

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل

كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي



مقياس رياضيات -1-

مطبوعة محاضرات موجهة لطلبة قسم التعليم الأساسي

لكلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

من إعداد الأستاذة: د. زازوة اسيا

السنة الجامعية: 2022-2023

المحتويات

1 التحليل التوافقي

Combinatorial Analysis

4	مبدأ العد الرئيسي	1.1
4	Fundamental Counting Principle	1.1
4	التبديلة "Permutation"	2.1
6	الترتيبة "Arrangement"	3.1
7	التوفيقات "Combinaison"	4.1
7	دستور ثنائي الحد لنيوتن Newton's binomial	5.1
9	تمارين مقترحة	6.1

2 مفاهيم عامة حول المتتاليات العددية

Numerical Sequences

10	تعريف عامة حول المتتاليات	1.2
10	1.1.2 خواص المتتاليات	1.1.2
14	المتتاليات الحسابية Arithmetic Sequences	2.2
14	1.2.2 مفهوم و خواص المتتالية الحسابية	1.2.2
16	2.2.2 تطبيق المتتاليات الحسابية في حالة الإذخار بفائدة بسيطة	2.2.2
17	المتتاليات الهندسية Geometric Sequences	3.2
17	1.3.2 مفهوم و خواص المتتاليات الهندسية	1.3.2
19	2.3.2 تطبيق المتتاليات الهندسية في حالة الادخار بفائدة مركبة	2.3.2
22	4.2 تمارين مقترحة	4.2

3 الدوال اللوغاريتمية و الأسية

Logarithmic and Exponential functions

23	1.3 عموميات على الدوال	1.3
24	1.1.3 النهايات و الاستمرار	1.1.3
28	2.1.3 تذكير ببعض الدوال المألوفة	2.1.3
29	2.3 الدالة اللوغاريتمية وخصائصها الحسابية و التحليلية	2.3
31	3.3 حل المعادلات و المترجمات اللوغاريتمية	3.3
33	4.3 الدالة الأسية وخصائصها الحسابية و التحليلية	4.3
33	1.4.3 خواص الدالة الأسية	1.4.3
33	5.3 حل المعادلات و المترجمات الأسية	5.3
36	6.3 تمارين مقترحة	6.3

37	الإشتقاق Derivatives	4
37	1.4 مفهوم الاشتقاق	
39	2.4 قوانين الاشتقاق	
40	3.4 القيم الحدية العظمى و الصغرى	
41	4.4 المشتقات المتعاقبة	
43	5.4 تمارين مقترحة	

5 الدوال الأصلية و حساب التكاملات

44	Integrals and primitives functions	
44	1.5 الدوال الأصلية و التكاملات المحدودة و غير المحدودة	
44	1.1.5 تعريف عامّة	
45	2.1.5 خواص التكاملات	
45	3.1.5 بعض التكاملات الشهيرة	
46	2.5 طرق حساب التكاملات	
46	1.2.5 طريقة التكامل بالتجزئة	
47	2.2.5 طريقة تبديل المتغير	
48	3.5 تكامل الدوال الناطقة	
53	4.5 التطبيقات الاقتصادية للتكامل	
56	5.5 تمارين مقترحة	

57 المراجع

مقدمة

يعد مقياس -رياضيات 1- أحد مقاييس السداسي الأول لطلبة السنة الأولى بقسم التعليم الأساسي لكلية العلوم الإقتصادية و التجارية وعلوم التسيير.

حاولت أن أدرج في هذه المطبوعة خلاصة تجربتي في تدريس هذا المقياس لمدة ثلاث سنوات حيث حرصت على اعتماد بعض الأمثلة التي تربط بين الجانب الرياضي و الجانب الإقتصادي.

فتطبيقا لمقرر وزارة التعليم العالي و البحث العلمي تضم هذه المطبوعة خمسة فصول أساسية :

كان أولها فصل التحليل التوفيقي أين تطرقت بإيجاز الى مفهوم التبديلة، الترتيبة و التوفيقية .

في الفصل الثاني تم تعريف المتتاليات العددية، خصائصها و أنواعها . كما أشرت الى أمثلة عن بعض تطبيقات المتتاليات في المجال الاقتصادي الذي هو جزء من الحياة اليومية.

في الفصل الثالث قمت بالتذكير بالمفاهيم الأساسية للدوال و التي يعرفها الطالب كمكتسبات قبلية ثم تطرقت الى مفهوم و خصائص الدوال الأسية و اللوغاريتمية و كذلك طرق حل المعادلات و المترجمات سواء الأسية أو اللوغاريتمية.

أما الفصل الرابع فكان مسخرا لمفهوم الاشتقاق و تطبيقاته في المجال الاقتصادي.

و أخيرا الفصل الخامس الذي كان مخصصا لحساب التكاملات و بعض تطبيقاتها دوما في المجال الاقتصادي كون هذه المطبوعة موجهة خصيصا لطلبة كلية العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير.

في الأخير أتمنى أن أكون بهذه المطبوعة قد قدمت مساهمة و إضافة و لو بسيطة ،في تقديم فحوى مقياس رياضيات-1- لطلبة السنة أولى لقسم العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير حيث حرصت على العمل على ازالة الصعوبات و الاعتقادات السائدة حول هذا المقياس الذي يعتبر من أصعب المقاييس حسب ما يعتقد طلبة هذا التخصص.

الفصل 1

التحليل التوافيقي

Combinatorial Analysis

للتحليل التوافيقي أهمية بالغة في مجالات العلوم الاقتصادية ، التجارية و علوم التسيير حيث تهتم هذه المجالات عادة بدراسة مجموعات جزئية من مجموعات كلية فتولي أهمية لترتيبها و امكانية تكرار العناصر من عدمها. لذلك في هذا الفصل سنعرض باختصار الطرق الأساسية للعد و حساب عدد الحالات الممكنة لتكوين مجموعة معينة وفق شروط معينة.

1.1 مبدأ العد الرئيسي Fundamental Counting Principle

ليكن n_1 هو عدد الطرق لوقوع الحدث A و ليكن n_2 هو عدد الطرق لوقوع الحدث B .

1. طريقة الجمع: اذا كان لا يمكن وقوع الحدثين A و B معا فان اجراء عملية واحدة فقط يتم بـ $n_1 + n_2$ طريقة.

مثال 1

اذا كان فوج من افواج السنة أولى لقسم التعليم الاساسي يضم 15 طالب و 13 طالبة فان عدد طرق اختيار أحد الطلبة لتمثيل القسم هو " 15+13 " 28.

2. طريقة الضرب: اذا كان يمكن وقوع الحدثين A و B معا فان عدد طرق وقوع الحدثين معا هو $n_1 \times n_2$.

مثال 2

اذا كان فوج من افواج السنة أولى لقسم التعليم الاساسي يضم 15 طالب و 13 طالبة فان عدد طرق اختيار ممثلين للفوج أحدهم من جنس ذكر و الثاني من جنس انثى هو 15×13 .

2.1 التبديلة "Permutation"

التبديلة هي ترتيب جميع عناصر مجموعة مكونة من n عنصر. وهناك 3 أنواع :

1. التبديلة الخطية المستقيمة مختلفة العناصر : لتكن لدينا المجموعة $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ بحيث $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$. اذا عدد طرق ترتيب جميع عناصر المجموعة A هو

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1.$$

مثال 3

كم عدد مكّون من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله انطلاقاً من المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ ؟

الحل

نلاحظ أن عدد عناصر المجموعة A هو $n = 3$. وأن عناصر المجموعة مختلفة مثنى مثنى. و منه تشيكل عدد مكّون من ثلاثة أرقام يتطلّب ترتيب جميع عناصر المجموعة . اذا عدد الطرق هو $P_3 = 3! = 6$. و الأعداد هي 123 ، 132 ، 213 ، 231 ، 312 و 321

2. التبديلة الخطية المستقيمة لمجموعة متكررة العناصر: في هذه الحالة نقوم بترتيب مجموعة مكونة من n عنصر بحيث يوجد k عنصر بدون احتساب التكرار. ليكن $n_1, n_2, \dots, n_k$ هو تكرار العناصر $a_1, a_2, \dots, a_k$ على الترتيب. اذا عدد طرق ترتيب المجموعة A هو

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

مثال 4

كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة "رياضيات" ؟

الحل

نلاحظ أن تكوين الكلمة يتم عن طريق ترتيب الحروف . بحيث مجموعة الحروف التي يتم استعمالها هو 7 حروف مع التكرار في حين عدد حروف كلمة "رياضيات" بدون احتساب التكرار هو 5 اذا بتطبيق القانون السابق نجد عدد الكلمات التي يمكن تكوينها هو :

$$P_7^{1,2,2,1,1} = \frac{7!}{1 \times 2! \times 2! \times 1! \times 1!} = 420,$$

بحيث

- 1 هو تكرار حرف "ر".
- 2 هو تكرار حرف "ي".
- 2 هو تكرار حرف "ا".
- 1 هو تكرار حرف "ت".

