

Réseaux de Petri

Les réseaux de Petri sont des outils graphiques et mathématiques qui permettent de modéliser et de vérifier le comportement dynamique des systèmes à événements discrets, tels que les systèmes de production, les réseaux de télécommunications ou encore les systèmes de transport. Par rapport aux automates finis, les réseaux de Petri présentent l'avantage d'être un modèle plus général, doté de structures plus complexes, ce qui les rend particulièrement adaptés pour décrire certains types de systèmes à événements discrets (SED).

1. Réseaux de Petri

Un Réseau de Petri est un graphe biparti orienté. Il est composé de trois ensembles :

- Un ensemble fini et non vide de places, noté $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, représentées par des cercles. Les places symbolisent des conditions ou des ressources dans le système. Chaque place peut contenir un nombre quelconque de marques (jetons) à un moment donné, ce qui reflète l'état courant du système. Les jetons évoluent dans les places au fur et à mesure du franchissement des transitions.
- Un ensemble fini et non vide de transitions, noté $T = \{t_1, \dots, t_m\}$, représentées par des traits, des barres ou des rectangles. Les transitions modélisent des événements ou des actions qui modifient l'état du système en changeant la distribution des jetons dans les places. Une transition peut être tirée (ou franchie) sous certaines conditions, et c'est son tir qui déclenche l'évolution du système.
- Un ensemble fini d'arcs orientés, représentés par des flèches, qui relient les places aux transitions ($p_i \rightarrow t_j$) et vice versa ($t_j \rightarrow p_i$). Les arcs indiquent les relations de flux entre les places et les transitions. Chaque arc possède un poids (un nombre entier positif) qui indique le nombre de jetons consommés ou produits lorsqu'une transition est tirée. Sauf mention contraire, le poids d'un arc est par défaut égal à 1.

Notations :

Lors de la description d'un réseau de Petri, on utilise généralement les notations suivantes :

- $I(t_j)$: ensemble des places d'entrée de la transition t_j .
- $O(t_j)$: ensemble des places de sortie de la transition t_j .
- $I(p_i)$: ensemble des transitions d'entrée de la place p_i .
- $O(p_i)$: ensemble des transitions de sortie de la place p_i .

Remarques :

- Lorsque tous les arcs ont un poids égal à 1, il s'agit d'un *réseau de Petri ordinaire*.
- Lorsque au moins un arc possède un poids différent de 1, on parle de *réseau de Petri généralisé*.
- Une transition sans place d'entrée est appelée *transition source*.
- Une transition sans place de sortie est appelée *transition puits*.

2. Marquage d'un réseau

Un marquage (ou état) est une fonction qui associe à chaque place un nombre entier non négatif, représentant le nombre de marques (jetons) qu'elle contient. Graphiquement, les jetons sont représentés par des points noirs dans les places ou, plus simplement, par un entier positif inscrit dans la place.

Si $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ désigne l'ensemble des places du réseau, un marquage M est représenté par le vecteur de marquage $M = [M(p_1), M(p_1), \dots, M(p_n)]^T$, où $M(p_i)$ est le nombre de jetons dans la place p_i .

Le marquage représente l'état complet et instantané du système modélisé. Il évolue de manière atomique lors du franchissement des transitions, traduisant la dynamique et les changements d'état du système.

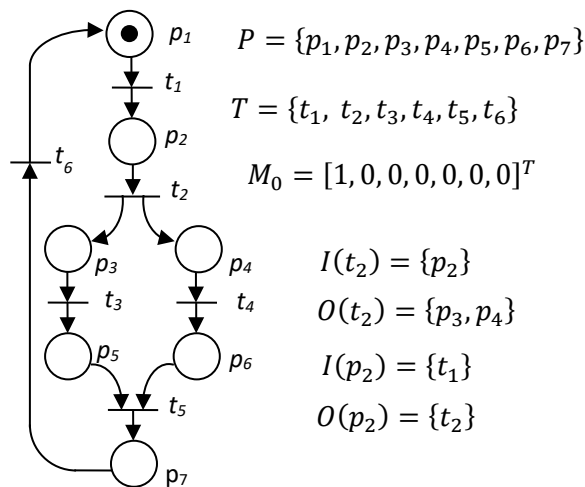


Figure 1 : Réseau de Petri ordinaire

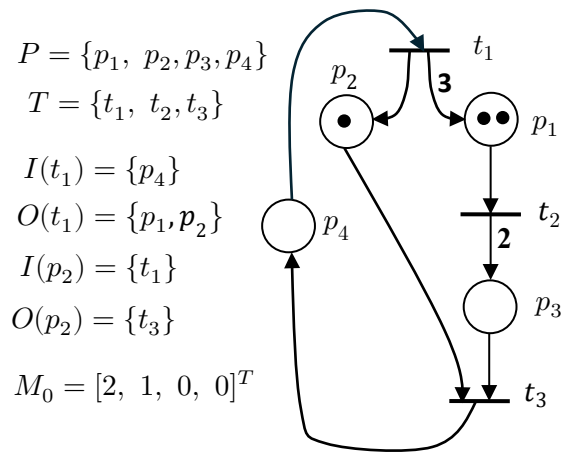


Figure 2 : Réseau de Petri généralisé

2.1. Marquage initial d'un réseau

Le marquage initial représente la distribution des jetons dans les places du réseau de Petri au début de son exécution. Il est généralement noté M_0 et constitue l'état de départ (état initial) à partir duquel le réseau évolue. Ce marquage sert de point de référence essentiel pour l'analyse, la simulation ou la vérification des propriétés du système modélisé.

Exemple 1 : Pour le réseau de Petri ordinaire de la Figure 1, le marquage initial est : $M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Pour le réseau de Petri généralisé de la Figure 2, le marquage initial est : $M_0 = [2 \ 1 \ 0 \ 0]^T$.

