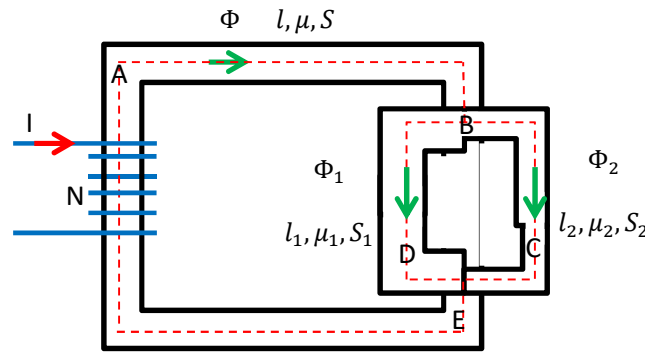


Figure III.12. Schéma d'un circuit magnétique composé de deux différentes parties en parallèles

On applique le théorème d'ampère pour le circuit de la figure III.12.

$$NI = \oint_C \vec{H} d\vec{l} \quad (\text{III.32})$$

Pour le contour fermé C on distingue deux chemins fermés possibles

1^{er} chemin : Conteur fermé ABDEA

$$NI = \oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_l \vec{H} d\vec{l} + \int_{l_1} \vec{H} d\vec{l} \quad (\text{III.33})$$

$$= Hl + H_1 l_1 = \frac{B}{\mu} l + \frac{B_1}{\mu_1} l_1 \quad (\text{III.34})$$

$$= \frac{\varphi}{\mu s} l + \frac{\varphi_1}{\mu_1 s_1} l_1 = \mathcal{R} \phi + \mathcal{R}_1 \phi_1 \quad (\text{III.35})$$

2^{em} chemin : Conteur fermé ABCEA

$$NI = \oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_l \vec{H} d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{H} d\vec{l} \quad (\text{III.36})$$

$$= Hl + H_2 l_2 = \frac{B}{\mu} l + \frac{B_2}{\mu_2} l_2 \quad (\text{III.37})$$

$$= \frac{\varphi}{\mu s} l + \frac{\varphi_2}{\mu_2 s_2} l_2 = \mathcal{R} \phi + \mathcal{R}_2 \phi_2 \quad (\text{III.38})$$

A partir des équations (III.35) et (III.38), on obtient :

$$\mathcal{R}_1 \phi_1 = \mathcal{R}_2 \phi_2 \quad (\text{III.39})$$

En électricité : $R_1 I_1 = R_2 I_2$

$$\mathcal{R}_1 \phi_1 = \mathcal{R}_2 \phi_2 \Rightarrow \frac{\phi_1}{1/\mathcal{R}_1} = \frac{\phi_2}{1/\mathcal{R}_2} = \frac{\phi_1 + \phi_2}{1/\mathcal{R}_1 + 1/\mathcal{R}_2} = \frac{\phi}{1/\mathcal{R}_{eq}} \quad (\text{III.40})$$

On trouve :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \quad (\text{III.41})$$

Et

$$\mathcal{R}_{eq} \phi_{eq} = \mathcal{R}_1 \phi_1 = \mathcal{R}_2 \phi_2 \quad (\text{III.42})$$

La relation générale régissant le circuit magnétique de la figure III.12 est :

$$NI = \mathcal{R} \phi + \mathcal{R}_1 \phi_1 = \mathcal{R} \phi + \mathcal{R}_2 \phi_2 = \phi (\mathcal{R} + \mathcal{R}_{eq}) = \phi \mathcal{R}_T \quad (\text{III.43})$$

Finalement, la reluctance équivalente d'un ensemble de N tronçons en parallèle est donnée par :

$$\mathcal{R}_{eq} = \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_i \quad (\text{III.44})$$

III. 4. Loi comportementale des milieux ferromagnétiques: courbes $B = \mathcal{F}(H)$

Les matériaux ferromagnétiques présentent un comportement non linéaire entre le champ magnétique H et l'induction magnétique B , qui est représenté par une courbe de magnétisation :

$$B = \mathcal{F}(H) \quad (\text{III.45})$$

Ces courbes montrent comment un corps ferromagnétique réagit à l'excitation magnétique H .

Contrairement aux milieux linéaires (comme le vide ou l'air), où $B = \mu_0 H$ est une relation proportionnelle, dans un matériau ferromagnétique, cette relation dépend du passé magnétique du matériau et présente plusieurs caractéristiques importantes.

III. 4. 1. Courbe de première aimantation

Lorsque un matériau ferromagnétique est exposé pour la première fois à un champ magnétique H , l'induction B n'augmente pas linéairement mais selon une courbe appelée courbe de première aimantation. Pour de faibles valeurs de H , la croissance de B est lente car les domaines magnétiques commencent à s'orienter dans le sens du H . Ensuite, B augmente rapidement à mesure que les domaines s'alignent avec le champ H . Enfin, l'induction magnétique B atteint une valeur limite appelée saturation magnétique B_s au-delà de laquelle toute augmentation de H n'a qu'un effet négligeable.

La courbe illustrée dans la figure III. 13 met en évidence trois zones distinctes :

- Une **région linéaire initiale**, où B augmente presque proportionnellement à H ,
- Une **zone de transition non linéaire** (ou coude), correspondant à l'alignement progressif des domaines,
- Une **zone de saturation**, où B atteint un plateau.

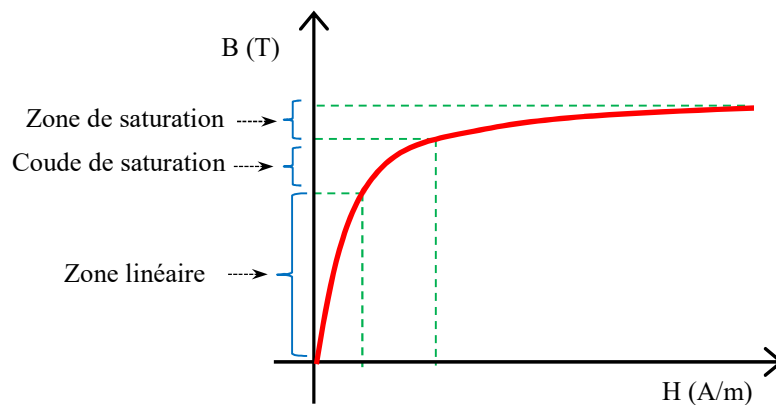


Figure III. 13. Décomposition de la courbe de la première aimantation

III. 4. 2. Boucle d'hystérésis

Lorsque le matériau ferromagnétique est déjà aimanté, la diminution du champ magnétique H à partir d'un point (H_i, B_i) de la courbe de première aimantation ne fait pas suivre à l'induction B le même trajet. Cette dissymétrie donne lieu à un phénomène d'hystérésis.

Le cycle d'hystérésis décrit le comportement de l'induction magnétique B en fonction du champ magnétique appliqué H , lorsqu'on fait varier H de manière cyclique (croissante et décroissante). Il reflète la mémoire magnétique du matériau ferromagnétique.