3. التبديلة الدائرية لمجموعة مختلفة العناصر: ان الترتيب الدائري لعناصر مجموعة مختلفة مثنى مثنى يخضع للقانون التالي:

$$P_n^n = (n - 1)!.$$

مثال 5

بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 أشخاص على طاولة مستديرة الشكل ؟

الحل

عدد الطرق لجلوس الأشخاص هو

$$P_5^5 = 4! = 24.$$

3.1 الترتيبية "Arrangement"

الترتيبية A_n^k هي عدد طرق اختيار مجموعة جزئية عدد عناصرها k من المجموعة الكلية A التي تضم n عنصر مع مراعاة الترتيب. و هناك نوعان :

1. الترتيبية مع التكرار: هي اختيار أو سحب عنصر ما من المجموعة A و ارجاعه اليها مما يسمح باعادة اختياره و بذلك تحسب بالقانون التالي:

$$A_n^k = n^k.$$

مثال 6

لتكن لدينا مجموعة الحروف التالية

$$A = \{a, b, c, e\}.$$

ما هو عدد الكلمات المكونة من ثلاث أحرف و التي يمكن تشكيلها انطلاقا من حروف المجموعة A مع امكانية اعادة الحرف في الكلمة أكثر من مرة. الحل
تشكيل كلمة مكونة من ثلاث أحرف انطلاقا من حروف المجموعة A يعود الى اختيار ثلاث حروف من أصل 4 مع امكانية تكرار الحرف كما أنَّ ترتيب الحروف مهم جدًا اذن عدد الكلمات يعود الى الترتيبية مع التكرار و منه عدد الكلمات هو

$$A_4^3 = 4^3 = 64.$$

2. الترتيبية بدون تكرار: هي إختيار أو سحب عنصر ما من المجموعة A دون إرجاعه إليها و تحسب بالقانون التالي:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

مثال 7

لتكن لدينا مجموعة الحروف التالية

$$A = \{a, b, c\}.$$

ما هو عدد الكلمات المكونة من حرفين و التي يمكن تشكيلها انطلاقا من حروف المجموعة A دون تكرار الحرف في الكلمة المشكلة. الحل
تشكيل كلمة مكونة من حرفين انطلاقا من حروف المجموعة A دون تكرار الحرف يعود الى اختيار حرفين من أصل 3 دون تكرار الحرف اذن عدد الكلمات يعود الى الترتيبية بدون تكرار و منه عدد الكلمات هو

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$$

4.1 التوفيقات "Combinaison"

التوفيقية هي عدد طرق سحب أو اختيار k عنصر من بين n عنصر دون مراعاة الترتيب. أي هي عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعة جزئية من مجموعة كلية دون مراعاة الترتيب. وهناك نوعان

1. التوفيقية بدون تكرار: في هذه الحالة اختيار العنصر يكون مرة واحدة فقط و هو ما يمكن التعبير عنه كذلك بعملية السحب دون ارجاع . و بذلك عدد الطرق المتاحة لاختيار مجموعة مكونة من k عنصر من بين n عنصر دون مراعاة الترتيب و بدون تكرار هو :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

مثال 8

تم وضع أربع كريات بألوان مختلفة : الأحمر، الأخضر، الأزرق و الأبيض . قمنا بسحب كرتين معا دون ارجاع. كم عدد المجموعات التي يمكن الحصول عليها ؟.

الحل

نحن بصدد سحب كرتين من أصل 4 دون ارجاع. و منه عدد الطرق هو

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

2. التوفيقية مع التكرار: في هذه الحالة يكون سحب العنصر مع إرجاعه الى المجموعة الكلية دون مراعاة الترتيب. و بذلك عدد الطرق المتاحة لاختيار مجموعة مكونة من k عنصر من بين n عنصر مع التكرار هو

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

مثال 9

باعتماد نفس المثال السابق ، لكن مع السحب بارجاع كم عدد المجموعات التي يمكن الحصول عليها ؟.

الحل

. نحن بصدد سحب كرتين من أصل 4 مع الارجاع. و منه عدد الطرق هو

$$C_{4+2-1}^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

5.1 دستور ثنائي الحد لنيوتن Newton's binomial

تعريف 1

ليكن a و b عددين حقيقيين و ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . اذن دستور ثنائي الحد لنيوتن يعطى بالعلاقة التالية:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

مثال 10

1. أحسب $(2x + 1)^3$ باستعمال دستور ثنائي الحد لنيوتن .

2. لتكن لدينا الدالة $f : x \mapsto (1 + x)^n$ احسب المجموع $\sum_{k=0}^n C_n^k$.

الحل

1. بالتطبيق المباشر لدستور ثنائي الحد، لدينا:

$$\begin{aligned}
 (2x + 1)^3 &= \sum_{k=0}^3 C_n^k (2x)^{n-k} 1^k \\
 &= \sum_{k=0}^3 C_n^k (2x)^{n-k} \\
 &= C_3^0 (2x)^3 + C_3^1 (2x)^2 + C_3^2 (2x)^1 + C_3^3 (2x)^0 \\
 &= \frac{3!}{3!0!} 8x^3 + \frac{3!}{2!1!} 4x^2 + \frac{3!}{1!2!} 2x + \frac{3!}{0!3!} \\
 &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1.
 \end{aligned}$$

2. حسب دستور ثنائي الحد، لدينا:

$$\begin{aligned}
 (1 + x)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k 1^{n-k} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.
 \end{aligned}$$

حتى يكون $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k$ يجب أن يكون $x = 1$ وبالتالي يكون لدينا من جهة :

$$f(1) = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

من جهة أخرى لدينا $f(1) = 2^n$. إذن

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

6.1 تمارين مقترحة

التمرين الأول:

أراد بائع إنشاء كلمة سر خاصة بصندوق مجوهرات حيث تتكون هذه الكلمة من أربعة أرقام. ما هو عدد الكلمات التي يمكن انشاؤها و المكونة من:

1. أربعة أرقام بدون تكرار.
2. ثلاثة أرقام مع التكرار.
3. خمسة أرقام بدون تكرار و مع التكرار.

التمرين الثاني:

يتألف المجلس العلمي للكلية من 15 عضوا. و من أجل انعقاد المجلس يجب أن يبلغ عدد المجتمعين النصاب و هو 10 .

1. كم هي عدد الطرق التي يمكن أن ينعقد بها المجلس بالضبط ؟.
2. كم هي عدد الطرق التي يمكن أن ينعقد بها المجلس على الأقل ؟.

التمرين الثالث:

منحت ادارة مصنع 6 عمرات مجانية لعمالها. إذا كان عدد عمال المصنع هو 30 من بينهم 17 رجل و 13 امرأة. ما هو عدد طرق اختيار العمال في الحالات التالية:

1. اختيار على الأقل امرأة و رجلان.
2. استثناء امرأة و رجل لظروف صحية.
3. اختيار ثلاث نساء على الأكثر.

باب 2

مفاهيم عامة حول المتتاليات العددية Numerical Sequences

للمتاليات العددية أهمية بالغة في العديد من المجالات و نذكر بالخصوص الميدان الإقتصادي. لذلك سنتطرق في هذا الفصل أولاً إلى مفهوم المتتاليات العددية، خصائصها، أنواعها ونهاياتها ثم سنقدم أمثلة عن تطبيقات المتتاليات في المجال الاقتصادي.

1.2 تعاريف عامة حول المتتاليات

تعريف 2

نسمي متتالية عددية كل تطبيق u من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. عادة ما نستعمل الرمز $(u_n)_n$ أو (u_n) بدلا من :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow u(n). \end{aligned}$$

يسمى u_n الحد العام للمتتالية .

تعريف 3

ليكن f تابعاً عددياً. نقول أن متتالية $(u_n)_n$ حدها الأول u_0 معرفة بعلاقة تراجعية إذا كانت معرفة كمايلي:

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.1.2 خواص المتتاليات

في هذه الفقرة نذكر بالتعريف الرياضي لكل من المتتالية المحدودة ، المتتالية الرتيبة و المتتالية المتقاربة ثم نقدم مثالا شاملا عن ذلك.

تعريف 4

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية.

1. نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها متتالية محدودة من الأسفل اذا كان يوجد عدد حقيقي $m \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m .$$

2. نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها متتالية محدودة من الأعلى اذا كان يوجد عدد حقيقي $M \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M .$$

3. نقول عن المتتالية أنها محدودة اذا كانت محدودة من الأسفل و من الأعلى. أي

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

تعريف 5

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية.

1. نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها متزايدة اذا و فقط اذا كان :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n.$$

2. نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها متناقصة اذا و فقط اذا كان :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n.$$

3. نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها رتيبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

تعريف 6

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية. نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ انها **متقاربة** اذا وجد عدد حقيقي $l \in \mathbb{R}$ بحيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. بصيغة رياضية أكثر دقة نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها متقاربة اذا وجد عدد حقيقي $l \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

نظرية 1

اذا كانت $(u_n)_n$ متتالية متقاربة نحو النهاية $l \in \mathbb{R}$ فان هذه النهاية وحيدة.

البرهان:

لإثبات أن كل متتالية متقاربة نحو نهاية معينة تكون تلك النهاية وحيدة، نفرض أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهايتين مختلفتين l_1 و l_2 حيث أن $l_1 \neq l_2$.

ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو l_1 و l_2 ، فانه باستعمال التعريف لدينا:

$$\exists n_1, \forall n > n_1 : |u_n - l_1| < \varepsilon,$$

$$\exists n_2, \forall n > n_2 : |u_n - l_2| < \varepsilon.$$

اذن من أجل $n = \max(n_1, n_2)$ لدينا

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \leq 2\varepsilon$$

بما ان $|l_1 - l_2|$ أصغر من جميع القيم الصغيرة الموجبة ε فان $|l_1 - l_2| = 0$ ومنه $l_1 = l_2$.

ملاحظة 1

إذا كانت المتتالية $(u_n)_n$ ليست متقاربة فاننا نقول عنها أنها متتالية متباعدة.

نظرية 2

1. كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

2. كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

مثال 11

لتكن لدينا $(u_n)_n$ متتالية معرفة كمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5, \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{7}, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 .

2. برهن أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من الأسفل حيث: $\forall n \geq 0, u_n \geq 1$.

3. برهن أن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة.

4. بين أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة واستنتج نهايتها .

الحل
لدينا

$$\begin{cases} u_0 = 5, \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{7}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. حساب u_1 و u_2 .

$$u_1 = \frac{4u_0 + 3}{7} = \frac{23}{7}, \quad u_2 = \frac{4u_1 + 3}{7} = \frac{113}{49}.$$

2. برهان أن المتتالية محدودة من الأسفل: باستعمال تقنية البرهان بالتراجع يمكن برهان أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من الأسفل حيث:

$$\forall n \geq 0, u_n \geq 1.$$

عند $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 5 \geq 1.$$

إن $u_0 \geq 1$

نفرض أن $u_n \geq 1$ لكل $n \geq 0$ و نبرهن أن $u_{n+1} \geq 1$.
بما أن $u_n \geq 1$ حسب فرضية التراجع، فإن:

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{7} \geq \frac{4 \times 1 + 3}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

إن، $u_{n+1} \geq 1$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع نجد أن المتتالية (u_n) تحقق $u_n \geq 1$ لكل $n \geq 0$.

3. برهان أن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة. لدينا

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{7}(u_n - 1), \quad \forall n \geq 0.$$

من السؤال السابق نعلم أن

$$\forall n \geq 0, u_n \geq 1.$$

و منه

$$u_{n+1} - u_n \leq 0, \quad \forall n \geq 0.$$

إن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة.

4. المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة و محدودة من الأسفل إذن حسب النظرية 2 فهي متقاربة. بما أن النهاية وحيدة حسب النظرية 1 فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l.$$

إذن بحل المعادلة

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4u_n + 3}{7}, \\ l &= \frac{4l + 3}{7} \end{aligned}$$

نجد $l = 1$ و منه :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

2.2 المتتاليات الحسابية Arithmetic Sequences

1.2.2 مفهوم و خواص المتتالية الحسابية

تعريف 7

نقول عن متتالية $(u_n)_n$ انها متتالية حسابية اذا وجد عدد حقيقي $r \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية الحسابية.

خاصية 1

1. اذا كانت $(u_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r \in \mathbb{R}$ و حدها الأول u_0 فان الحد العام للمتتالية $(u_n)_n$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

2. ليكن p عدد حقيقي غير معدوم. اذا كان u_p حدّ المتتالية الحسابية $(u_n)_n$ ذات الأساس $r \in \mathbb{R}$ فان :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > p, u_n = u_p + (n - p)r.$$

3. اذا كان $p \in \mathbb{N}$ فإن المجموع

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n, n \in \mathbb{N}$$

يعطى بالعلاقة التالية :

$$S_n = \frac{n - p + 1}{2}(u_p + u_n).$$

البرهان:

1. بما أن $(u_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r \in \mathbb{R}$ و حدها الأول u_0 فان:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

و منه بحساب الحدود الاولى نجد:

$$u_1 = u_0 + r,$$

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r,$$

$$u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r,$$

$\vdots$

$$u_n = u_{n-1} + r = u_0 + nr.$$

2. اذا كان u_p ($p > 0$)، حدًا لمتتالية حسابية $(u_n)_n$ أساسها $r \in \mathbb{R}$ فإن:

$$u_p = u_0 + pr. \quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا :

$$u_n = u_0 + nr. \quad (2)$$

اذن بطرح العبارة (1) من (2) نجد :

$$u_n - u_p = (n - p)r \Rightarrow u_n = u_p + (n - p)r. \quad (3)$$

3. يمكن تمثيل المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n$, $\forall p < n \in \mathbb{N}$ بطريقتين :

$$S_n = u_p + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \dots + (u_n - 2r) + (u_n - r) + u_n, \quad (4)$$

و

$$S_n = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \dots + (u_p + 2r) + (u_p + r) + u_p. \quad (5)$$

بجمع (4) من (5) نجد :

$$2S_n = (u_p + u_n) + (u_p + u_n) + \dots + (u_p + u_n) = (n - p + 1)(u_p + u_n).$$

و منه ينتج :

$$S_n = \frac{(n - p + 1)}{2}(u_p + u_n).$$

خاصية 2

اذا كانت a, b و c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية فان هذه الحدود تحقق العلاقة التالية:

$$a + c = 2b.$$

البرهان:

لتكن a, b و c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية ذات الأساس r . اذن لدينا

$$b = a + r \quad (6)$$

و

$$c = b + r \Rightarrow b = c - r \quad (7)$$

بجمع (6) و (7) نجد

$$a + c = 2b.$$

2.2.2 تطبيق المتتاليات الحسابية في حالة الإدخار بفائدة بسيطة

اقتصاديا يستعمل مصطلح الإدخار بفائدة بسيطة عندما يكون مقدار الفائدة السنوية ثابتا على مدار السنوات و يتعلق بالمبلغ الابتدائي. بتعبير آخر نتكلم عن الفائدة البسيطة إذا كان المبلغ المستثمر هو M و كان المستثمر كل سنة من سنوات الإستثمار يستفيد من فائدة سنوية تقدر بالنسبة المئوية p من المبلغ الابتدائي M . في المثال الموالي نبين أن الفائدة البسيطة يمكن أن تمثل بمتتالية حسابية.

مثال 12

في سنة 2020 وضع شخص مبلغا من المال قدره 15000 أورو في بنك للاستثمار. يقدم هذا البنك فائدة بسيطة قدرها $p = 5\%$ سنويا. كم يكون بحوزة هذا الشخص في سنة $2020 + n$

الحل

نرمز للمبلغ الابتدائي بـ u_0 . و نرمز للمبلغ الذي بحوزة هذا الشخص سنة $2020 + n$ بـ u_n .
اذن نعبر أولا عن المبلغ الذي بحوزة هذا الشخص سنة 2021

$$u_1 = u_0 + p \times u_0 := u_0 + r.$$

و منه المبلغ الذي بحوزة هذا الشخص سنة 2022 هو

$$u_2 = u_1 + p \times u_0 := u_0 + 2r.$$

باتباع نفس الطريقة نجد:

$$u_3 = u_2 + p \times u_0 := u_0 + 3r,$$

⋮

$$u_n = u_{n-1} + p \times u_0 := u_0 + nr.$$

اذن الفائدة البسيطة عبارة عن متتالية حسابية أساسها $u_0 \times p := r$ و حدها الأول هو u_0 بحيث u_0 يمثل المبلغ الابتدائي و p يرمز لنسبة الفائدة .

إذن اذا كانت مدة الاستثمار هي أربع سنوات فان المبلغ الذي يكون بحوزة هذا الشخص سنة 2024 هو

$$u_4 = u_0 + 0.05u_0 := u_0 + 4 \times 750 = 18000.$$

مثال 13

أودع رجل أعمال مبلغا للاستثمار في بنك بحيث يستفيد من فائدة بسيطة تقدر بـ $p = 3\%$ لمدة 5 سنوات. بعد انقضاء هذه المدة وجد في حسابه مبلغا بقيمة 10000 دولار. ماهو المبلغ الذي قام رجل الأعمال باستثماره؟

الحل

في المثال السابق وجدنا أن الفائدة البسيطة يمكن تمثيلها بمتتالية حسابية أساسها $u_0 \times p := r$ بحيث u_0 يمثل المبلغ الابتدائي. ومنه

$$u_5 = u_0 + 5 \times 0.03 \times u_0 = 1.15u_0$$

اذن نستنتج أن المبلغ المستثمر من طرف رجل الأعمال هو

$$u_0 = \frac{u_5}{1.15} = 8695.6.$$

تمرين

قام رجل أعمال باستثمار مبلغا من المال لمدة 10 سنوات بينك يقدم فائدة بسيطة تقدر بـ p . اذا علمت أن جملة ماله في السنة الثانية كانت 10400 دج و في نهاية مدة الاستثمار كان بحوزته 12000 دج. أوجد المبلغ المستثمر و نسبة الفائدة المقدمة من طرف البنك.

الحل

نعلم مما سبق أن الفائدة البسيطة عبارة عن متتالية حسابية أساسها pu_0 بحيث $r := pu_0$ وحدها الأول هو المبلغ الابتدائي. اذن

$$u_n = u_0 + n \times pu_0.$$

و منه نجد أن

$$\begin{cases} u_2 = u_0 + 2p \times u_0 := u_0 + 2r \\ u_{10} = u_0 + 10p \times u_0 := u_0 + 10r \end{cases} \implies \begin{cases} 10400 = u_0 + 2p \times u_0 := u_0 + 2r \\ 12000 = u_0 + 10p \times u_0 := u_0 + 10r \end{cases}$$

اذن بحل جملة المعادلتين السابقتين نجد $p = 2\%$ و $u_0 = 10000$.

3.2 المتتاليات الهندسية Geometric Sequences

1.3.2 مفهوم و خواص المتتاليات الهندسية

تعريف 8

نقول عن متتالية $(u_n)_n$ أنها متتالية هندسية اذا وجد عدد حقيقي $q \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

العدد الحقيقي q يسمى **أساس** المتتالية الهندسية.

خاصية 3

1. إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q \in \mathbb{R}$ و حدها الأول u_0 فان الحد العام للمتتالية $(u_n)_n$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n.$$

2. ليكن $p > 0$ عدد طبيعي غير معدوم. اذا كان u_p حدّ المتتالية الهندسية $(u_n)_n$ ذات الأساس $q \in \mathbb{R}$ فان :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}, \quad u_p \neq 0.$$

3. إذا كان $p \in \mathbb{N}$ فإن المجموع

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

يعطى بالعلاقة التالية :

$$S_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

البرهان:

1. حسب تعريف المتتالية الهندسية لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

و منه :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times q, \\ u_2 &= u_1 \times q = u_0 \times q^2, \\ u_3 &= u_2 \times q = u_0 \times q^3, \\ &\vdots \\ u_n &= u_{n-1} \times q = u_0 \times q^n. \end{aligned}$$

2. حسب الحالة (1) لدينا

$$u_n = u_0 q^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

و منه

$$u_p = u_0 q^p. \quad (9)$$

إذا كان $u_p \neq 0$ فإنه بقسمة (9) على (8) نجد:

$$\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}, \quad u_p \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

و منه:

$$u_n = u_p q^{n-p}, \quad u_p \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

3. حساب المجموع : $\forall p < n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n$, من الحالة (2) لدينا :

$$S_n = u_p + u_p q + u_p q^2 + \dots + u_p q^{n-p}. \quad (12)$$

إن بضرب طرفي المعادلة (12) في q نجد :

$$qS_n = qu_p + u_p q^2 + u_p q^3 + \dots + u_p q^{n-p+1}. \quad (13)$$

اذن بطرح العبارة (13) من (12) نجد :

$$(1 - q)S_n = u_p(1 - q^{n-p+1}), \quad (14)$$

و منه ينتج :

$$S_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{(1 - q)}.$$

خاصية 4

إذا كانت a, b, c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن هذه الحدود تحقق العلاقة التالية :

$$a.c = b^2.$$

البرهان:

لتكن a, b, c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية ذات الأساس q . إذن لدينا

$$b = qa \Rightarrow q = \frac{b}{a} \quad (15)$$

و

$$c = qb \Rightarrow q = \frac{c}{b} \quad (16)$$

بمطابقة (15) و (16) نجد

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow a.c = b^2.$$

2.3.2 تطبيق المتتاليات الهندسية في حالة الادخار بفائدة مركبة

في هذه الفقرة سننتقل إلى مصطلح الإدخار بفائدة مركبة حيث يستعمل عندما يكون مقدار الفائدة السنوية متغيراً على مدار السنوات. بتعبير آخر، نتكلم عن الفائدة المركبة إذا كان المبلغ المستثمر هو M و كان المستثمر كل سنة من سنوات الإستثمار يستفيد من فائدة سنوية تقديراً بالنسبة المئوية p من المبلغ الذي يوجد بحوزته في السنة السابقة. في المثال الموالي نبين أن الفائدة المركبة يمكن أن تمثل بمتتالية هندسية.

مثال 14

في سنة 2020 وضع شخص مبلغاً من المال قدره 15000 أورو في بنك للاستثمار. يقدم هذا البنك فائدة مركبة قدرها $p = 5\%$ سنوياً.