2.2. Evolution du marquage d'un réseau

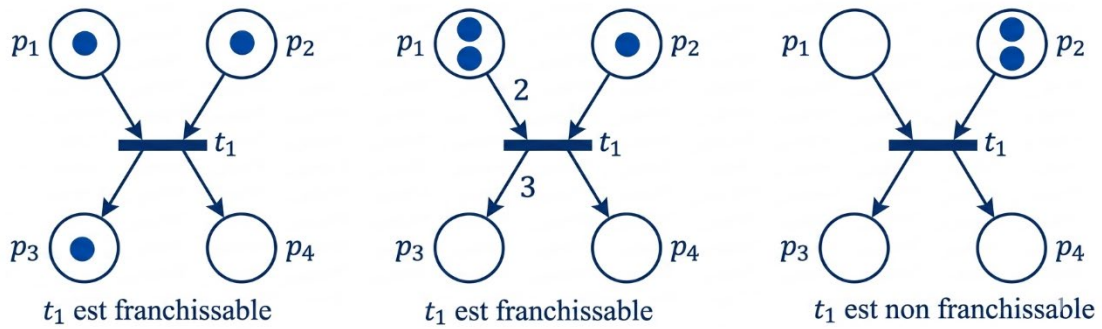
L'évolution du marquage dans un réseau de Petri décrit la manière dont la distribution des jetons dans les places change au fil du franchissement des transitions. A chaque fois qu'une transition franchissable est tirée, elle consomme des jetons dans ses places d'entrée et en produit dans ses places de sortie, conformément aux poids des arcs. Cette dynamique permet de modéliser l'évolution de l'état du système au cours du temps.

Le franchissement d'une transition suit deux principes :

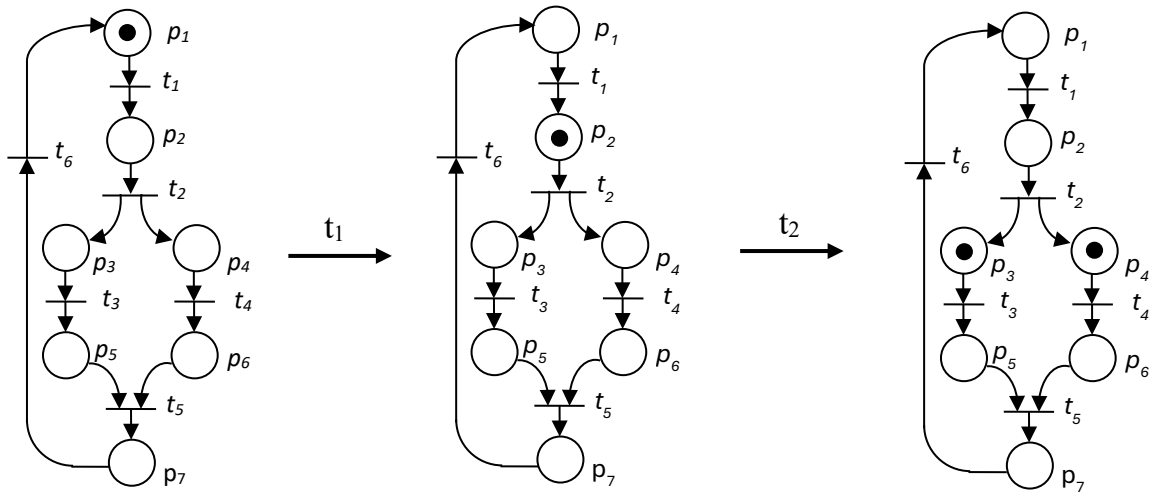
- **Franchissabilité :** Une transition est franchissable (ou validée, sensibilisée, tirable) lorsque chaque place en amont (place d'entrée) possède un nombre de jetons au moins égal au poids de l'arc qui la relie à cette transition.
- **Franchissement :** Lorsqu'une transition est tirée
 - Elle retire des jetons de chaque place d'entrée, en quantité égale au poids de l'arc entrant correspondant.
 - Elle dépose des jetons dans chaque place de sortie, en quantité égale au poids de l'arc sortant correspondant.

Cette opération est atomique (indivisible) et conduit à un nouveau marquage du réseau.

Exemple 2 : Transitions franchissables ou validées



Exemple 3 : Franchissement de transitions



Remarques :

- Une transition franchissable (ou validée) représente une évolution possible du système, mais pas une obligation. Elle peut rester activée sans être tirée, selon le modèle d'exécution choisi (non-déterminisme, priorité, etc.).
- Une transition source est toujours franchissable par définition, car elle n'a pas de places en entrée.
- La règle de franchissement peut varier. La sémantique usuelle (sauf spécification contraire) est le tirage élémentaire : à chaque instant, une seule transition franchissable peut être tirée, et son tirage est instantané et atomique. Le choix parmi les transitions concurrentes est alors non déterministe.

2.3. Marquages accessibles

L'ensemble des marquages accessibles d'un réseau de Petri depuis un marquage initial M_0 est constitué de tous les marquages pouvant être atteints en appliquant une séquence finie de franchissements de transitions, conforme aux règles de tir des transitions. On note généralement cet ensemble par *M_0 ou par $R(M_0)$. Le passage d'un marquage M_k au marquage M_ℓ par franchissement de la transition t_j est noté : $M_k[t_j]M_\ell$

2.4. Couverture (stricte)

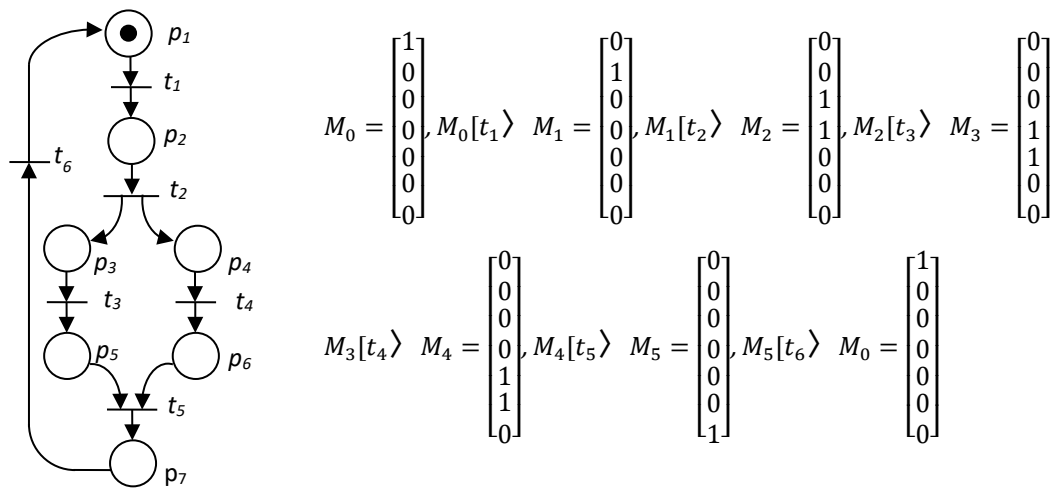
On dit qu'un marquage M_k couvre un marquage M_ℓ , et l'on écrit $M_k > M_\ell$, si M_k contient dans chaque place au moins autant de jetons que M_ℓ , et s'il existe au moins une place p_i tel que $M_k(p_i) > M_\ell(p_i)$.