- Étapes du cycle (selon le graphe $B = \mathcal{F}(H)$), de la figure III. 14

1. Première aimantation ($0 \rightarrow A$) :

À partir de l'état non aimanté ($H_0 = 0, B_0 = 0$), on applique un champ croissant H . L'induction B augmente lentement au début, puis plus rapidement, et tend vers une valeur limite appelée saturation magnétique B_{sat} lorsque tous les domaines magnétiques sont alignés.

2. Diminution du champ (A → B) :

Quand on diminue H à partir de B_{sat} , l'induction B ne revient pas à zéro.

À ($H = 0, B \neq 0$) on remarque que l'induction B reste non nul : c'est l'induction rémanente B_r (mémoire de l'aimantation).

3. Inversion du champ (B → C) :

Pour ramener l'induction B à zéro, il faut appliquer un champ de signe opposé : c'est le champ coercitif H_c .

À ce point ($H_c, B = 0$), le matériau n'a plus d'aimantation résiduelle.

4. Saturation négative (C → D) :

Si on continue à augmenter H en sens inverse, l'induction B atteint la saturation négative $-B_{sat}$.

5. Retour du champ (D → E → F → A) :

En inversant à nouveau H , le même phénomène se reproduit, mais dans l'autre sens.

Le cycle se ferme, formant une courbe en boucle : le cycle d'hystérésis.

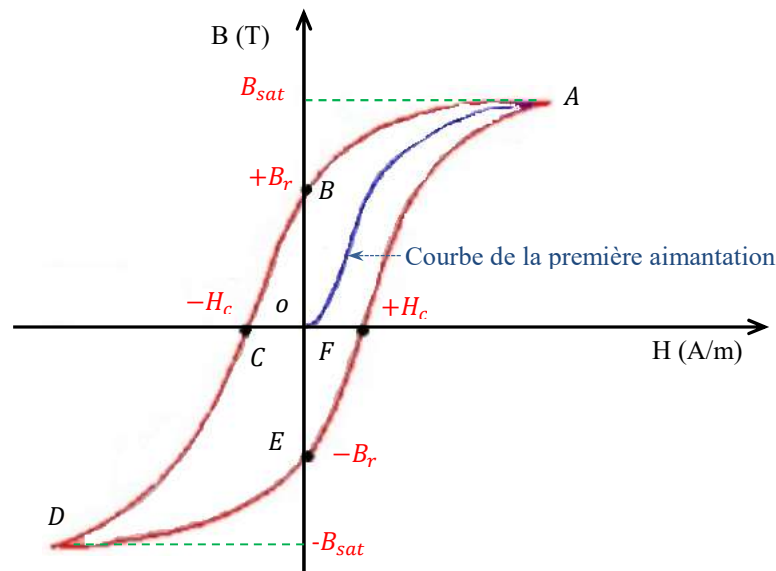


Figure III. 14. Cycle d'hystérésis

Selon la forme de la courbe de l'induction magnétique en fonction du champ magnétique $B = \mathcal{F}(H)$ les matériaux magnétiques sont généralement classés en deux grandes familles :

—**Matériaux magnétiques doux**: sont des matériaux qui peuvent s'aimanter et se désaimanter facilement lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique variable. Leur courbe $B = \mathcal{F}(H)$, illustré par la figure III. 14. a, est caractérisée par :

Une faible hystérésis (la boucle d'hystérésis est étroite).

Une induction rémanente B_r et un champ coercitif H_c faibles.

Une perméabilité magnétique élevée, ce qui signifie qu'ils canalisent très bien le champ magnétique.

—**Matériaux magnétiques durs** (ou aimants permanents) : sont des matériaux qui conservent leur aimantation même après la suppression du champ magnétique externe. Leur courbe $B = \mathcal{F}(H)$, illustré par la figure III. 14. b est caractérisée par :

Une large boucle d'hystérésis,

Une induction rémanente B_r élevée

Un champ coercitif élevé H_c , ce qui signifie qu'il faut un champ important pour désaimanter le matériau.

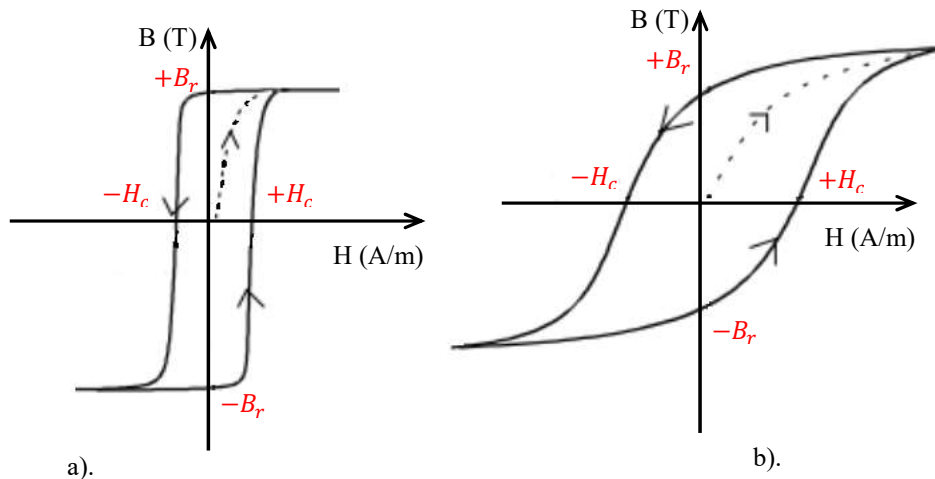


Figure III. 14. Cycle d'hystérésis pour a) matériau doux b). Matériau dur

III. 5. Pertes dans les circuits magnétiques

Dans les circuits magnétiques, comme ceux des transformateurs, machines électriques ou inductances, des pertes d'énergie surviennent principalement lorsqu'un champ magnétique variable est appliqué à un matériau ferromagnétique. Ces pertes réduisent l'efficacité du système et se manifestent sous forme de chaleur.

On distingue principalement deux types de pertes :

III. 5. 1. Pertes par hystérésis

Lorsqu'une tension alternative est appliquée à une bobine d'excitation, comme illustré à la figure III.15, la force magnétomotrice variable entraîne une réorientation continue des domaines magnétiques à l'intérieur du matériau ferromagnétique le long de l'axe d'aimantation. Ce mouvement moléculaire répété engendre un échauffement du matériau. Plus le matériau est "dur" (au sens magnétique), plus les pertes par hystérésis sont importantes.

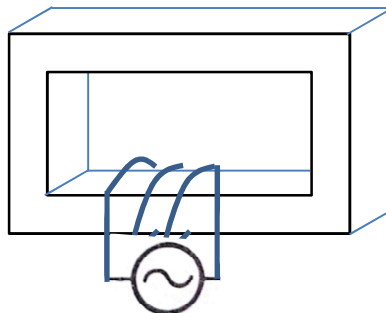


Figure III. 15. Circuit magnétique avec une f.m.m altérative

Ces pertes dépendent du type et du volume du matériau magnétique, et varient proportionnellement à la fréquence et à une puissance n de la valeur maximale de la densité de flux magnétique B_{max} . Cette relation peut être exprimée par la formule de Steinmetz suivante :

$$P_h = K_h B_{max}^n f \quad (\text{III.46})$$

Où :

P_h : est la puissance perdue par hystérésis (en watts),

K_h : est une constante qui dépend des caractéristiques magnétiques du matériau, de sa densité et des unités utilisées,

f : est la fréquence du champ magnétique (en Hz),

B_{max} : est la valeur maximale de la densité de flux magnétique (en teslas),

n : (L'exposant de Steinmetz) est un paramètre empirique variable selon le matériau magnétique utilisé pour le noyau (en fonction de sa composition, de sa structure cristalline et de son traitement) et compris entre 1,5 et 2,5. A titre d'exemple, pour les feuilles d'acier au silicium, qui sont couramment utilisées dans les transformateurs et les machines électriques, la valeur moyenne de l'exposant de Steinmetz est d'environ 1,6.