1. أوجد عبارة المبلغ الموجود كل سنة.

2. إذا كانت مدة الاستثمار هي n سنة أوجد الصيغة العامة للفائدة المتحصل عليها كل سنة.

الحل

نرمز للمبلغ الابتدائي بـ u_0 . و نرمز للمبلغ الذي بحوزة هذا الشخص سنة $2020 + n$ بـ u_n .

1. نعتبر أولاً عن المبلغ الذي بحوزة هذا الشخص سنة 2021

$$u_1 = u_0 + p \times u_0 = (1 + p)u_0.$$

و منه المبلغ الذي بحوزة هذا الشخص سنة 2022 هو:

$$u_2 = u_1 + p \times u_1 = (1 + p)u_1 = (1 + p)^2 u_0.$$

بإتباع نفس الطريقة نجد:

$$u_3 = u_2 + p \times u_2 = (1 + p)^3 u_0,$$

$\vdots$

$$u_n = u_{n-1} + p \times u_{n-1} := (1 + p)^n u_0.$$

اذن نستنتج أن الفائدة المركبة عبارة عن متتالية هندسية أساسها $q := (1 + p)$ و حدها الأول هو u_0 بحيث u_0 يمثل المبلغ الابتدائي و p يرمز لنسبة الفائدة .

2. نرمز للفائدة التي يتحصل عليها هذا الشخص سنة $2020 + n$ بالمتتالية v_n ذات الحد الاول v_1 الذي يحسب كالتالي:

$$v_1 = p \times u_0.$$

و منه الفائدة التي يتحصل عليها هذا الشخص سنة 2022 هي:

$$v_2 = p \times u_1 = p(1 + p)u_0 = (1 + p)v_1.$$

باتباع نفس الطريقة نجد :

$$v_3 = p \times u_2 = p(1 + p)^2 u_0 = (1 + p)^2 v_1,$$

$\vdots$

$$v_n = p \times u_{n-1} = p(1 + p)^{n-1} u_0 := (1 + p)^{n-1} v_1.$$

إن نستنتج أن الفائدة المتراكمة بالنسبة للفائدة المركبة عبارة عن متتالية هندسية أساسها $q := (1 + p)$ و حدها الأول هو $v_1 = p \times u_0$ بحيث u_0 يمثل المبلغ الابتدائي و p يرمز لنسبة الفائدة .

تمرين

في سنة 2020 قام شخص باستثمار مبلغا من المال في بنك بحيث يستفيد من فائدة مركبة قدرها $p = 3\%$ سنويا. بعد مدة خمس سنوات كان في حسابه مبلغ يقدر بـ 10000 دولار. ما هو المبلغ الذي قام هذا الشخص باستثماره ؟

الحل

مما سبق نعلم أنه يمكن تمثيل الفائدة السنوية بمتتالية هندسية $(u_n)_n$ أساسها $(1 + p)$ وحدها الأول هو المبلغ الابتدائي u_0 . اذن المبلغ الذي يكون في حساب الشخص بعد مدة خمس سنوات هو الحد السادس u_5 للمتتالية الهندسية . و منه باستخدام عبارة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا:

$$u_5 = u_0(1 + p)^5.$$

مما يستلزم أن

$$u_0 = \frac{u_5}{(1.03)^5} = 8626.08.$$

اذن المبلغ المستثمر من طرف هذا الشخص هو 8626 دولار.

تمرين

تحصل مستثمر على فائدة اجمالية تقدر بـ 1500 أورو نتيجة وضعه لمبلغ من المال قدره 10000 أورو في بنك يقدم فائدة مركبة.

إذا علمت أن مدة الاستثمار هي 4 سنوات. أوجد نسبة الفائدة المقدمة من طرف البنك.
الحل

من المثال 14 وجدنا أن الفائدة المركبة المتحصل عليها كل سنة يمكن التعبير عنها بمتتالية هندسية $(v_n)_n$ أساسها $(1 + p)$ وحدها الأول هو المبلغ الابتدائي $v_1 = pu_0$ بحيث u_0 هو المبلغ المودع في البنك.

اذن بما أن الفائدة الاجمالية لمدة 4 سنوات هي عبارة عن مجموع الفوائد المتحصل عليها كل سنة فان يمكن التعبير عنها بمجموع الأربع حدود الأولى للمتتالية الهندسية (v_n) ، أي:

$$S_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1500.$$

من جهة أخرى نعلم أن مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعطى بالعلاقة

$$S_n = v_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

ومنه بالتعويض نجد

$$1500 = pu_0 \frac{(1 + p)^4 - 1}{p} = u_0((1 + p)^4 - 1).$$

مما يستلزم أن

$$1 + p = \sqrt[4]{1.15} = 1.035.$$

اذن الفائدة السنوية المقدمة من طرف البنك تقدر بـ 3.5%.

4.2 تمارين مقترحة

التمرين الأول: لتكن لدينا $(u_n)_n$ متتالية معرفة كمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{3}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 .
2. برهن أن المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من الأعلى حيث: $\forall n \geq 0, u_n \leq 3$.
3. برهن أن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة.
4. بين أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة واستنتج نهايتها.

التمرين الثاني: لتكن لدينا $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين معرفتين كمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_n = \frac{2u_{n-1} - 3}{4 - u_{n-1}}, \quad \forall n \geq 1, \quad v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. برهن أن المتتالية $(v_n)_n$ متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول.
 2. أوجد عبارة u_n بدلالة n .
- التمرين الثالث: أراد شخص استثمار مبلغ يقدر بـ 2000 أورو ببنك حيث اقترح عليه عرضين من طرف بنكين A و B .

1. اقترح البنك A فائدة بسيطة سنوية تقدر بـ 5% من المبلغ المستثمر.
(أ) إذا وضعنا $u_0 = 2000$ أوجد u_1 و الذي هو المبلغ الموجود بعد سنة.
(ب) أوجد العلاقة بين u_n و u_{n+1} ثم استنتج طبيعة المتتالية (u_n) .
2. اقترح البنك B فائدة مركبة سنوية تقدر بـ 3% من المبلغ المستثمر.
(أ) إذا وضعنا $v_0 = 2000$ أوجد v_1 و الذي هو المبلغ الموجود بعد سنة.
(ب) أوجد العلاقة بين v_n و v_{n+1} ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) .
3. اذا كانت مدة الإستثمار هي 6 سنوات، ما هو البنك الذي يفترض أن يقبل المستثمر عرضه؟

الفصل 3

الدوال اللوغاريتمية و الأسية Logarithmic and Exponential functions

تعريف 9

نسمي دالة كل علاقة f تربط بين عنصر من مجموعة $\mathbb{R} \supseteq D$ بعنصر وحيد من المجموعة F محتواة في $\mathbb{R}$ بحيث D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .
نعبر رياضيا عن دالة f معرفة على مجموعة $\mathbb{R} \supseteq D$ بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow F \subset \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x). \end{aligned}$$

$f(x)$ تسمى صورة x بواسطة الدالة f .

مجموعة تعريف الدالة مع تطبيقات لبعض أشكال الدوال

تعريف 10

مجموعة تعريف الدالة f هي جميع قيم $x \in \mathbb{R}$ التي من أجلها يمكن الحصول على الصورة $f(x) \in \mathbb{R}$. بصيغة رياضية :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \setminus \exists y \in \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

فيما يلي نذكر مجموعات التعريف لبعض الدوال المألوفة.

1. الدالة كثير حدود معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
2. الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(x \geq 0)$.
3. الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية غير المعدومة $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.3 عموميات على الدوال

لا يمكن الخوض في مجال الدوال بدون التطرق الى مفهوم النهايات و الاستمرار، حيث في هذه الفقرة سنذكر بإيجاز أهم التعريفات و المفاهيم .

1.1.3 النهايات والاستمرار

مفهوم النهاية المنتهية عند نقطة

تعريف 11

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال تعريفها $D_f \subseteq \mathbb{R}$ و ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$. نقول أن الدالة f تؤول نحو القيمة $l \in \mathbb{R}$ عندما يؤول x الى x_0 اذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

في هذه الحالة نقول أن l هي نهاية الدالة f لما x يؤول الى x_0

خاصية 5

اذا وجدت نهاية $l \in \mathbb{R}$ للدالة f عند النقطة x_0 فان هذه النهاية وحيدة.

البرهان

نفرض أن الدالة f لها نهايتين مختلفتين عند النقطة x_0 . أي نفرض أن:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2, \quad l_1 \neq l_2$$

ليكن $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$, من تعريف النهاية، إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ فهذا يعني أنه:

$$\exists \delta_1 > 0, |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - l_1| < \varepsilon.$$

وبالمثل، إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ فهذا يعني أنه:

$$\exists \delta_2 > 0, |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

نضع $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. ليكن $x \in D_f$ بحيث $|x - x_0| < \delta$ ، إذن:

$$|f(x) - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{3} \quad \text{و} \quad |f(x) - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{3}.$$

و منه

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \leq 2\varepsilon.$$

وبذلك نحصل على:

$$|l_1 - l_2| \leq \frac{2|l_1 - l_2|}{3}.$$

لكن هذا يؤدي إلى تناقض لأن

$$|l_1 - l_2| > \frac{2|l_1 - l_2|}{3}.$$

إذن، لا يمكن أن تكون النهايتان l_1 و l_2 مختلفتين. وبذلك، إذا كانت النهاية موجودة، فهي وحيدة.

مثال 15

لتكن الدالة $x^2 = f(x) \mapsto x$. برهن باستعمال التعريف أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

الحل

لنبحث عن $\eta(\varepsilon)$ بحيث:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 0| < \eta \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f : |x| < \eta \Rightarrow |x^2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

تعريف 12

نقول أن الدالة f تقبل نهاية $l \in \mathbb{R}$ عند يمين النقطة x_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f : 0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \text{ أو } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$$

تعريف 13

نقول أن الدالة f تقبل نهاية $l \in \mathbb{R}$ عند يسار النقطة x_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f : -\eta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \text{ أو } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$$

مفهوم النهاية غير المنتهية عند نقطة

تعريف 14

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $D_f \subseteq \mathbb{R}$ وليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث x_0 نقطة قريبة جدا من D_f (بجوار D_f).