2.5. Séquence de franchissement

Une séquence de franchissement est une suite ordonnée de transitions de type : $S = t_1 t_2 \dots t_k$ où chaque transition t_i est franchissable après l'application de toutes les transitions qui la précèdent, à partir d'un marquage M_0 .

- Une séquence de franchissement décrit un comportement (ou scénario) complet du système modélisé, représentant un enchaînement possible d'événements.
- On écrit $M_0 \xrightarrow{S} M_k$ pour indiquer que la séquence S peut être franchie depuis M_0 et conduit au marquage M_k .
- La séquence vide ε est autorisée, et on a $M_0 \xrightarrow{\varepsilon} M_0$.
- L'ensemble de toutes les séquences franchissables depuis M_0 caractérise le langage du réseau de Petri.

Exemple 4 :



Ensemble des marquages accessibles : $*M_0 = R(M_0) = \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$

Exemples de séquences de franchissement : $S = t_1 : M_0[S] \rangle M_1, S = t_1 t_2 t_3 : M_0[S] \rangle M_3$

3. Représentation matricielle d'un réseau de Petri

La représentation matricielle permet d'exprimer la structure et la dynamique d'un réseau de Petri de manière algébrique, en utilisant des matrices et des vecteurs. Cette approche facilite l'analyse structurelle et le calcul des propriétés du réseau.

Soit un réseau de Petri avec n places et m transitions.

3.1. Matrice d'incidence (ou matrice des poids)

La matrice d'incidence C est une matrice $n \times m$ où chaque élément $C[p_i, t_j]$ représente la variation nette du nombre de jetons dans la place p_i après le franchissement de la transition t_j .

$$C[p_i, t_j] = W[t_j, p_i] - W[p_i, t_j]$$

où $W[t_j, p_i]$ est le poids de l'arc reliant t_j à p_i , $W[p_i, t_j]$ est le poids de l'arc reliant p_i à t_j .

Ainsi, chaque colonne de C représente l'effet net d'une transition sur toutes les places.

On peut décomposer la matrice C en deux matrices non négatives :

$$C = Post - Pre$$

Pre est une matrice $n \times m$ appelée fonction d'incidence avant avec : $Pre[p_i, t_j] = W[p_i, t_j]$

$Post$ est une matrice $n \times m$ appelée fonction d'incidence arrière avec : $Post[p_i, t_j] = W[t_j, p_i]$

Remarque : Dans un réseau pur (sans boucle), la matrice d'incidence capture entièrement la topologie du réseau.

3.2. Equation d'état (équation fondamentale)

A partir d'un marquage M_0 , l'évolution du marquage pour une séquence de franchissement S représentée par un vecteur de franchissement $\bar{S}$ est donnée par l'équation linéaire :

$$M = M_0 + C \cdot \bar{S}$$

Le vecteur de franchissement $\bar{S}$ (de dimension m , nombre de transitions), où la composante $\bar{S}[t_j]$ représente le nombre d'occurrences de la transition t_j dans la séquence S . Ce vecteur est appelé aussi vecteur caractéristique de S .

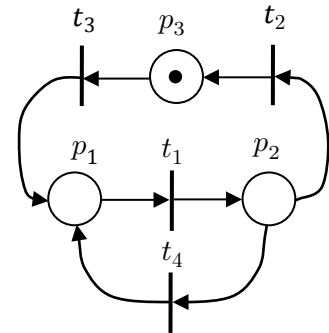
Remarque : Cette équation fournit une condition nécessaire pour qu'un marquage M soit accessible depuis M_0 , mais elle n'est pas suffisante, en raison du risque d'existence de marquages fantômes. En effet, il est indispensable que le marquage initial, ainsi que tous les marquages intermédiaires, garantissent que chaque transition associée au vecteur de franchissement soit effectivement franchissable, et ce dans l'ordre de la séquence considérée.

Exemple 5 :

$P = \{p_1, p_2, p_3\}$, $|P| = 3$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $|T| = 4$

$$Pre = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad Post = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$C = Post - Pre = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



$P = \{p_1, p_2, p_3\}$, $|P| = 3$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $|T| = 4$

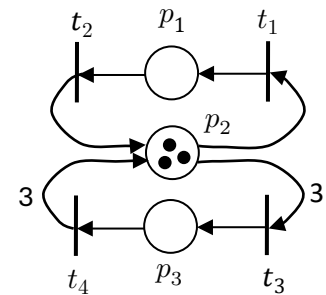
$$Pre = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad Post = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$C = Post - Pre = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soit la séquence $S = t_1 t_2 t_3$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{t_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{t_2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{t_3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = t_1 \Rightarrow \bar{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : M = M_0 + C \cdot \bar{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S = t_1 t_1 t_2 \Rightarrow \bar{S} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : M = M_0 + C \cdot \bar{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

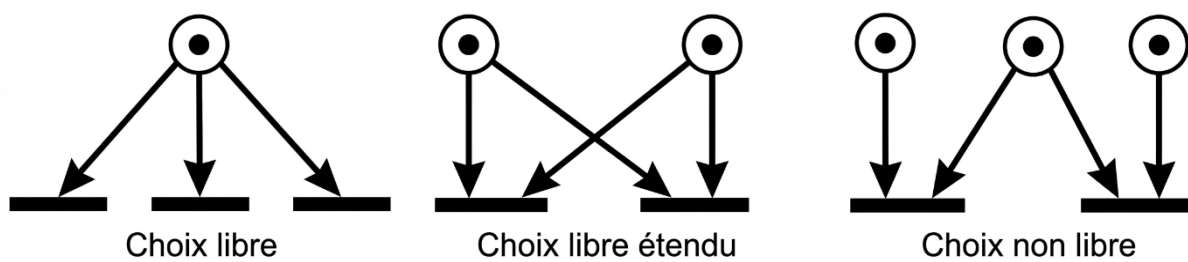


4. Structures particulières des Réseaux de Pétri

Les réseaux de Petri peuvent présenter des configurations structurelles particulières, caractérisées par des relations spécifiques entre places et transitions. Ces formes particulières définissent des sous-classes présentant des propriétés comportementales distinctes.