L'aire enfermée par la boucle d'hystérésis est égale à l'énergie de pertes par hystérésis, exprimée en joules par cycle et par mètre cube de matériau.

III. 5. 2. Pertes par courants de Foucault

Outre les pertes par hystérésis, un matériau magnétique soumis à un champ magnétique variable est également le siège de courants de Foucault (ou courants induits). Ces courants électriques sont des courants circulaires induits à l'intérieur du matériau conducteur selon la loi de Faraday. La figure III.16. a. illustre ce phénomène à travers un bloc de fer que l'on peut considérer comme une infinité de coquilles ou boucles concentriques, au sein desquelles ces courants circulent.

Pour réduire ces pertes on utilise :

- Des matériaux à faible conductivité électrique comme les ferrites, notamment dans les circuits magnétiques à haute fréquence
- Des noyaux feuilletés, constitués de fines tôles empilées et électriquement isolées les unes des autres.

Cette dernière technique, illustré à la figure III.16. b. limite les chemins disponibles pour ces courants, ce qui réduit la taille des boucles de courant et donc l'intensité des courants de Foucault, entraînant une diminution significative des pertes thermique.

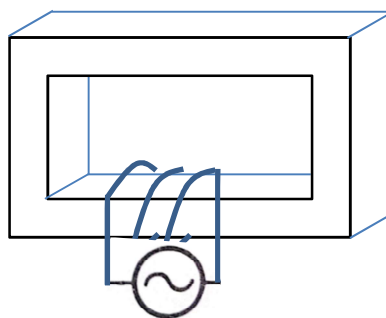


Figure III. 16. Circuit magnétique avec une f.m.m alternée

La puissance perdue par courants de Foucault peut être approximée par la formule :

$$P_c = K_e B_{max}^2 f^2 e^2 \quad (\text{III.47})$$

Où :

P_e : est la puissance perdue par courants de Foucault (en watts),

K_h : est une constante qui dépend des caractéristiques magnétiques du matériau, de sa géométrie,

f : est la fréquence du champ magnétique (en Hz),

B_{max} : est la valeur maximale de la densité de flux magnétique (en teslas),

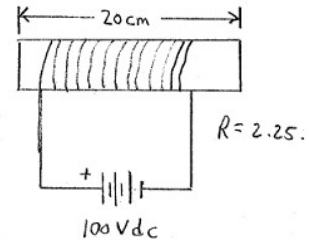
e : est l'épaisseur du matériaux (en mètres),

III. 6. Exercices

Exercice N° 01

Une bobine de forme solénoïde, mesure 20 cm de long et est composée de 200 tours de fil, a une résistance 2.25 Ω , et alimentée par une source de tension continue de 100 V.

Trouvez le MMF produit par la bobine et l'intensité du champ magnétique.



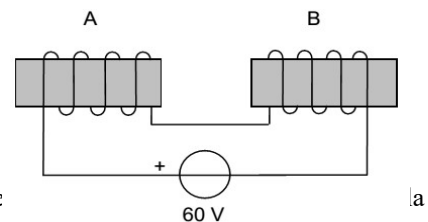
Exercice N° 02

Soit deux électro-aimants A et B branchés en série, et raccordés à une source de tension de f.é.m. 60 volts. La résistance de la bobine A est de 50 Ω , celle de B de 70 Ω .

La bobine A possède 2000 spires, la bobine B 800 spires.

Déterminer :

- La FMM de chacune des bobines.
- La puissance dissipée dans chacune des bobines.
- S'il y a attraction ou répulsion entre ces deux électro-aimants, (pour ce figure) ?
- Si les deux bobines ont les mêmes dimensions, laquelle atteindra la plus haute température ?



Remarque : Le fil ayant servi à confectionner la bobine A n'a pas forcément la même section que le fil ayant servi à fabriquer la bobine B.

Exercice N° 03

Les conducteurs du stator d'un alternateur sont baignés par le champ magnétique rotorique de 0,6 T sur une longueur de 2 mètres (AB sur la figure).

L'extrémité des pôles du rotor se déplace à 100 m.s⁻¹.

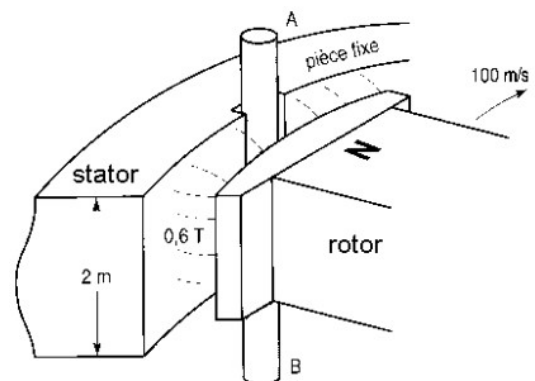
Calculer la valeur de la tension induite dans chaque conducteur.

Exercice N° 04

Une bobine possédant une inductance de 3 H est traversée par un courant de 50 A.

Calculer :

- La valeur de l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique ;



- L'énergie débitée par la bobine si le courant diminue de 50 A à 30 A ;
- La tension induite aux bornes de la bobine ainsi que la puissance débitée si cette diminution de 50 A à 30 A se fait uniformément en 30 millisecondes

Exercice N° 05

Un noyau magnétique en acier moulé doit supporter une densité de flux de 1,0 T. Il a une longueur totale de 1,56 m. et une superficie transversale de 0,37 m².

Trouvez la perméabilité, la perméabilité relative et la réluctance du noyau.

Utilisez la courbe BH . Pour un $B = 1,0 \text{ T} \rightarrow H = 800 \text{ A-t/m}$

La tension $u(t)$ représentée par la figure I. 6.

1. Calculer la valeur crête à crête, la fréquence et l'amplitude de $u(t)$
2. Déterminer la

Chapitre IV

Transformateur électrique monophasé

IV. 1. Définition, classification et constitution des transformateurs électriques

IV. 1. 1. Définition et invention du transformateur électrique

Le transformateur est un dispositif électrotechnique statique qui permet de modifier la valeur de la tension ou de courant alternatif sans changer la fréquence. Son fonctionnement repose sur le principe de l'induction électromagnétique, découvert par Michael Faraday en 1831.

Faraday a démontré que lorsqu'un courant variable circule dans une bobine primaire, il crée un champ magnétique variable. Si une seconde bobine est placée à proximité et couplée magnétiquement à la première, ce champ magnétique variable induit une force électromotrice (f.é.m.) dans la seconde bobine, appelée bobine secondaire.