1. نقول أن الدالة f تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى x_0 إذا تحقق :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$

ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

2. نقول أن الدالة f تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى x_0 إذا تحقق :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -A.$$

ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

مفهوم النهاية المنتهية عند $\pm\infty$

تعريف 15

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $D_f \subseteq \mathbb{R}$ بحيث يوجد عدد حقيقي a و $[a, +\infty[\subset D_f$.
نقول أن الدالة f تؤول إلى $l \in \mathbb{R}$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ اذا تحقق :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > a, \forall x \in D_f : x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

تعريف 16

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $D_f \subseteq \mathbb{R}$ بحيث يوجد عدد حقيقي a و $] -\infty, a] \subset D_f$.
نقول أن الدالة f تؤول إلى $l \in \mathbb{R}$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ اذا تحقق :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B < a, \forall x \in D_f : x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

ملاحظة 2

نقوم باستعمال التعاريف الرياضية السابقة للنهايات عادة في التمارين النظرية لكن في التطبيقات عادة ما نستعمل النهايات الشهيرة و طرق حساب النهايات.

عمليات على النهايات

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على $D \subseteq \mathbb{R}$: اذن لدينا

1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), x_0 \in [-\infty, +\infty].$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \bar{x} \in [-\infty, +\infty].$$

.4

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

ملاحظة 3

في حالة الحصول على $+\infty - \infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ أو $\pm\infty \times 0$ فإنها تعتبر حالة عدم التعيين مما لا يسمح باستنتاج النهاية الا بعد القيام بالتبسيط و هذا ما يعرف بإزالة حالة عدم التعيين.

الاستمرار

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ و لتكن x_0 نقطة من المجال I .

تعريف 17

نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 اذا كانت العبارة $f(x)$ تقبل نهاية عند النقطة x_0 وكانت هذه النهاية تساوي صورة x_0 بواسطة الدالة f . بصيغة رياضية نكتب:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

تعريف 18

• نقول أن الدالة f مستمرة عن يمين النقطة x_0 اذا كانت :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

• نقول أن الدالة f مستمرة عن يسار النقطة x_0 اذا كانت :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0).$$

• تكون الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 اذا كانت مستمرة عن يمين و عن يسار x_0 : أي

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0).$$

مثال 16

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{إذا كان } x < 1, \\ 4x - 1, & \text{إذا كان } x \geq 1, \end{cases}$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (4x - 1) = 3$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

و منه النهاية عند $x_0 = 1$ موجودة، زيادة على ذلك

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1),$$

اذن فالدالة مستمرة عند $x_0 = 1$.

2.1.3 تذكير ببعض الدوال المألوفة

من بين الدوال المألوفة و التي تم دراستها في مناهج البكالوريا الدالة الأسية ذات الأساس e و الدالة اللوغاريتمية النيبيرية. لذلك في هذه الفقرة سنقوم بالتذكير بتعريف و خصائص هاتين الدالتين.

الدالة الأسية e^x

الدالة الأسية ذات الأساس e هي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية الى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما. أي

:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longrightarrow f(x) := e^x, \end{aligned}$$

وهي الدالة الوحيدة التي تحقق

$$f'(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(0) = 1.$$

من خصائص هذه الدالة كذلك أنها دالة متزايدة و موجبة تماما، اضافة الى الخصائص الحسابية التالية :

$$1. \quad e^1 = e \quad \text{و} \quad e^0 = 1.$$

$$2. \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x e^y.$$

$$3. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

$$4. \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

$$5. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (e^x)^n = e^{nx}.$$

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln x$

ليكن a عدد حقيقي موجب تماما. نسمي اللوغاريتم النيبيري للعدد a الحل الوحيد للمعادلة

$$e^x = a.$$

نرمز لهذا الحل بـ: $\ln a$.

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ هي الدالة المعرفة كمايلي:

$$\begin{aligned} \ln :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \ln x, \end{aligned}$$

من خصائص هذه الدالة أنها دالة مستمرة، متزايدة و قابلة للاشتقاق حيث أن

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

نذكر كذلك بعض الخصائص الحسابية التالية :

$$1. \ln e = 1 \text{ و } \ln(1) = 0.$$

$$2. \forall x, y \in \mathbb{R}_+, \ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R}_+, \ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

$$4. \forall x, y \in \mathbb{R}_+, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$$

$$5. \forall x, a \in \mathbb{R}_+, \ln x^a = a \ln x.$$

بعض النهايات الشهيرة

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ , } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \text{ , } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \text{ , } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$4. \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \text{ , } \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0.$$

2.3 الدالة اللوغاريتمية وخصائصها الحسابية و التحليلية

تعريف 19

ليكن a عدد حقيقي موجب تماما بحيث $a \neq 1$ ، و ليكن $x \in]0, +\infty[$. نسمي الدالة المعرفة بالصيغة :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a},$$

بالدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a .

خصائص الدالة اللوغاريتمية

في هذه الفقرة سنتطرق لأهم خصائص الدالة اللوغاريتمية $\log_a(x)$ و التي تشترك مع اللوغريتم النيبيري في البعض منها.

خاصية 6

$$\forall a, b \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \forall x \in]0, +\infty[, \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}. \quad .1$$

$$\forall a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \forall x, y \in]0, +\infty[, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y). \quad .2$$

$$\forall a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \forall x, y \in]0, +\infty[, \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y). \quad .3$$

$$\forall a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \forall x, y \in]0, +\infty[, \log_a(x^y) = y \log_a(x). \quad .4$$

البرهان 1

$$.1 \text{ ليكن } a, b \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\text{ و ليكن } x \in]0, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \log_a(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \\ &= \frac{\ln(x) \ln(b)}{\ln(b) \ln(a)} \\ &= \log_b(x) \frac{1}{\log_b(a)} = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}. \end{aligned}$$

$$.2 \text{ ليكن } a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\text{ و ليكن } x, y \in]0, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} \\ &= \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y). \end{aligned}$$

$$.3 \text{ ليكن } a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\text{ و ليكن } x, y \in]0, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{\ln(a)} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(y)}{\ln(a)} \\ &= \log_a(x) - \log_a(y). \end{aligned}$$

$$.4 \text{ ليكن } a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\text{ و ليكن } x, y \in]0, +\infty[$$

$$\log_a(x^y) = \frac{\ln(x^y)}{\ln(a)} = \frac{y \ln(x)}{\ln(a)} = y \log_a(x).$$

3.3 حل المعادلات و المتراجحات اللوغاريتمية

تعريف 20

المعادلة (المتراجحة) اللوغاريتمية هي معادلة (متراجحة) تتضمن حداً حيث يكون المتغير يظهر داخل اللوغاريتم.

لحل معادلة أو متراجحة لوغاريتمية عادة ما نتبع الخطوات التالية:

1. نعزل اللوغاريتم في جهة،
2. إذا كان ممكناً، نكتب طرفي المعادلة أو المتراجحة على شكل لوغاريتم لنفس الأساس ثم نقوم بالمطابقة،
- و إلا نبسط طرفي المعادلة أو المتراجحة باستعمال خواص اللوغاريتم ثم نقوم باعادة كتابتها على شكل معادلة أسية مكافئة .

مثال 17

حل المعادلات و المتراجحات اللوغاريتمية التالية:

1. $\log_3(x + 4) - 1 > 2$
2. $1 + 2 \log_4(x + 1) = 2 \log_2(x)$
3. $\ln(x^4 - 1) = 0$
4. $(\log_2(x))^2 < 2 \log_2 x + 3$

الحل

$$1. \log_3(x + 4) - 1 > 2$$

لدينا

$$\log_3(x + 4) - 1 > 2 \Leftrightarrow \log_3(x + 4) > \log_3(9)$$

و منه نستنتج أن

$$\log_3(x + 4) - 1 > 2 \Leftrightarrow x + 4 > 9,$$

أي

$$\log_3(x + 4) - 1 > 2 \Leftrightarrow x > 5.$$

$$2. 1 + 2 \log_4(x + 1) = 2 \log_2 x$$

أولاً نلاحظ أن الدالة $\log_4(x + 1) \mapsto x$ معرفة إذا كان $x > -1$ و الدالة $\log_2(x) \mapsto x$ معرفة إذا كان $x > 0$. و منه مجموعة حلول المتراجحة اللوغاريتمية $\log_4(x + 1) > 2 \log_2 x$ يجب أن تكون تنتمي الى المجال $[0, \infty[$.

الآن نعود للبحث عن حلول المعادلة. بتطبيق خواص حساب الدالة اللوغاريتمية نجد

$$\begin{aligned} 1 + 2 \log_4(x + 1) = 2 \log_2 x &\Leftrightarrow 1 + \log_2(x + 1) = \log_2 x^2 \\ &\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x + 1}{x^2}\right) = -1 \end{aligned}$$

من جهة أخرى نعلم أن

$$-\log_2(2) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right),$$

و عليه نجد أن:

$$1 + 2\log_4(x+1) = 2\log_2 x \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

اذن يكفي حل المعادلة

$$x^2 - 2x - 2 = 0. \quad (1)$$

بحساب المميز، نجد أن المعادلة تقبل حلين مختلفين $x_1 = 1 + \sqrt{3} > 0$ و $x_2 = 1 - \sqrt{3} < 0$ و منه نستنتج أنه يوجد حل وحيد للمعادلة اللوغاريتمية

$$1 + 2\log_4(x+1) = 2\log_2 x$$

و هو $x_1 = 1 + \sqrt{3} > 0$ لأن $x_2 = 1 - \sqrt{3} < 0$ حل مرفوض كونه عدد سالب و قد برهنا في البداية أن الحل يجب أن يكون موجب تماما.

$$3. \ln(x^4 - 1) = 0$$

أولا نلاحظ أن مجال تعريف الدالة $x \mapsto \ln(x^4 - 1)$ هو $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
الآن بتبسيط كتابة المتراحة السابقة نجد

$$\begin{aligned} x^4 - 1 = 1 &\Leftrightarrow x^4 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{2} \vee x = -\sqrt[4]{2}. \end{aligned}$$

و منه مجموعة الحلول هي:

$$S = \{\pm \sqrt[4]{2}\}.$$

$$4. (\log_2(x))^2 < 2\log_2(x) + 3$$

أولا نلاحظ أن مجال تعريف الدالة $x \mapsto \log_2(x)$ هو المجال المفتوح $]0, +\infty[$. الآن بوضع $t = \log_2(x)$ ، نجد

$$\begin{aligned} (\log_2(x))^2 < 2\log_2 x + 3 &\Leftrightarrow t^2 < 2t + 3 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 < 0. \end{aligned}$$

المتراحة $t^2 - 2t - 3 < 0$ تقبل حلول في المجال $] -1, 3[$ و منه

$$\begin{aligned} t^2 - 2t - 3 < 0 &\Leftrightarrow -1 < t < 3 \\ &\Leftrightarrow -1 < \log_2(x) < 3 \\ &\Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{2} < \log_2(x) < \log_2 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 8. \end{aligned}$$

منه مجموعة الحلول هي: $S =]\frac{1}{2}, 8[$.