- **Graphe d'état (ou automate à transitions) :** Un réseau de Petri est un graphe d'état si et seulement si chaque transition possède exactement une place d'entrée et une place de sortie.
Interprétation : Chaque transition représente un événement unique modifiant l'état du système d'une configuration à une autre. Cette structure est équivalente à un automate fini.
- **Graphe d'évènements (ou graphe de décision) :** Un réseau de Petri est un graphe d'évènements si et seulement si chaque place possède exactement une transition d'entrée et une transition de sortie.
Interprétation : Les places représentent des états intermédiaires dans un processus séquentiel. Elles traduisent souvent des décisions ou des étapes successives du déroulement du système.
- **Réseau de Petri sans conflit :** Un réseau de Petri est sans conflit si et seulement si chaque place possède au plus une transition en sortie. Dans le cas contraire, le réseau est dit avec conflit (au moins une place a plusieurs transitions en sortie).
Implication : L'absence de conflit garantit un déterminisme local, car aucune place ne peut choisir entre plusieurs transitions.
Remarque : Un conflit existe lorsqu'une même place p possède plusieurs transitions distinctes en sortie.
- **Réseau de Petri à choix libre :** Un réseau de Petri est à choix libre si et seulement si, pour chaque conflit, toutes les transitions impliquées n'ont qu'une seule place d'entrée.
Implication : Le choix entre transitions concurrentes est local et ne dépend que de la place source du conflit.
- **Réseau de Petri à choix libre étendu :** Un réseau de Petri est à choix libre étendu si et seulement si, pour chaque conflit, toutes les transitions en compétition partagent exactement le même ensemble de places d'entrée.
Implication : Cette propriété généralise le choix libre en permettant plusieurs places d'entrée communes.
- **Réseau de Petri simple :** Un réseau de Petri est simple si et seulement si chaque transition intervient dans au plus un conflit.
Implication : Les conflits sont structurellement disjoints, ce qui simplifie l'analyse des comportements.
- **Réseau de Petri pur :** Un réseau de Petri est dit pur (ou sans boucle) si, pour toute transition, aucune place n'est à la fois place d'entrée et place de sortie de cette transition.
Implication : Il n'y a pas d'arc reliant directement une transition à elle-même via une place, ce qui exclut les auto-activations immédiates.

RdP	Possible	Impossible
Graphe d'état		
Graphe d'événements		
Sans conflits		
A choix libre		
Simple		
Pur		



5. Propriétés comportementales des réseaux de Petri

Les propriétés comportementales dépendent du marquage initial M_0 . En changeant ce marquage, il n'est pas garanti que ces propriétés demeurent valides. En revanche, les propriétés qui ne dépendent pas du marquage initial sont appelées propriétés structurelles.

5.1 Bornitude

- **Place k-bornée, non bornée**

Une place p_i du réseau est k -bornée (bornée) pour un marquage initial M_0 donné si pour tout marquage M accessible depuis M_0 , $M(p_i) \leq k$. Autrement dit : p_i est k -bornée si et seulement si : $\forall M \in {}^*M_0, M(p_i) \leq k$. Dans le cas contraire, la place p_i est dite non-bornée.

- **Réseau borné**

Un réseau de Petri est borné si toutes ses places sont bornées (chaque place p_i a sa propre borne k_i). Un réseau 1-borné est appelé un réseau de Petri saut ou binaire.

Remarque : Si le réseau est non borné pour M_0 , alors il est non borné pour tout $M'_0 > M_0$.

5.2 Vivacité et quasi-vivacité

- **Quasi-vivacité d'une transition**

La quasi-vivacité d'une transition signifie que depuis le marquage initial, cette transition peut être franchie au moins une fois. Autrement dit, une transition t_j est quasi-vivante si est seulement si : $\exists M \in {}^*M_0$ tel que $M[t_j \rangle M'$. Par conséquent, une transition non quasi-vivante est dite morte (ou inutile).

- **Quasi-vivacité d'un réseau**

Un réseau de Petri est quasi-vivant si toutes ses transitions sont quasi-vivantes.

- **Vivacité d'une transition**

La vivacité d'une transition exprime le fait que quel que soit l'évolution du réseau à partir du marquage initial M_0 , le franchissement de cette transition est toujours possible. Autrement dit, une transition t_j est vivante si est seulement si : $\forall M \in {}^*M_0, \exists S$ tel que $M[St_j \rangle M'$.

- **Vivacité d'un réseau**

Un réseau de Petri est vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

5.3 Etat d'accueil et réversibilité

- **Etat d'accueil**

Un marquage $M_a \in {}^*M_0$ est un état d'accueil si, depuis tout marquage accessible $M \in {}^*M_0$ on peut revenir à M_a , i.e. $\forall M \in {}^*M_0, \exists S$ tel que $M[S \rangle M_a$.

- **Réversibilité (réinitialisabilité)**

Un réseau de Petri est réinitialisable (ou réversible) si son marquage initial M_0 est un état d'accueil.

5.4 Blocage (marquage puits)

Un blocage est un marquage dans lequel aucune transition n'est franchissable. Un réseau de Petri est sans blocage si aucun de ses marquages accessibles n'est un marquage puits.

Remarque : Un réseau possédant un blocage (marquage puits) n'est pas vivant. Un réseau vivant est sans blocage, mais un réseau sans blocage n'est pas nécessairement vivant.

5.5 Répétitivité

Un réseau de Petri est répétitif s'il existe un marquage initial M_0 et une séquence « S » franchissable telle que chaque transition apparaît un nombre illimité de fois.

6. Méthodes d'analyse des réseaux de Petri

L'analyse d'un réseau de Petri vise à vérifier ses propriétés comportementales ou structurelles. Deux grandes familles de méthodes sont utilisées, qui peuvent être complémentaires :

6.1. Analyse comportementale par énumération (ou par graphe des marquages)

Cette approche consiste à énumérer exhaustivement tous les états (marquages) accessibles depuis le marquage initial. On construit ainsi le graphe de couverture (ou *reachability graph*).

- **Avantage :** Permet de vérifier directement des propriétés comportementales comme l'accessibilité, l'absence de blocage (*deadlock*), la vivacité (*liveness*), ou la bornitude.
- **Limitation :** Peut conduire à une explosion combinatoire du nombre d'états, rendant l'analyse impraticable pour les grands systèmes.