Mathématiquement, cette force électromotrice est exprimée comme suit :

$$e(t) = - \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (\text{IV.1})$$

Ce phénomène constitue le principe fondamental du transformateur, qui permet ainsi le transfert d'énergie électrique entre deux circuits à travers un champ magnétique variable, sans contact mécanique direct entre les deux enroulements.

IV. 1. 2. Classification des transformateurs

Dans le domaine de génie électrique, différents types de transformateurs existent, classés selon leur fonction, leur construction et leur usage :

Selon leur fonction principale

<i>Type de transformateur</i>	<i>Description</i>
— Transformateur de puissance	— Utilisé dans les réseaux de transport d'électricité à haute tension (centrales → postes).
— Transformateur de distribution	— Sert à abaisser la tension pour la distribution aux consommateurs finaux.
— Transformateur d'isolement	— Fournit une isolation galvanique entre deux circuits pour des raisons de sécurité.
— Transformateur d'instrumentation	— Mesure le courant ou la tension sans perturber le circuit (ex : transformateurs de courant et de tension).

L'isolation galvanique (ou isolement galvanique) est un principe selon lequel aucun courant électrique direct ne peut circuler entre deux circuits, même s'ils peuvent échanger de l'énergie ou des informations. Autrement dit, il n'y a pas de liaison conductrice directe (pas de fil ou de masse commune), ce qui permet de protéger les circuits et les utilisateurs contre les surtensions, les courants de fuite ou les défauts électriques.

Selon la construction du noyau magnétique

Type de transformateur

- Transformateur à noyau (core type)
- Transformateur à enroulement (shell type)
- Transformateur torique

Description

- Les enroulements sont placés autour d'un noyau central rectangulaire.
- Le noyau entoure les bobinages. Structure plus compacte, bonnes propriétés magnétiques.
- Utilise un noyau en forme d'anneau. Haute efficacité, faible perte de flux.

Selon le type de refroidissement

Type de transformateur

- Transformateur à air naturel (AN)
- Transformateur à huile (ONAN, ONAF, etc.)
- Transformateur sec

Description

- Refroidissement par simple circulation d'air. Utilisé pour les petites puissances.
- Utilise de l'huile pour refroidir et isoler. Employé dans les transformateurs de puissance.
- Pas d'huile, isolé par résine époxy ou air. Plus sûr pour les environnements intérieurs.

Autres types spécialisés

Type de transformateur

- Transformateur élévateur / abaisseur
- Autotransformateur
- Transformateur triphasé
- Transformateur commutation (flyback, forward, etc.)

Description

- Élève ou abaisse la tension selon le besoin (ex : centrale électrique ou transformateur de rue).
- Un seul enroulement sert à la fois pour le primaire et le secondaire. Économique, mais sans isolation.
- Pour les réseaux industriels ; remplace trois transformateurs monophasés.
- Utilisé dans les alimentations à découpage (SMPS). Compact et rapide.

IV. 1. 3. Constitution d'un transformateur

Le transformateur est principalement constitué de trois éléments essentiels suivants:

— Le noyau magnétique (ou circuit magnétique) : Il sert à la canalisation de flux magnétique créée par les courants électriques circulant dans les enroulements, constitué de tôles fines en fer doux ou en acier au silicium, isolées pour réduire les pertes par courants de Foucault.

— Les enroulements (ou bobinages): Ils sont constitués de deux enroulements conducteurs (cuivre ou aluminium) isolés :

Enroulement primaire: Sur lequel on applique la tension d'entrée.

Enroulement secondaire: Où on récupère la tension transformée.

— L'isolation : Elle peut être réalisée par des matériaux isolants comme le papier, la résine, l'huile, ou des matériaux synthétiques. L'isolation entre les enroulements et entre les spires est très importante pour éviter les courts-circuits.

IV. 1. 4. Notations usuelles

Les grandeurs relatives au primaire sont affectées de l'indice « 1 », celles relatives au secondaire sont affectées de l'indice « 2 », comme explique la figure IV. 1.

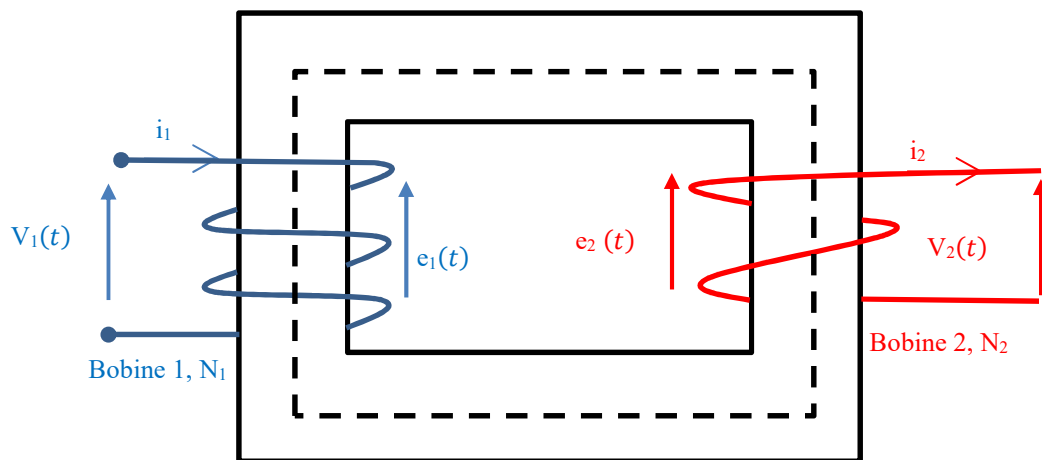


Figure IV. 1. Transformateur à vide

Les f.e.m. e_1 et e_2 sont de sens opposé aux flux φ_1 et φ_2 , d'après la loi de Faraday :

$$e_1(t) = -N_1 \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \quad (\text{IV.2})$$

$$e_2(t) = -N_2 \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \quad (\text{IV.3})$$

Où ;

N_1 : nombre de spire de l'enroulement primaire .

N_2 : nombre de spire de l'enroulement secondaire .

IV. 2. Principe de fonctionnement du transformateur et schémas équivalents

IV. 2.1. Formule de Boucherot

Lorsque on alimente le primaire par une tension sinusoïdale $V_1(t) = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t)$, de pulsation ω crée à travers chaque spire, un flux φ_1 sinusoïdal de même pulsation et déphasé de 2π - par rapport à la tension V_1 , telle que :

$$\varphi_1(t) = \frac{V_1 \sqrt{2}}{N_1 \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{IV.4})$$

On démontre que l'induction magnétique maximale au primaire s'exprime par la formule suivante/

$$B_1 = \frac{V_1}{4.44 N_1 f S} \quad (\text{IV.5})$$

f : fréquence d'alimentaion.

S : section du circuit magnétique.

Pour le secondaire :

$$B_2 = \frac{V_2}{4.44 N_2 f S} \quad (\text{IV.6})$$

IV. 2. 2. Fonctionnement à vide et rapport des tensions

Le de fonctionnement du transformateur à vide est expliqué à l'aide de la figure IV. 2, qui montre la bobine 1 (dite primaire) alimentée par une tension alternative sinusoïdale, et la bobine 2 n'est pas connectée à une charge.