4.3 الدالة الأسية وخصائصها الحسابية و التحليلية

تعريف 21

ليكن a عدد حقيقي موجب تماما بحيث أن $a \neq 1$ ، و ليكن $x \in \mathbb{R}$. نسمي الدالة المعرفة بالصيغة :

$$f(x) = a^x,$$

بالدالة الأسية ذات الأساس a . يمكن كتابة الدالة باستعمال اللوغاريتم النيبيري على الشكل :

$$f(x) = e^{x \ln a}. \quad (2)$$

ملاحظة 4

• في تعريف الدالة أقصينا $a = 1$ و $a = 0$ لأنه ببساطة سنتحصل على الدالة الثابتة $f \equiv 1$ اذا كان $a = 1$ و الدالة الصفرية $f \equiv 0$ اذا كان $a = 0$.

• فرضنا كذلك أن $a > 0$ لأنه اذا كان $a < 0$ ، و $x = \frac{1}{2n}$ بحيث n عدد طبيعي غير معدوم فان $a^x = \sqrt[2n]{a} \notin \mathbb{R}$ و منه الدالة ذات العبارة $f(x) = a^x$ ليست دائما معرفة.

1.4.3 خواص الدالة الأسية

في مايلي نعطي أهم خصائص الدالة الأسية التي تستعمل عادة في حل المعادلات و المترجمات الأسية.

خاصية 7

$$1. \forall x, y \in \mathbb{R}, a^x a^y = a^{x+y}.$$

$$2. \text{ اذا كان } a^x = a^y \text{ فان هذا يكافئ أن } x = y.$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : a^x = a^y \Leftrightarrow x = y.$$

$$3. \text{ اذا كان } a^x \leq a^y, \text{ فاننا نميز حالتين:}$$

$$a^x \leq a^y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y, & \text{اذا } a \geq 1 \\ x \geq y, & \text{اذا } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

5.3 حل المعادلات و المترجمات الأسية

تعريف 22

المعادلة (أو المترجمة) التي تتضمن حدًا أين يكون المتغير يظهر على شكل أس لعدد حقيقي تسمى معادلة أسية (مترجمة أسية).

لحل معادلة أو مترجمة أسية عادة ما نتبع الخطوات التالية :

1. نزل الأسية في جهة،

2. • إذا كان ذلك مناسبًا ، نكتب طرفي المعادلة أو المتراجحة بأساس مشترك (شكل أسّي لنفس العدد) و مطابقة الأسس،
• و إلا نقوم بتطبيق اللوغاريتم من الطرفين ونستعمل الخواص.

مثال 18

حل المعادلات و المتراجحات الأسية التالية:

$$1. 2^{x^2-3x} - 16 > 0$$

$$2. 2^x = 129$$

$$3. \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5$$

$$4. 4\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} + 15 > 27$$

الحل

$$1. 2^{x^2-3x} - 16 > 0$$

باتباع الخطوات السابقة، نقوم أولاً بعزل الاسية

$$2^{x^2-3x} > 16, \quad (3)$$

ثم نكتب الطرفين على شكل أسّي لنفس الأساس 2

$$2^{x^2-3x} > 2^4,$$

حسب الخاصية 7 نجد أن

$$x^2 - 3x > 4.$$

أي

$$x^2 - 3x - 4 > 0.$$

اذن حل المتراجحة (3) يؤول الى حل المتراجحة

$$x^2 - 3x - 4 > 0,$$

و منه نستنتج أن حلول المتراجحة (3) هي

$$S =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[.$$

$$2. 2^x = 129$$

نلاحظ انه لا يمكن كتابة العدد 129 على شكل 2^a . إذن

$$2^x = 129 \Leftrightarrow \log_2(2^x) = \log_2(129),$$

و منه نستنتج أن

$$2^x = 129 \Leftrightarrow x = \log_2(129).$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5 \quad .3$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 10$$

بضرب طرفي المعادلة في e^x نجد:

$$e^{2x} - 1 = 10e^x$$

أي

$$e^{2x} - 10e^x - 1 = 0.$$

بإستعمال تبديل المتغير

نضع $t = e^x$ فنجد

$$t^2 - 10t - 1 = 0.$$

هذه المعادلة تقبل حلين مختلفين

$$t_1 = 5 + \sqrt{26} > 0, \text{ و } t_2 = 5 - \sqrt{26} < 0.$$

بما أن الدالة الأسية ذات الأساس e موجبة تماما فاننا نقبل فقط الحل $e^x = t_1$. و منه

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5 + \sqrt{26}).$$

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} + 15 > 27 \quad .4$$

نلاحظ أن

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} + 15 > 27 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} > 3 \\ &\Leftrightarrow 3^{x-2} > 3 \\ &\Leftrightarrow (x-2)\ln(3) > \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x > 3. \end{aligned}$$

و منه مجموعة الحلول هي :

$$S = \{x : x > 3\} =]3, \infty[.$$

6.3 تمارين مقترحة

التمرين الأول: أحسب النهايات التالية إن وجدت:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{1 - x^7}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x^2 - 4}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

التمرين الثاني: لدينا f دالة معرفة كمايلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{إذا كان } x < 1, \\ 3x^3, & \text{إذا كان } x \geq 1 \end{cases}$$

1. أوجد مجموعة تعريف الدالة f .

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند النقطة $x_0 = 1$ ؟

3. هل الدالة f مستمرة عند النقطة $x_0 = 1$ ؟

التمرين الثالث: حل المعادلات و المتراجحات التالية:

$$1. \log_6(x+7) - 1 > 2$$

$$2. 2\log_4(x+1) = 2\log_2 x$$

$$3. e^{2x-3} - 2 \geq 0$$

$$4. 3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$$

الفصل 4

الإشتقاق Derivatives

1.4 مفهوم الاشتقاق

تعريف 23

لتكن f دالة معرفة من المجال المفتوح I نحو $\mathbb{R}$ و لتكن x_0 نقطة من المجال I . نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي $l \in \mathbb{R}$ و كانت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \quad (1)$$

في هذه الحالة نسمي هذه النهاية بالعدد المشتق للدالة f عند النقطة x_0 و نرمز له بـ $f'(x_0)$. من جهة أخرى بوضع $x = x_0 + h$ يمكن كتابة (1) بكتابة مكافئة

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l. \quad (2)$$

تعريف 24

لتكن f دالة معرفة من المجال المفتوح I نحو $\mathbb{R}$ و لتكن x_0 نقطة من المجال I . نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند يمين النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي $l \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \quad (3)$$

في هذه الحالة نسمي هذه النهاية بالعدد المشتق من اليمين و نرمز له بـ $f'_d(x_0)$.

تعريف 25

لتكن f دالة معرفة من المجال المفتوح I نحو $\mathbb{R}$ و لتكن x_0 نقطة من المجال I . نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند يسار النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي $l \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \quad (4)$$

في هذه الحالة نسمي هذه النهاية بالعدد المشتق من اليسار و نرمز له بـ $f'_g(x_0)$.

ملاحظة 5

الدالة f تكون قابلة للاشتقاق عند x_0 اذا و فقط اذا كانت قابلة للاشتقاق عند يمين و يسار النقطة x_0 و كانت

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

مثال 19

لتكن f دالة معرفة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{إذا كان } x < 1, \\ -x^2 + 4x - 2, & \text{إذا كان } x \geq 1. \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x_0 = 1$ و لدراسة قابلية الاشتقاق نحسب المشتق من اليمين و من اليسار. لدينا

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1}^< \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1}^< x + 1 = 2 = f'_g(1), \\ \lim_{x \rightarrow 1}^> \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1}^> -x + 3 = 2 = f'_d(1). \end{cases}$$

إذن النهاية عند اليمين تساوي النهاية عند اليسار ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 1$.

نظرية 3

لتكن $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I . اذا كانت f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 فانها مستمرة عند x_0 .
البرهان

لبرهان هذه النظرية يجب اثبات أن

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

لدينا f قابلة للاشتقاق عند x_0 . إذن

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

و منه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0), \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0), \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \end{aligned}$$

و منه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

ملاحظة 6

الإستلزام العكسي عموما غير صحيح. أي اذا كانت دالة f مستمرة عند النقطة x_0 فإن ذلك لا يستلزم أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند x_0 .

مثال 20

الدالة $x \mapsto |x|$ مستمرة عند النقطة $x_0 = 0$ لكنها ليست قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة لأن $f'_g(0) = 1$ و $f'_d(0) = -1$.

2.4 قوانين الاشتقاق

عمليات على الاشتقاق

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال المفتوح I نحو $\mathbb{R}$ و قابلتين للاشتقاق عند x_0 .

1. مجموع الدالتين f و g هو دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 و العدد المشتق لهذه الدالة يحسب بالعلاقة التالية

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. جداء الدالتين f و g هو دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 و العدد المشتق لهذه الدالة يحسب بالعلاقة التالية

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. اذا كان $g(x_0) \neq 0$ فان الدالة الكسرية $\frac{f}{g}$ هي دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 و العدد المشتق لهذه الدالة يحسب بالعلاقة التالية

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

مشتق تركيب دالتين

لتكن لدينا الدالتين $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث I و J مجالين مفتوحين يحققان $f(I) \subset J$. اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 و كانت الدالة g قابلة للاشتقاق عند $f(x_0)$ فان دالة التركيب $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ هي دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 و لدينا

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

مشتق الدالة اللوغاريتمية

انطلاقا من صيغة الدالة نجد أن :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[, \quad (\log_a(x))' &= \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' \\ &= \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

مشتق الدالة الأسية

انطلاقا من الكتابة (2) في الفقرة 4.3 نجد أن :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a^x)' &= (e^{x \ln a})' \\ &= \ln(a)e^{x \ln a} = \ln(a)a^x. \end{aligned}$$

نظرية 4 "Hopital's rule"

لتكن f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على المجال المغلق $[a, b]$ و قابلتان للاشتقاق بجوار النقطة x_0 اذن، اذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

فان:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

ملاحظة 7

1. القاعدة تبقى صحيحة في حالة $x_0 = \infty$.