6.2. Analyse structurelle

Cette approche étudie les propriétés du graphe du réseau indépendamment de son marquage initial, en exploitant des outils mathématiques.

- **Par algèbre linéaire (équations d'état) :** Cette méthode repose sur la représentation matricielle du réseau. Cela permet de calculer des invariants :
 - Invariants de places (P-invariants) : Identifient des sous-ensembles de places dont la somme pondérée des jetons est constante. Ils permettent de vérifier la conservation (bornitude).
 - Invariants de transitions (T-invariants) : Représentent des séquences de transitions qui ramènent le système à son marquage initial. Ils donnent des indications sur la répétitivité et le potentiel de vivacité.
- **Par sous-structures caractéristiques (analyse structurelle qualitative) :**
 - Siphons : Ensemble de places tel que tout arc entrant provient d'une transition elle-même connectée à l'ensemble. Un siphon qui se vide reste vide, ce qui peut entraîner un blocage.
 - Trappes : Ensemble de places tel que tout arc sortant va vers une transition elle-même connectée à l'ensemble. Une trappe qui contient un jeton en gardera toujours au moins un.

7. Analyse comportementale par énumération (ou par graphe des marquages)

Graphe des marquages

Le graphe des marquages accessibles d'un réseau de Petri est un graphe dont :

- Les nœuds représentent tous les marquages atteignables (accessibles) à partir du marquage initial M_0 ,
- Les arcs correspondent aux tirages (franchissements) de transitions, indiquant ainsi le passage d'un marquage à un autre.

Ce graphe permet de visualiser l'évolution possible de l'état du réseau. La construction du graphe des marquages accessibles peut être très utile pour l'étude des propriétés d'un réseau de Petri, telles que la vivacité et la bornitude. Deux cas peuvent alors se présenter :

- **Graphe est fini** : Il s'agit de la configuration la plus avantageuse, car toutes les propriétés du réseau peuvent alors être déduites par une simple inspection du graphe.
- **Graphe est infini** : Lorsqu'un réseau de Petri génère une infinité de marquages accessibles, l'analyse directe de son graphe devient difficile, voire impossible. Pour contourner ce problème, on construit généralement un *graphe de couverture*, qui représente de manière finie l'ensemble potentiellement infini des marquages, tout en préservant les informations essentielles nécessaires à l'étude du réseau de Petri.

Algorithme de construction d'un graphe de marquage ou d'un graphe de couverture

1. Initialisation :

Choisir le marquage initial M_0 comme racine du graphe et le considérer comme « nouveau » marquage.

2. Exploration des marquages :

Tant qu'il existe des marquages « nouveaux », procéder comme suit :

- Choisir un marquage M_i parmi les marquages « nouveaux »
- Si aucune transition n'est franchissable à partir de M_i , alors M_i est un « blocage ». Sinon, identifier toutes les transitions franchissables à partir de M_i .
 - Pour chaque transition franchissable t_j , déterminer le marquage M_k résultant du tir de t_j .
 - Si un marquage M_j existe sur le chemin de M_0 à M_k tel que $M_k > M_j$, alors marquer avec ω chaque composante de M_k qui est supérieure à la composante correspondante de M_j .
 - Si M_k n'existe pas encore dans le graphe, l'ajouter et le considérer comme un « nouveau » marquage.
 - Dessiner un arc avec l'étiquette t_j de M_i à M_k .

3. Fin de l'algorithme :

- Lorsque tous les marquages ont été explorés, l'algorithme s'arrête.
- Le graphe obtenu constitue :
 - Le graphe des marquages accessibles si aucun symbole ω n'est introduit.
 - Le graphe de couverture dans le cas contraire.

Remarques :

- Le symbole ω représente un nombre de jetons dans une place p_i qui peut devenir arbitrairement grand, voire infini. Il symbolise donc une infinité de marquages possibles.
- Opérations arithmétiques avec ω : $\omega + n = \omega$, $\omega - n = \omega$ pour tout entier n .
- Il est toujours possible de construire le graphe de couverture, qui est toujours fini.
- Pour un réseau de Petri borné, le graphe de couverture et le graphe des marquages accessibles sont identiques.

Propriétés vérifiables à partir du graphe des marquages accessibles

Les principales propriétés que l'on peut vérifier sur le graphe des marquages accessibles d'un réseau de Petri sont :

- **Bornitude** : Déterminer si une place est 1-bornée, k -bornée ou bornée.
- **Vivacité** : Vérifier si une transition est morte, quasi-vivante ou vivante.
- **Accessibilité** : Déterminer si un marquage donné est accessible (atteignable).
- **Blocage** : Détecter si un marquage est un état de blocage (marquage puits).
- **Propriétés globales** : Vérifier si le réseau est 1-borné, k -borné, borné, quasi-vivant, vivant, sans blocage, réversible ou répétitif.

Cas des réseaux de Petri non bornés – graphe de couverture

- Le graphe de couverture est une sur-approximation de l'ensemble des marquages accessibles. Des réseaux différents peuvent avoir le même graphe de couverture.
- Une place p est non bornée s'il existe un marquage M tel que $M(p) = \omega$.
- Tout marquage atteignable est couvert par un sommet du graphe de couverture, mais la réciproque est fausse. Si $M_0[S] M'$, alors il existe dans le graphe un chemin menant à M'' , avec $M'' \geq M'$.
- Les transitions présentes sont au moins quasi-vivantes, celles absentes sont mortes.
- Si toutes les transitions apparaissent vivantes dans le graphe de couverture, cela ne permet pas, à lui seul, de conclure à la vivacité du réseau de Petri.
- La réversibilité ne se déduit pas en général du graphe de couverture.
- La présence d'un marquage puits indique un blocage, mais son absence ne garantit pas un réseau sans blocage.