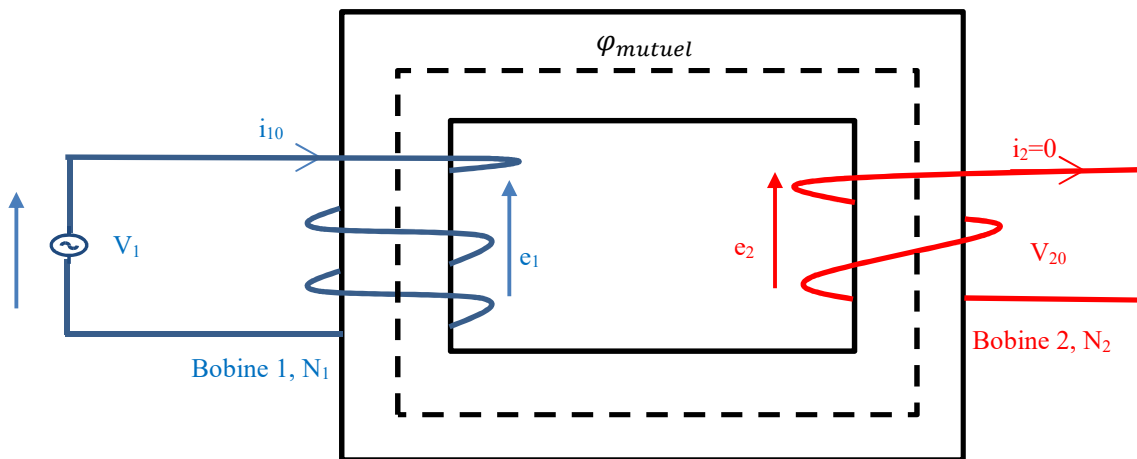


Figure IV. 2. Transformateur à vide

En fonctionnement à vide , on a :

- le courant traversant l'enroulement du secondaire est nul, $i_2(t) = 0$
- Aux bornes du secondaire apparait la tension secondaire à vide $V_{20}(t)$
- Le primaire se comporte comme une bobine à noyau de fer et absorbe le courant primaire à vide $i_{10}(t)$

Si on suppose que :

—La chute de tension due au passage du courant $i_{10}(t)$ dans la resistance du primaire est négligeable.

—Tout le flux traversant les spires du primaire traverse les spires du condaire.

Pour les tensions:

$$V_1(t) = N_1 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (\text{IV.7})$$

$$V_{20}(t) = N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (\text{IV.8})$$

On trouve que les tensions à vide sont dans le rapport des nombres de spires

$$\frac{\overline{V_{20}}}{\overline{V_1}} = \frac{N_2}{N_1} = m \quad (\text{IV.9})$$

m est dit rapport de transformation, selon les valeurs de ce rapport on peut distinguer :

Si $m > 1 \Rightarrow N_2 > N_1 \Rightarrow V_{20} > V_1$, le transformateur est éleveur de tension.

Si $m < 1 \Rightarrow N_2 < N_1 \Rightarrow V_{20} < V_1$, le transformateur est abaisseur de tension.

Si $m = 1 \Rightarrow N_2 = N_1 \Rightarrow V_{20} = V_1$, le transformateur d'isolement galvanique.

Pour les courants:

Le courant primaire à vide diffère peu de sa composante reactive qui crée le flux dans le circuit magnétique.

A vide , le diagramme des tensions et des courant se réduit à celui de la figure IV. 3.

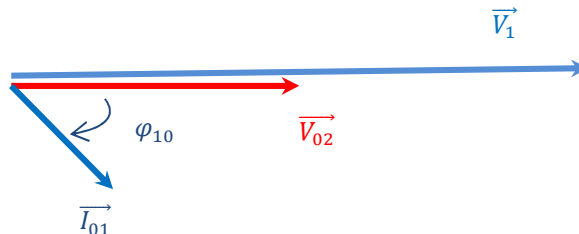


Figure IV. 3. Diagramme vectoriel des tensions et courant transformateur à vide

IV. 2. 3. Fonctionnement en charge et rapport des courants

Le de fonctionnement du transformateur en charge est expliqué à l'aide de la figure IV. 4, qui montre la bobine du primaire alimentée par une tension alternative sinusoïdale, et la bobine 2 est connteté à une charge.

En fonctionnement en charge, on a :

— le courant traversant l'enroulement du secondaire est $i_2(t)$

— Aux bornes du secondaire apparait la tension secondaire à vide $V_2(t)$

— Le courant du primaire $i_1(t)$ varie car il sort de la pussance du secondaire, elle doit rentrer par le primaire.

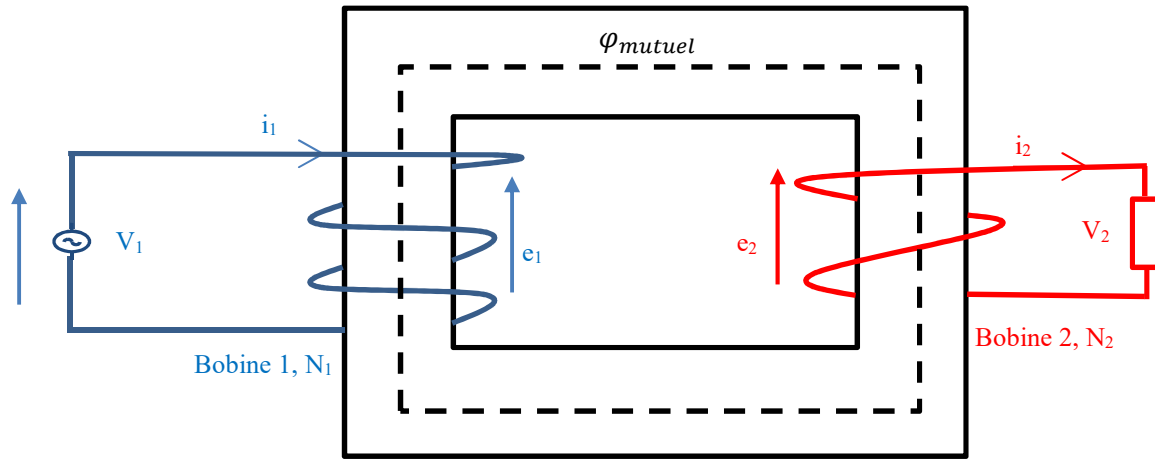


Figure IV. 4. Transformateur en charge

Si on suppose que :

—Les chutes de tension dues au passage des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans la resistance du primaire et du secondaire respectivement sont négligeables.

—Tout le flux traversant les spires du primaire traverse les spires du secondaires.