2. في حالة ما إذا حصلنا مجددا على $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ نطبق القاعدة مرة أخرى حتى نتحصل على النهاية.

مثال 21

احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

الحل
نعلم أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

و منه بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

تمرين
أ.حسب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}.$$

الحل

بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \frac{0}{0},$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال مرة ثانية نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

و منه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0.$$

3.4 القيم الحدية العظمى و الصغرى

للاشتقاق تطبيقات عدة في المجال الاقتصادي ونخص بالذكر التكلفة و الربح. حيث أن أهم ما يصبو اليه مدير مصنع هو جعل كمية الانتاج تتوافق مع أقل تكلفة و أقصى ربح ممكن لذلك في هذه الفقرة سنتطرق الى مفهوم القيم الحدية الصغرى و العظمى .

تعريف 26

نعرف القيم الحرجة للدالة f بمجموعة القيم $x \in D_f$ والتي تنعدم عندها المشتقة f' .
إذا كانت $f'(x_0) = 0$ فانه لدينا

1. توجد قيمة حدية عظمى للدالة f عند x_0 إذا كان $f''(x_0) < 0$.

2. توجد نقطة إنعطاف للدالة f عند x_0 إذا كان $f''(x_0) = 0$.

3. توجد قيمة حدية صغرى للدالة f عند x_0 إذا كان $f''(x_0) > 0$.

مثال 22

إذا كانت دالة التكاليف تعرف بالتابع

$$f(x) = 20000 + \frac{400}{x} + 0.01x,$$

بحيث x هو كمية الانتاج. أوجد عدد وحدات الإنتاج الذي تكون فيه التكلفة أقل ما يمكن.
الحل

بما أننا بصدد البحث عن كمية المنتج الذي يحقق لنا أقل التكاليف فهذا يعني أننا نبحث عن القيمة الحدية الصغرى لدالة التكاليف و عليه أولاً نقوم بإيجاد القيم الحرجة : أي البحث القيم x بحيث $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{400}{x^2} - 0.01 = 0,$$

هذا يستلزم أن

$$x = -200 \text{ أو } x = 200.$$

بما أن كمية الانتاج دائماً موجبة فإن $x = -200$ يعتبر حل مرفوض و منه توجد قيمة حرجة وحيدة هي $x = 200$
لتحديد نوع القيمة الحدية نحسب المشتقة الثانية عند هذه القيمة

$$f''(x) = \frac{800}{x^3} \Leftrightarrow f''(200) = \frac{800}{8000000} > 0,$$

ومنه عدد الوحدات التي يجب انتاجها لضمان أقل التكاليف هو 200 وحدة.

4.4 المشتقات المتعاقبة

لتكن $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .

- نسمي المشتقة f' بالمشتقة الأولى (من الرتبة الاولى) للدالة f .
- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على المجال I ، نرمز لمشتقة f' بـ f'' وتسمى هذه الأخيرة بالمشتقة الثانية (من الرتبة الثانية) للدالة f .
- من أجل $n \geq 2$ ، نعرف المشتق النوني $f^{(n)}$ للدالة f بمشتق الدالة المشتقة من الرتبة $n - 1$ ، أي :

$$\forall n \geq 2, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

مثال 23

أحسب المشتق الأول ، الثاني و الثالث للدالة :

$$f(x) = x^3 + 2x + 4.$$

الحل

الدالة f عبارة عن كثير حدود من الدرجة 3. إذن

$$f'(x) = 3x^2 + 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6.$$

تمرين

أحسب المشتق النوني للدالة $f(x) = e^{ax+b}$ بحيث أن $a, b \in \mathbb{R}$.

الحل

لدينا $f'(x) = ae^{ax+b}$ و منه

$$f''(x) = a^2 e^{ax+b}, \quad f^{(3)}(x) = a^3 e^{ax+b}, \quad f^{(4)}(x) = a^4 e^{ax+b},$$

نلاحظ أن المشتق النوني للدالة $f'(x) = ae^{ax+b}$ يكتب على الشكل :

$$\forall n \geq 1, \quad f^{(n)}(x) = a^n e^{ax+b} = a^n f(x).$$

للتأكد من ذلك نستعمل البرهان بالتراجع.

نسمي $P(n)$ الخاصية $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax+b}$ من أجل $n = 1$ لدينا :

$$f'(x) = a^1 e^{ax+b} = a e^{ax+b}$$

ومنه الخاصية $P(1)$ محققة . اذن حسب تقنية البرهان بالتراجع نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ لدينا

$$\forall n \geq 1, \quad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (a^n e^{ax+b})' = a^{n+1} e^{ax+b}.$$

و هو المطلوب . و منه نستنتج أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \geq 2$ ، أي

$$\forall n \geq 1, \quad f^{(n)}(x) = a^n e^{ax+b} = a^n f(x).$$

5.4 تمارين مقترحة

التمرين الأول : لدينا f دالة معرفة كمايلي:

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}.$$

1. أوجد مجموعة تعريف الدالة f .

2. أدرس قابلية الإستقاق للدالة f عند النقطة $x_0 = 1$.

التمرين الثاني : أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية ثم أحسب مشتقاتها.

$$1) f(x) = x^3 + 2x + 1, \quad 2) f(x) = \ln(4x + 1),$$

$$3) f(x) = \sqrt{-5x + 1}, \quad 4) e^{x^2 + \ln(x-3)}, \quad 5) \ln(\sqrt{x^2 + 1}).$$

التمرين الثالث : أدرس وجود القيم الحدية المحلية الكبرى و الصغرى للدوال التالية:

$$1) f(x) = 2x - 2, \quad v \quad 2) f(x) = 3x^2 + 3x - 6,$$

$$3) -2x^3 - 9x^2 - 12x - 15, \quad 4) 3x^2 - 2x - 4 \ln x.$$

التمرين الرابع : أحسب المشتق النوني لكل دالة من الدوال التالية:

$$1) f(x) = \frac{1}{ax + b}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad 2) f(x) = x^{n-1} \ln x, \quad n \geq 1.$$

$$3) f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}, \quad (c, d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

الفصل 5

الدوال الأصلية و حساب التكاملات Integrals and primitives functions

1.5 الدوال الأصلية و التكاملات المحدودة و غير المحدودة

1.1.5 تعريف عامة

تعريف 27

لتكن f دالة معرفة على مجال $[a, b]$. نقول عن دالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ أنها الدالة الأصلية للتابع f إذا كان

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

و نكتب كذلك

$$F(x) = \int f(x)dx,$$

و الذي يعرف بالتكامل غير المحدود .

ملاحظة 8

بما أن مشتق الدالة الثابتة هو عبارة عن الدالة الصفرية فإن جميع الثوابت $c \in \mathbb{R}$ هي عبارة عن دوال أصلية للدالة الصفرية. إذن انطلاقاً من ذلك نستنتج أنه إذا كانت F دالة أصلية للتابع f , فإن $F + c$ كذلك دالة أصلية للدالة f , بحيث c ثابت حقيقي. ومنه نستنتج أن الدالة الأصلية ليست وحيدة و أن جميع الدوال الأصلية للدالة f هي من الشكل $F + c$.

تعريف 28

نسمي الكمية $\int_a^b f(x)dx$, المعرفة بـ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

بالتكامل المحدود و الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين بيان الدالة f و المستقيم الذي معادلته $y = 0$ و المستقيمين $x = a$ و $x = b$.

2.1.5 خواص التكاملات

خواص التكاملات غير المحدودة

لتكن f و g دالتين حقيقيتين . اذن لدينا :

$$1. \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$2. \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3. \left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

$$4. \int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

خواص التكاملات المحدودة

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال $[a, b]$. وليكن $c \in [a, b]$. اذن لدينا :

$$1. \text{ "علاقة Chasles" } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$2. \int_c^c f(x)dx = 0$$

$$3. \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

$$4. \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$5. \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3.1.5 بعض التكاملات الشهيرة

$\int f(x)dx$	$\int f(x)dx$
$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c, & \alpha \neq -1 \\ \ln x + c, & \alpha = -1 \end{cases}$	$\int f'(x)f(x)^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}f(x)^{\alpha+1} + c & \alpha \neq -1, \\ \ln f(x) + c, & \alpha = -1. \end{cases}$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c.$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$	$\int f'(x)\cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + c$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$	$\int f'(x)\sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + c$
$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctg(x) + c.$	$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)+1}dx = \arctg(f(x)) + c$

2.5 طرق حساب التكاملات

في هذه الفقرة سنتطرق الى طريقتين جد معروفتين لتسهيل عملية حساب بعض التكاملات.

1.2.5 طريقة التكامل بالتجزئة

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]a, b[$. اذن لدينا

$$1. \int f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x)dx$$

$$2. \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

طريقة التكامل بالتجزئة ناتجة عن اشتقاق جداء دالتين.

مثال 24

أحسب التكاملات التالية باستعمال طريقة التكامل بالتجزئة:

$$1. \int \ln(x)dx$$

$$2. \int x^2 e^x dx$$

الحل

1. حساب $\int \ln(x)dx$, نضع $f'(x) = 1$ و $g(x) = \ln(x)$. اذن نستنتج أن $f(x) = x$ و $g'(x) = \frac{1}{x}$. بتطبيق التكامل بالتجزئة نجد أن

$$\begin{aligned} \int \ln(x)dx &= x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \ln(x) - x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. حساب $\int x^2 e^x dx$, نضع $f'(x) = x^2$ و $g(x) = e^x$. اذن نستنتج أن $f(x) = \frac{x^3}{3}$ و $g'(x) = e^x$. بتطبيق التكامل بالتجزئة نجد أن

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx. \end{aligned} \quad (1)$$

نقوم مرة أخرى بتطبيق التكامل بالتجزئة لحساب التكامل $\int x e^x dx$. اذن بوضع $u'(x) = e^x$ و $v(x) = x$ نجد :

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + c_2, \quad c_2 = -2c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.2.5 طريقة تبديل المتغير

عند عدم القدرة على ايجاد التكامل مباشرة أو بطريقة التكامل بالتجزئة نقوم باستعمال طريقة تبديل المتغير و التي تمر بالمراحل التالية:

1. اختيار دالة $g(t)$ قابلة للاشتقاق .

اذن بوضع $x = g(t)$ في التكامل $I = \int f(x)dx$ نجد أن $dx = g'(t)dt$ و منه بالتعويض في التكامل I نجد :

$$I = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

2. بعد ايجاد التكامل I بدلالة t نقوم مرة أخرى باستعمال المتغير $x = g(t)$ لايجاد عبارة التكامل I بدلالة x .