Correspondance propriétés du modèle et propriétés du système

Monde du Modèle

Bornitude

→

Monde du système réel

Capacité des ressources

Vivacité

→

Possibilité de répéter les actions

Réversibilité

→

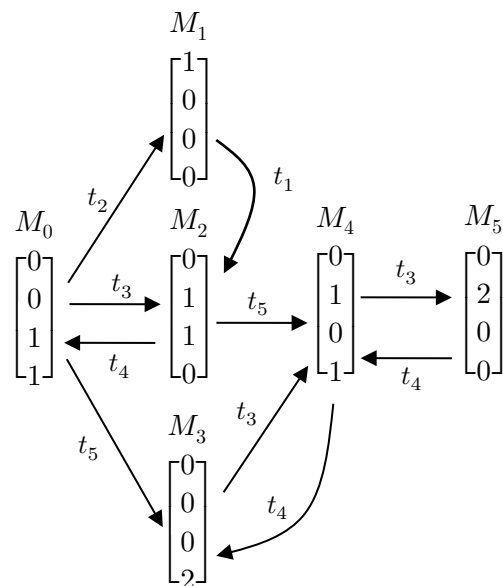
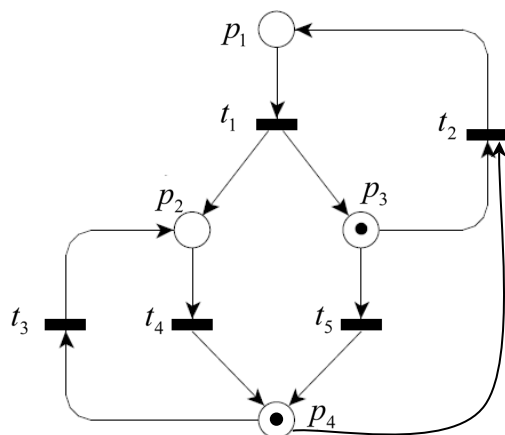
Possibilité de recommencer la séquence d'opérations

Marquage puits

→

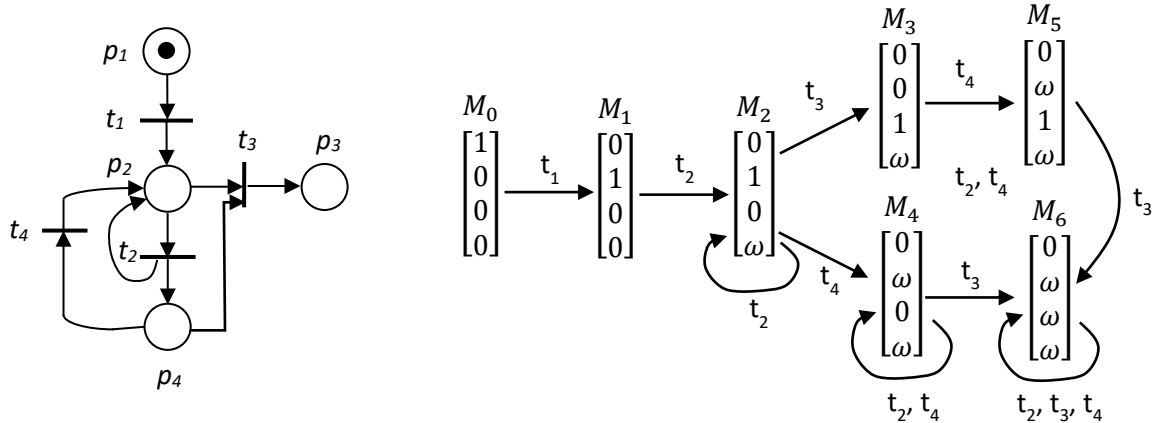
Blocage du système

Exemple 6 :



Ce réseau de Petri est :

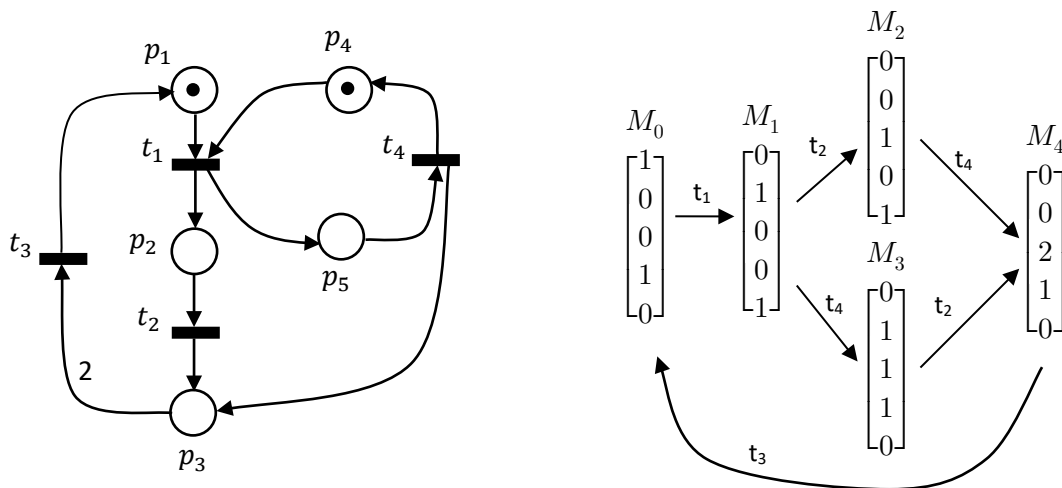
- **Sans blocage** : Aucun marquage accessible ne constitue un marquage puits.
- **Borné** : Toutes les places sont bornées.
- **Quasi-vivant** : Toutes les transitions sont quasi-vivantes.
- **N'est pas vivant** : par exemple, la transition t_1 n'est pas vivante, car elle n'est plus franchissable à partir du marquage M_4 .
- **N'est pas réinitialisable** : Le marquage initial ne peut pas être atteint à partir de tout marquage accessible.



Ce réseau de Petri est :

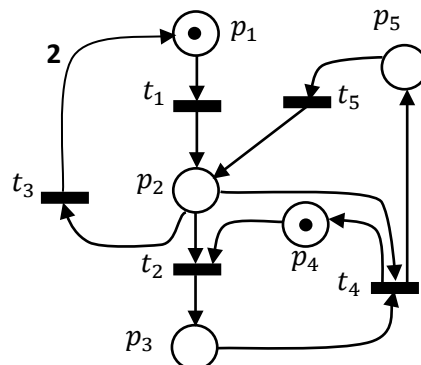
- **Sans blocage** : On ne peut pas décider à partir de ce graphe de couverture.
- **Non borné** : Les places p_2, p_3, p_4 ne sont pas bornées (présence de ω).
- **Quasi-vivant** : Toutes les transitions sont quasi-vivantes.
- **N'est pas vivant** : La transition t_1 n'est pas vivante.
- **N'est pas réinitialisable** : N'est pas réinitialisable (aucun marquage ne couvre M_0).