Pour les tensions:

$$V_1(t) = N_1 \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (\text{IV.10})$$

$$V_2(t) = N_2 \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (\text{IV.11})$$

On trouve que les tensions en charge sont dans le rapport des nombres de spires

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = m \quad (\text{IV.12})$$

Pour les courants:

Less ampères-tours enlacés par les lignes de champs moyennes sont $N_1 \bar{I}_1 - N_2 \bar{I}_2$. Si le flux reste le même qu'au fonctionnement à vide, la f.m.m. reste la même :

$$N_1 \bar{I}_1 - N_2 \bar{I}_2 = N_1 \bar{I}_{10} \quad (\text{IV.13})$$

Ou

$$N_1 \bar{I}_1 - N_2 \bar{I}_2 = N_1 \bar{I}_{10} \quad (\text{IV.14})$$

L'augmentation des ampères-tours primaire compense les ampères-tours secondaires

—Pour les fortes valeurs du courant débité, $N_1 \bar{I}_1$ est très supérieur à $N_1 \bar{I}_{10}$, il en est de même de $N_2 \bar{I}_2$.

En première approximation, on peut écrire

$$N_1 \bar{I}_1 = N_2 \bar{I}_2 \quad (\text{IV.15})$$

On trouve que :

$$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = m \quad (\text{IV.16})$$

En fonctionnement en charge, le digramme vectoriel des tensions et des courants est représentés par la figure IV.15.

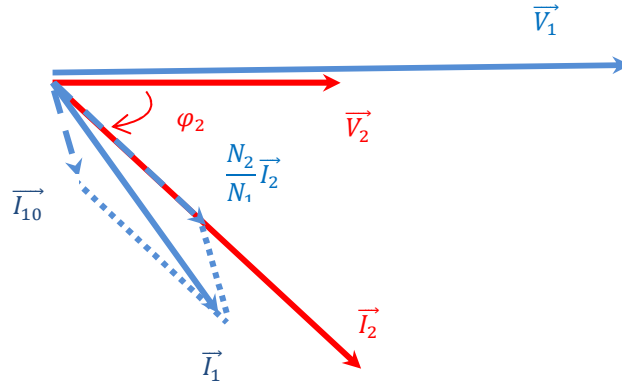


Figure IV. 5. Diagramme vectoriel des tensions et courant transformateur en charge

N. B.

La relation donnée par l'équation IV.15 est complètement fausses à vide, elle est d'autant plus exacte que $\bar{I}_2$ est plus important.

IV. 2. 4. Chute de tension en charge et schémas équivalents

En réalité, les enroulements primaire et secondaire ont des résistances R_1 et R_2 et ne sont pas parfaitement couplés.

On considère que les enroulements du primaire sont traversés par un flux magnétique φ_1 et les enroulements du secondaire sont traversés par le flux magnétique φ_2 .

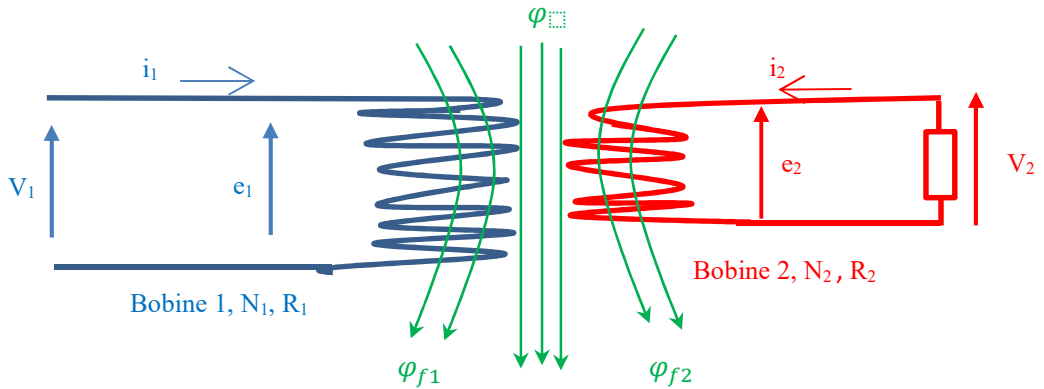


Figure IV. 6. Transformateur en charge

Dans la figure IV. 6 le courant i_2 est fourni au secondaire.

En appliquant la loi d'ohm générale sur les deux circuits couplés de la figure IV.6 pour trouver les équations de tensions du transformateur

$$\begin{cases} V_1(t) = R_1 i_1(t) + N_1 \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \\ V_2(t) = -R_2 i_2(t) + N_2 \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

Une petite partie φ_{f1} du flux qui traverse les spires primaires ne traverse pas les spires secondaires, comme l'indique la figure IV.6. De même le flux de fuites secondaires φ_{f2} traverse le secondaire mais pas le primaire.

φ est le flux commun aux deux enroulements, le flux total à travers ceux-ci sont donc :

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) + \varphi_{f1}(t) \quad (\text{IV.18})$$

$$\varphi_2(t) = \varphi(t) + \varphi_{f2}(t) \quad (\text{IV.19})$$

Une grande partie des trajets des flux de fuites sont hors du circuit magnétique, dans l'air ou dans les bobinages. Pratiquement, ces flux de fuites sont proportionnels aux courants qui les créent

$$\varphi_{f1}(t) = l_1 i_1(t) \quad (\text{IV.20})$$

$$\varphi_{f2}(t) = -l_2 i_2(t) \quad (\text{IV.21})$$

l_1 : Inductance de fuite du primaire.

l_2 : Inductance de fuite du secondaire.

En remplaçant les flux par leurs expressions données en équation (IV.20) et équation (IV. 21) les équations des tensions deviennent

$$\begin{cases} V_1(t) = R_1 i_1(t) + l_1 \frac{di_1(t)}{dt} + N_1 \frac{d\varphi(t)}{dt} \\ V_2(t) = -R_2 i_2(t) - l_2 \frac{di_2(t)}{dt} + N_2 \frac{d\varphi(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{IV.22})$$

En notation complexe et en régime harmonique

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{V}_1 - (R_1 + j \omega l_1) \bar{I}_1 \\ \bar{V}_2 = \bar{V}_2 - (R_2 + j \omega l_2) \bar{I}_2 \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Avec

$$\bar{V}_1 = j \omega N_1 \bar{\varphi} \quad (\text{IV.24})$$

$$\bar{V}_2 = j \omega N_2 \bar{\varphi} \quad (\text{IV.25})$$

On trouve que :

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{IV.26})$$

Ces équations correspondent au schéma équivalent représenté à la figure IV. 7. Dans ce schéma, (T') représente un transformateur idéal, dont les enroulements sont dépourvus de résistance et de réactance de fuite. Ainsi, son rapport de transformation est exactement égal au rapport du nombre de spires des deux enroulements. Toutefois, même dans le cas d'un transformateur idéal, un courant magnétisant $\bar{I}_{10}$ est nécessaire pour établir le flux magnétique dans le circuit magnétique. En outre, le fonctionnement réel du transformateur s'accompagne de pertes dans le fer, principalement dues aux phénomènes d'hystérésis et aux courants de Foucault.

$$N_1 \bar{I}_1 = N_2 \bar{I}_2 + N_1 \bar{I}_{10} \quad (\text{IV.27})$$

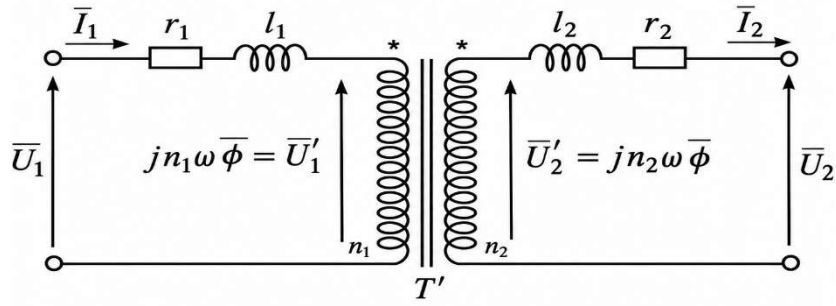


Figure IV. 7. Schéma équivalent du transformateur monophasé avec résistances et réactances de fuite

—En tenant compte de l'impédance magnétisante $\bar{Z}_m$, du courant à vide $\bar{I}_{10}$ ainsi que des pertes dans le fer, on obtient le schéma équivalent représenté à la figure IV. 8. Dans ce schéma, $\bar{T}$ représente un transformateur idéal pour lequel le rapport des tensions est égal au rapport du nombre de spires, tandis que le rapport des courants est égal à l'inverse du rapport de transformation.

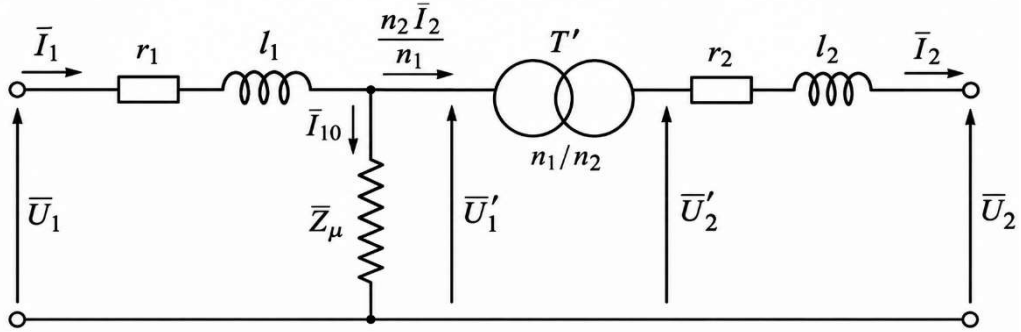


Figure IV.8. Schéma équivalent du transformateur tenant compte de la magnétisation et des pertes

—En charge le courant $\left(\frac{N_2}{N_1}\right) \bar{I}_2 + \bar{I}_{10}$ traversant l'impédance $R_1 + j \omega l_1$ Diffère peu de courant $\left(\frac{N_2}{N_1}\right) \bar{I}_2$. D'autre part, la chute de tension dans $R_1 + j \omega l_1$ est un terme correctif de la tension primaire.

Aussi, on peut avec une excellente approximation rapporter l'impédance magnétisante à l'entrée du schéma.

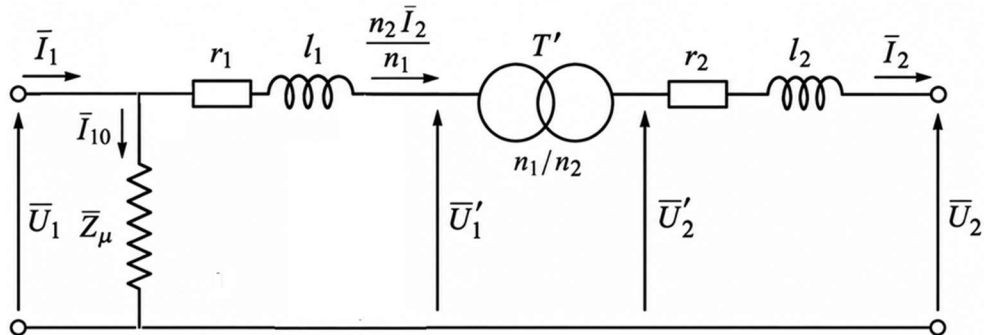


Figure IV. 9. Schéma équivalent du transformateur monophasé avec résistances et réactances de fuite

Les équations correspondantes s'écivent

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{V}_1 - (R_1 + j \omega l_1) \frac{N_2}{N_1} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = \bar{V}_2 - (R_2 + j \omega l_2) \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \bar{I}_2 + \bar{I}_{10} \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

Puisque l'équation IV.26 est vérifiée, on peut écrire

$$\bar{V}_2 = \frac{N_2}{N_1} \bar{V}_1 - (R_1 + j \omega l_1) \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \bar{I}_2 - (R_2 + j \omega l_2) \bar{I}_2 \quad (\text{IV.29})$$

Ou

$$\bar{V}_2 = \frac{N_2}{N_1} \bar{V}_1 - (R_2' + j X_2') \bar{I}_2 \quad (\text{IV.30})$$

Avec :

$$R_2' = R_2 + R_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \quad (\text{IV.31})$$

$$X_2' = l_2 \omega + l_1 \omega \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \quad (\text{IV.32})$$

$R_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$ et $l_1 \omega \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$ donnent la résistance et réactance des fuites du primaire ramenées au secondaire

R_2' est la résistance totale des deux enroulements ramenée au secondaire

X_2' est la réactance de fuite totale ramenée au secondaire.

On arrive ainsi au schéma équivalent de la figure suivante

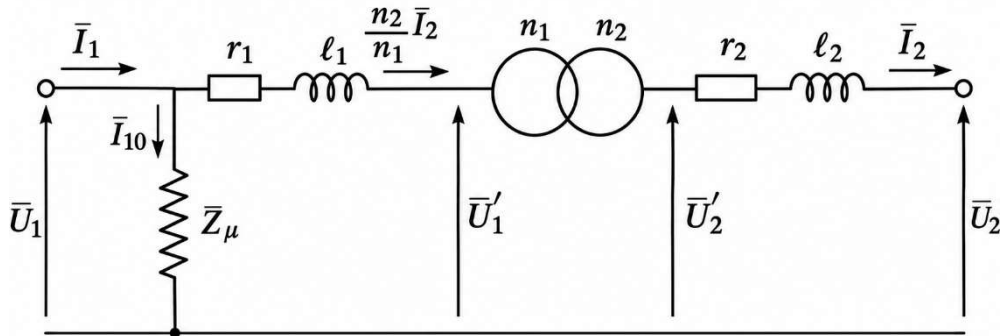


Figure IV. 10. Schéma équivalent approché du transformateur avec impédance magnétisante ramenée au primaire

Si c'est plus commode, on peut tout ramener au primaire, figure V. 11, en posant

$$R_1' = R_1 + R_2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (\text{IV.33})$$

$$X_1' = l_1 \omega + l_2 \omega \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (\text{IV.34})$$

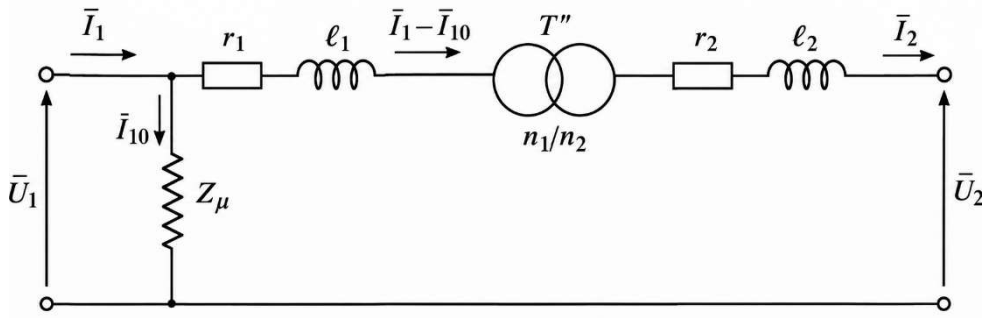


Figure IV. 11. schéma équivalent du transformateur avec impédance magnétisante et ramenée au secondaire

IV. 2. 5. Détermination des éléments des schémas équivalents

IV. 2. 5. 1. Essai à vide

Le secondaire étant ouvert $I_2 = 0$. On alimente le primaire sous sa tension nominale.