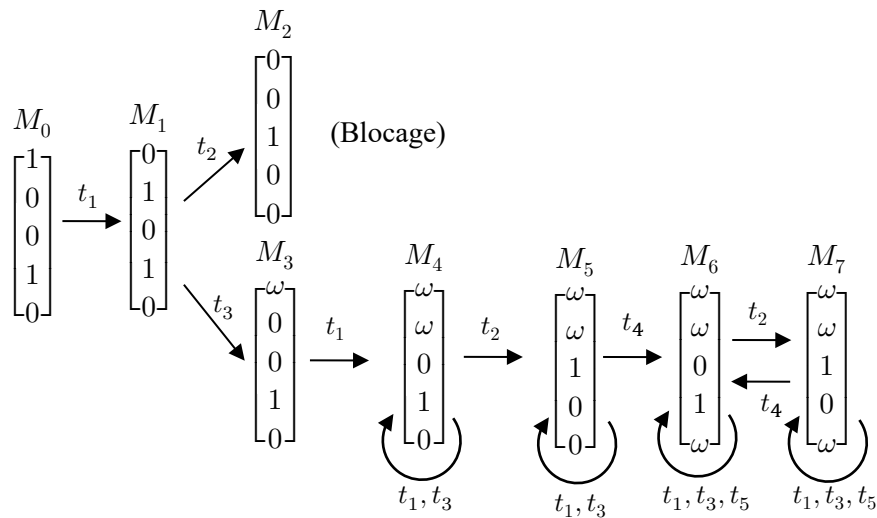
Remarque : Ce réseau est avec blocage (franchissement de $S = t_1 t_2 t_3$ depuis M_0).



Ce réseau de Petri est :

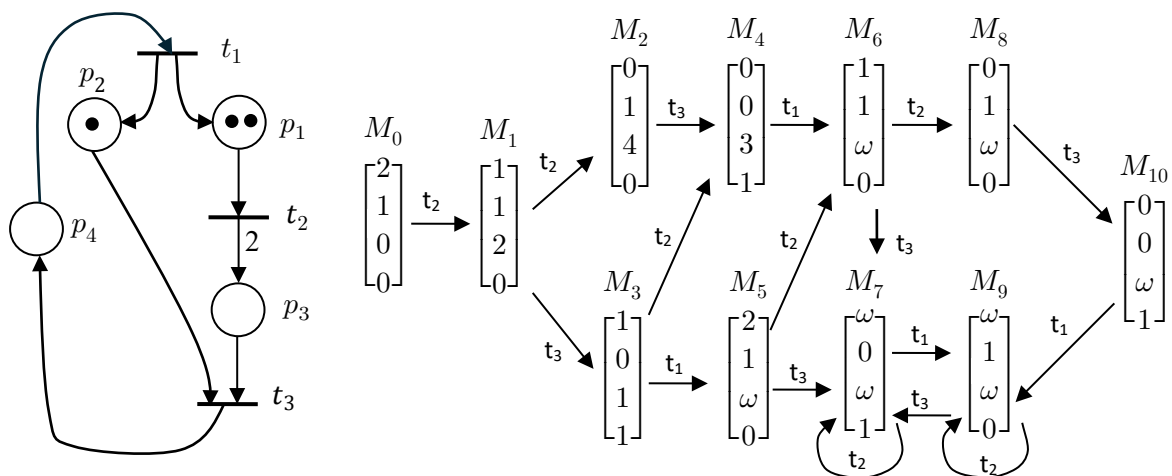
- **Sans blocage** : Aucun marquage accessible ne constitue un marquage puits.
- **Borné** : Toutes les places sont bornées.
- **Quasi-vivant** : Toutes les transitions sont quasi-vivantes.
- **N'est pas vivant** : Toutes les transitions sont vivantes.
- **Réinitialisable** : Le marquage initial peut être atteint à partir de tout marquage accessible.





Ce réseau de Petri est :

- **Avec blocage** : Présence du marquage puits M_2 .
- **Non borné** : Les places p_1, p_2, p_5 ne sont pas bornées (présence de ω).
- **Quasi-vivant** : Toutes les transitions sont quasi-vivantes.
- **N'est pas vivant** : Présence du blocage.
- **N'est pas réinitialisable** : Présence du blocage.



Ce réseau de Petri est :

- **Blocage** : On ne peut pas conclure.
- **Non borné** : Les places p_1, p_3 ne sont pas bornées (présence de ω).
- **Quasi-vivant** : Toutes les transitions sont quasi-vivantes.
- **Vivant** : Toutes les transitions apparaissent vivantes dans le graphe de couverture. Toutefois, cette information ne permet pas de conclure à la vivacité du réseau.
- **Réinitialisable** : On ne peut pas conclure.

8. Analyse structurelle par algèbre linéaire des réseaux de Petri

L'analyse structurelle par algèbre linéaire permet d'étudier un réseau de Petri indépendamment de son marquage initial, en exploitant sa représentation matricielle. Cette approche révèle des propriétés fondamentales du réseau à travers le calcul d'invariants linéaires.

8.1. Invariants de places (P-invariants)

Un P-invariant (ou P-semi-flot) est un vecteur colonne X de dimension n (nombre de places), à composantes entières positives ou nulles, tel que : $X^T C = 0$, ou de manière équivalente $C^T X = 0$, et C est la matrice d'incidence du réseau de Petri.

Un P-invariant exprime donc une relation linéaire conservée entre les places : il permet d'identifier des combinaisons de places dont le nombre total (éventuellement pondéré) de jetons reste constant, quel que soit l'état d'évolution du réseau.

- **P-invariant minimal** : Un P-invariant X est dit minimal s'il n'existe aucun autre P-invariant (non nul) dont toutes les composantes soient inférieures ou égales aux composantes correspondantes de X . En d'autres termes, son support n'est inclus dans celui d'aucun autre P-invariant, et ses composantes sont premières entre elles.
- **Support d'un P-invariant** : Le support d'un P-invariant X est l'ensemble des places dont la composante associée dans X est non nulle : $\|X\| = \{p_i \in P \mid X_i > 0\}$. Il désigne donc les places réellement impliquées dans la relation de conservation.
- **Composante conservative** : L'ensemble des places d'un support d'un P-invariant X forme une composante conservative. Pour tout marquage accessible M_0 depuis le marquage initial M_0 , la relation $X^T M = X^T M_0$ est vérifiée, signifiant que la somme pondérée des jetons dans ces places reste constante quelles que soient les transitions franchies. Par conséquent, toutes les places de cette composante sont bornées.