On mesure la tension V_1 , la tension secondaire V_{20} , le courant I_{10} et la puissance P_{10} absorbée.

On en déduit :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_{20}}{V_1} \quad (\text{IV.35})$$

$$Z_m = \frac{V_1}{I_{10}} \quad (\text{IV.36})$$

$$R_m = \frac{P_{10}}{I_{10}^2} \quad (\text{IV.37})$$

$$X_m = \sqrt{Z_m^2 - R_m^2} \quad (\text{IV.38})$$

IV. 2. 5. 2. Essai en court circuit

Le secondaire mis en court-circuit sur un ampèremètre, on alimente le primaire sous une tension très réduite, V_{1c} pour que le courant secondaire I_2 n'excède pas sa valeur nominale.

On mesure V_{1cc} , I_2 et la puissance P_{cc} fournie au transformateur,

Puisque

$$\bar{I}_2 = \frac{\frac{V_{1c} N_2}{N_1}}{R_2 + jX_2} \quad (\text{IV.39})$$

$$\sqrt{R_2^2 + X_2^2} = \frac{V_{1cc} \frac{N_2}{N_1}}{I_2} \quad (\text{IV.40})$$

On peut négliger les pertes dans le fer du transformateur dans cette essai sous très faible tension. Donc à flux très réduit

$$R_2 = \frac{P_{cc}}{I_2^2} \quad (\text{IV.41})$$

IV.3. Caractéristiques

Pour un transformateur alimenté sous sa tension nominale, on trace les courbes représentant, pour différentes valeurs du facteur de puissance de la charge secondaire, les variations de la tension secondaire V_2 et du rendement η en fonction du courant secondaire I_2 .

IV. 3. 1. Chute de tension secondaire

Comme la tension secondaire V_2 varie généralement dans une plage relativement faible, on préfère représenter non pas les courbes donnant directement la tension secondaire, mais celles décrivant sa chute de tension en fonction du courant secondaire I_2 .

$$\Delta V_2 = V_{20} - V_2 \quad (\text{IV.42})$$

D'après le schéma équivalent de la figure IV.12, les tensions $\overline{V_{20}}$ et $\overline{V_2}$ sont liés par la relation

$$\overline{V_{20}} = \overline{V_2} + R_2 \overline{I_2} + jX_2 \overline{I_2} \quad (\text{IV.43})$$

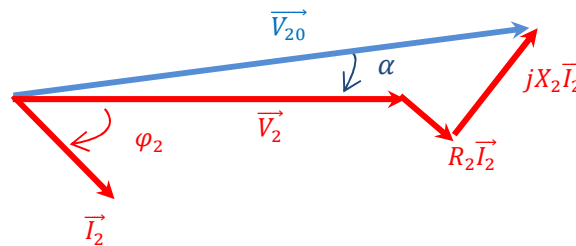


Figure IV. 12. Diagramme vectoriel de la chute de tension secondaire

C'est la chute de tension est faible. l'angle α est faible. On peut confondre V_{20} avec $V_{20} \cos \alpha$.

$$\Delta V_2 \simeq R_2 I_2 \cos \varphi_2 + X_2 I_2 \sin \varphi_2 \quad (\text{IV.44})$$

φ_2 déphasage de $\overline{I_2}$ en arrière de $\overline{V_2}$

ΔV_2 est proportionnel à $\overline{I_2}$

ΔV_2 dépend beaucoup de φ_2 :

Si $\overline{I_2}$ est déphasé en arrière de $\overline{V_2}$ les deux termes de l'équation IV.44 s'ajoutent

Si $\overline{I_2}$ est déphasé en avant de $\overline{V_2}$ le second terme de l'équation IV.44 se soustrait du premier terme. Pour un déphasage avant important, ΔV_2 est négatif, c'est à dire que $\overline{V_2}$ est supérieur à $\overline{V_{20}}$.

IV. 3. 2. Rendement

Le rendement est le rapport de la puissance débitée par le secondaire, $V_2 I_2 \cos \varphi_2$, à la puissance entrante au primaire, $V_1 I_1 \cos \varphi_1$. La différence est due aux pertes.

$$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos \varphi_2}{V_2 I_2 \cos \varphi_2 + P_{fer} + P_{Joule}} \quad (IV.45)$$

$$P_{Joule} = R_2 I_2^2$$

Pour des valeurs de $\cos \varphi_2$ proches de l'unité, le rendement maximal est élevé, de l'ordre de 95 % pour les transformateurs de quelques dizaines de kVA et égal ou supérieur à 99 % pour les très grosses unités. De plus, il se maintient à un niveau élevé sur une large plage de variation du courant secondaire I_2 .

Lorsque $\cos \varphi_2$ diminue, le rendement du transformateur diminue également. En effet, pour un courant secondaire donné, les pertes restent pratiquement constantes, tandis que la puissance utile délivrée au secondaire est proportionnelle à $\cos \varphi_2$.

Le rendement peut s'écrire :

$$\eta = \frac{V_2 \cos \varphi_2}{V_2 \cos \varphi_2 + \frac{P_{fer}}{I_2} + R_2 I_2} \quad (IV.46)$$

Références bibliographiques

- [1]. J.P Perez, Electromagnétisme Fondements et Applications, 3eme Edition, 1997.
- [2]. A. Fouillé, Electrotechnique à l'Usage des Ingénieurs, 10e édition, Dunod, 1980.
- [3]. C. François, Génie électrique, Ellipses, 2004.
- [4]. Charles I. Hubert P. E., Electric Machines, Theory, Operation, Applications, Adjustment, and Control, Second edition, Prentice Hall, 2002.
- [5]. B. Estibals et S. Weber, Electronique, tout les course n fiches, Edition Dunod , 2015.
- [6]. G. Segulier, F. Notelet, Electrotechnique industrielle , Edition Tec et Doc, 1987.
- [7]. J. Laroche. Introduction à l'électrotechnique. Fondement d'électricité et électromagnétisme. Édition Dunod, 2002.
- [8]. F, DE, collon. I M, J. Traité d'électricité, traité d'électricité, introduction à l'électrotechnique, édition Dunod, 1984.
- [9] . L. Lasne, électrotechnique et génie électrique, édition Dunod 2013.
- [10]. A. Kassatkine, électrotechnique élémentaire, édition MIR, 1987.