8.2. Invariants de transitions (T-invariants)

Un T-invariant (ou T-semi-flot) est un vecteur colonne Y de dimension m (nombre de transitions), à composantes entières positives ou nulles, tel que : $C \cdot Y = 0$ où C est la matrice d'incidence du réseau de Petri.

Un T-invariant caractérise donc une combinaison de transitions dont l'exécution, si elle est réalisable depuis un marquage donné, laisse le marquage inchangé. Il décrit ainsi un cycle potentiel du système.

Plus précisément, si une séquence de transitions S possède un vecteur de franchissement égal à Y , et si cette séquence est franchissable depuis un marquage initial M_0 , alors le marquage final M satisfait $M = M_0 + C \cdot Y = M_0$.

- **T-invariant minimal** : Un T-invariant Y est dit minimal s'il n'existe aucun autre T-invariant (non nul) dont toutes les composantes soient inférieures ou égales aux composantes correspondantes de Y . Ses composantes sont premières entre elles.
- **Support d'un T-invariant** : Le support d'un T-invariant Y est l'ensemble des transitions dont la composante associée dans Y est non nulle : $\|Y\| = \{t_j \in T \mid Y_j > 0\}$. Il correspond à l'ensemble des transitions effectivement impliquées dans le cycle de franchissement décrit par le T-invariant.
- **Composante répétitive** : Les transitions appartenant au support d'un T-invariant forment une composante répétitive du réseau.
- **Séquence répétitive** : Une séquence de franchissement dont le vecteur de franchissement est un T-invariant est appelée séquence répétitive. Lorsqu'une telle séquence est

franchissable à partir d'un marquage initial M_0 , son exécution ramène le système à ce même marquage, modélisant ainsi un cycle de fonctionnement périodique. Ainsi, toute séquence répétitive vérifie : $M = M_0 + C \cdot Y = M_0$.

Remarques :

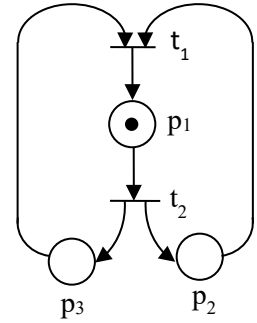
- Méthode de calcul des P-invariants : Résoudre $X^T C = 0$ pour $X \in \mathbb{N}^n$, puis réduire chaque solution non nulle par son PGCD pour obtenir des P-invariants minimaux.
- Méthode de calcul des T-invariants : Résoudre $C \cdot Y = 0$ pour $Y \in \mathbb{N}^m$, puis réduire chaque solution non nulle par son PGCD pour obtenir des T-invariants minimaux.

Exemple 7 : Soit le réseau de Petri de la figure suivante.

Matrice d'incidence : $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Calcul des P-invariants : $X^T C = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$



Alors, pour ce RdP, il y a 2 P-invariants minimaux : $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Composantes conservatives : $\|X_1\| = \{p_1, p_2\}$ et $\|X_2\| = \{p_1, p_3\}$

Pour $M_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$, on a :

$$X_1^T M = X_1^T M_0 \Rightarrow M(p_1) + M(p_2) = 1$$

$$X_2^T M = X_2^T M_0 \Rightarrow M(p_1) + M(p_3) = 1$$

Calcul des T-invariants : $C Y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_2 = 0 \\ -y_1 + y_2 = 0 \\ -y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y_1$

Alors, pour ce RdP, il y a 1 unique T-invariants minimal : $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ avec $\|Y\| = \{t_1, t_2\}$

Deux séquences répétitives sont associées à cet unique T-invariant : $S_1 = t_1 t_2$ et $S_2 = t_2 t_1$

A partir de $M_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$, seulement $S_2 = t_2 t_1$ est franchissable avec : $M_0[S_2 > M_0$

9. Modélisation par réseaux de Petri

Les réseaux de Petri permettent de représenter les comportements complexes d'un système discret. Ils offrent une modélisation graphique et mathématique de plusieurs concepts fondamentaux :

- **Parallélisme** : Les réseaux de Petri permettent de représenter plusieurs activités pouvant se dérouler en même temps grâce à des transitions indépendantes.
- **Synchronisation** : Une transition nécessitant plusieurs jetons d'entrée impose une synchronisation entre différentes branches du système.
- **Partage de ressource** : Une ressource limitée est modélisée par une place unique. La présence ou l'absence de jeton indique sa disponibilité et régule son accès, qu'il soit mutualisé ou exclusif.
- **Mémorisation** : La distribution des jetons à un instant donné capture l'état complet du système, servant ainsi de mémoire explicite.
- **Lecture** : L'utilisation d'arcs de lecture (ou arcs test) permet de vérifier la présence de jetons dans une place sans les retirer.
- **Capacité limitée** : Les places peuvent être dotées d'une capacité maximale, utile pour modéliser des tampons, des files d'attente ou des stocks limités.

10. Extensions des réseaux de Petri

Les réseaux de Petri classiques peuvent être étendus par l'ajout de fonctionnalités spécifiques pour modéliser des comportements plus complexes ou des contraintes particulières. Parmi les principales extensions, on trouve :

- **Réseaux à arcs inhibiteurs** : Un arc inhibiteur empêche le franchissement d'une transition si la place source contient un jeton. Cela permet de modéliser des conditions de blocage ou de priorité négative.
- **Réseaux à capacités** : Les places peuvent avoir une capacité maximale, limitant le nombre de jetons qu'elles peuvent contenir. Cela permet de représenter des ressources bornées ou des files d'attente limitées.
- **Réseaux à priorités** : Des priorités sont attribuées aux transitions ; si plusieurs transitions sont franchissables simultanément, celle de plus haute priorité est tirée en premier.
- **Réseaux synchronisés** : Certaines transitions sont associées à des événements externes (ou des signaux), permettant de coupler le modèle à un environnement ou à un système de contrôle.
- **Réseaux temporisés** : Des délais ou intervalles de temps sont associés aux transitions ou aux places, ce qui permet de modéliser des durées d'activité, des attentes ou des échéances dans les systèmes temps réel.
- **Réseaux stochastiques** : Les transitions sont associées à des lois de probabilité (temps de franchissement aléatoire, probabilités de tir), permettant l'analyse probabiliste et la simulation de performances.
- **Réseaux colorés** : Les jetons sont dotés d'un type ou d'une « couleur » (donnée attribuée), ce qui augmente considérablement l'expressivité du modèle en permettant de représenter des données différenciées et de réduire la taille du graphe.