3. في حالة التكامل المحدود نجد

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

الهدف من استعمال هذه الطريقة هو تبسيط التكامل و تحويله الى تكامل مألوف لذلك يجب اختيار تبديل متغير $x = g(t)$ مناسب.

مثال 25

احسب التكاملات التالية باستعمال طريقة تبديل المتغير:

$$I_1 = \int \frac{1}{x + \sqrt{x}}dx, \quad I_2 = \int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}}dx.$$

الحل

أولا نحسب التكامل غير المحدود I_1 . بوضع $x = t^2$ نجد أن $dx = 2tdt$ و منه

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x + \sqrt{x}}dx &= \int \frac{1}{t^2 + t}2tdt \\ &= 2 \int \frac{1}{t + 1}dt \\ &= 2 \ln(t + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

لحساب التكامل المحدود I_2 يكفي استعمال النتيجة السابقة:

$$\begin{aligned} I_2 = \int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}}dx &= 2 \ln(\sqrt{x} + 1)|_1^4 \\ &= 2 \ln(\sqrt{4} + 1) - 2 \ln(\sqrt{1} + 1) = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

السؤال المطروح دائما في هذه الطريقة هو كيفية اختيار المتغير المناسب للتبديل !. في الحقيقة الاجابة عن هذا السؤال ليست دقيقة لأنه لا توجد طريقة معينة و عامة . ففي بعض الحالات تكون التبديلات مألوفة و كلاسيكية لكن بصرف النظر عن ذلك من الشائع أن نصادف حالات يصعب علينا تحديد التبديل المناسب ويعود ذلك لاجتهادنا الشخصي ومحاولة ايجاده.

بعض التبديلات للمتغير المألوفة

فيمايلي نرفق كل شكل من اشكال التكاملات المألوفة بالمتغير المناسب للتبديل:

$$1. \int f(x, \sqrt{x}) dx \text{ نضع } x = t^2 \text{ و } dx = 2t dt$$

$$2. \int f(e^x) dx \text{ نضع } t = e^x \text{ و } dx = \frac{dt}{t}$$

$$3. \int f(\sin(x), \cos(x)) dx \text{ نضع } t = tg(\frac{x}{2}) \text{ و } dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

مثال 26

احسب التكاملات التالية باستعمال طريقة تبديل المتغير

$$I_1 = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad I_2 = \int \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad I_3 = \int \frac{1}{\cos(x) + 1} dx.$$

الحل

1. أولاً نحسب التكامل I_1 . نضع $x = t^2$ و منه $dx = 2t dt$. بالتعويض نجد

$$I_1 = \int \frac{e^t}{t} 2t dt = 2 \int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. حساب التكامل I_2 . نضع $t = e^x$ و منه $dx = \frac{dt}{t}$. بالتعويض نجد :

$$I_2 = \int \frac{t}{t+1} \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1) + c = \ln(e^x + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. حساب التكامل I_3 نضع $t = tg(\frac{x}{2})$ و منه $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. بالتعويض نجد :

$$I_3 = \int \frac{1}{\cos(x) + 1} dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{2}{1+t^2} dt = \int 1 dt = t + c = tg(\frac{x}{2}) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3.5 تكامل الدوال الناطقة

تعريف 29

نسمي دالة ناطقة كل دالة تكتب من الشكل $\frac{P(x)}{Q(x)}$, حيث $Q(x) \not\equiv 0$ و $P(x)$ عبارة عن كثيري حدود من الدرجة n و m على التوالي. لحساب تكامل هذا النوع من الدوال نتعرف أولاً على شكلين أساسيين ثم ننتقل الى الحالة العامة.

تعريف 30

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم و لتكن α, β, a, b و c أعداد حقيقية.

1. نسمي الدالة الناطقة من الشكل

$$\frac{\alpha}{(ax+b)^n}, \quad \alpha \neq 0 \wedge a \neq 0$$

بالدالة الكسرية العادية من النمط الأول. حيث أن

$$\int \frac{\alpha}{(ax+b)^n} dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{a} \ln |ax+b| + c, & \text{إذا كان } n = 1 \\ \frac{\alpha}{a(1-n)(ax+b)^{n-1}} + c, & \text{إذا كان } n \neq 1. \end{cases}$$

2. نسمي الدالة الناطقة من الشكل

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + bx + c)^n}, \quad \alpha \neq 0 \text{ و } \Delta = b^2 - 4c < 0.$$

بالدالة الكسرية العادية من النمط الثاني. لحساب تكامل الدالة الكسرية من النمط الثاني نقوم باختيار المتغير التالي:

$$x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t - \frac{b}{2}, \quad \text{و} \quad dx = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}dt.$$

من أجل التبسيط في الكتابة و الحساب نستعمل الرموز التالية:

$$p := \sqrt{-\Delta}, \quad \text{و} \quad q := \frac{-b}{2}.$$

اذن يمكن كتابة تكامل الدالة الناطقة من الشكل الثاني بالعبارة التالية:

$$I_n = \int \frac{\alpha x + \beta}{((x-q)^2 + p^2)^n} dx.$$

و عليه يصبح المتغير

$$x = pt + q \Rightarrow dx = p dt.$$

اذن:

$$\begin{aligned} I_n &= \int p \frac{\alpha(q+pt) + \beta}{p^{2n}(1+t^2)^n} dt \\ &= p \int \frac{\alpha q + \beta}{p^{2n} + (1+t^2)^n} dt + p \int \frac{\alpha p t}{p^{2n}(1+t^2)^n} dt \\ &= \frac{p(\alpha q + \beta)}{p^{2n}} \int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \frac{\alpha p^2}{p^{2n}} \int \frac{t}{(1+t^2)^n} dt. \end{aligned}$$

إذن يعود حساب التكامل I_n ذلك الى حساب التكاملين

$$K_n = \int \frac{t dt}{(1+t^2)^n}, \quad J_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

حساب التكامل K_n :
 باستعمال تبديل المتغير $u = 1 + t^2$ نجد :

$$K_n = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^n} du = \begin{cases} \frac{-1}{2(1-n)((1+t^2)^{n-1})} + c, & \text{اذا } n > 1, \\ \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + c & \text{اذا } n = 1. \end{cases}$$

حساب التكامل J_n :

لحساب هذا التكامل نستعمل طريقة التكامل بالتجزئة حيث نضع $f'(t) = 1$ و $g(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$.
 اذن نستنتج أن $f(t) = t$ و $g'(t) = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$.
 بتطبيق التكامل بالتجزئة نجد أن

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{(t^2+1) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} - 2n \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1} \end{aligned}$$

مما يستلزم العلاقة التراجعية التالية:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n} \left(\frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)J_n \right), \quad n \geq 1.$$

و بذلك نستنتج أن هذا النوع من التكاملات يحسب بطريقة تراجعية علما أن:

$$J_1 = \arctg(t) + c.$$

مثال 27

احسب التكامل

$$I_2 = \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx.$$

الحل

نلاحظ أن $\frac{-x+1}{x^2+x+1}$ كسر عادي من النمط الثاني ($\Delta = -3 < 0$). اذن لمكاملة هذا الكسر نجري التبديل

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}, \quad \text{و} \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt.$$

فنجد :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\right) + 1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\right) + 1} \frac{\sqrt{3}}{2} dt \\
 &= \int \frac{-t + \sqrt{3}}{t^2 + 1} dt \\
 &= -\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + \sqrt{3} \arctg(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

بما أن $x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}$ ، فإن :

$$I = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}(2x+1)^2 + 1\right) + \sqrt{3} \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}(2x+1)}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

نظرية 5

ليكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود من الدرجة n و m على التوالي حيث أن $n < m$ و

$$Q(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{n_2} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{n_l},$$

حيث أن:

$$x_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}, \quad m_i, n_j \in \mathbb{N} / i \in \{\overline{1, k}\}, \quad j \in \{\overline{1, l}\} \quad \wedge \quad \Delta_i p_i^2 - 4q_i < 0.$$

اذن الدالة الكسرية $E(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ، يمكن كتابتها على شكل مجموع منته لدوال كسرية عادية من النمط الأول و الثاني كما يلي:

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1(m_1-1)}}{(x - x_1)^{m_1-1}} + \frac{A_{1m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} \\
 &+ \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2(m_2-1)}}{(x - x_2)^{m_2-1}} + \frac{A_{2m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{2(m_k-1)}}{(x - x_k)^{m_k-1}} + \frac{A_{km_k}}{(x - x_k)^{m_k}} \\
 &+ \frac{M_{11}x + N_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{M_{21}x + N_{21}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1n_1}x + N_{1n_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1}} \\
 &+ \dots \dots \dots \\
 &+ \frac{M_{l1}x + N_{l1}}{(x^2 + p_lx + q_l)} + \frac{M_{l2}x + N_{l2}}{(x^2 + p_lx + q_l)^2} + \dots + \frac{M_{ln_l}x + N_{ln_l}}{(x^2 + p_lx + q_l)^{n_l}},
 \end{aligned}$$

حيث أن:

$$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{km_k}, M_{11}, N_{11}, M_{21}, N_{21}, \dots, M_{ln_l}, N_{ln_l} \in \mathbb{R}.$$

مثال 28

احسب التكاملات التالية:

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx, \quad I_2 = \int \frac{3x}{x^3-1} dx,$$

الحل

1. حساب I_1 .

نلاحظ أن الدالة الكسرية ليست عادية و درجة كثير حدود البسط $P(x)$ أقل من درجة كثير حدود المقام $Q(x)$ و منه يمكن تطبيق النظرية 5. من أجل ذلك نحدد أولاً جذور كثير الحدود الموجود بالمقام حيث أن

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

و منه نستنتج أنه يمكن كتابة الدالة الكسرية على شكل مجموع لكسرين من النمط الأول ، أي :

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{21}}{x-2}, \quad A_{11}, A_{21} \in \mathbb{R}.$$

اذن بتوحيد المقامات و المطابقة نجد أن : $A_{21} = 3$ و $A_{11} = 1$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-2} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx \\ &= \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. حساب I_2 .

نفس ملاحظة المثال السابق. نطبق النظرية 5 حيث نقوم بتحليل كثير حدود المقام فنجد

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

منه نستنتج أنه يمكن كتابة الدالة الكسرية على شكل مجموع لكسرين من النمط الأول و النمط الثاني، أي:

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + x + 1}, \quad A_{11}, M_{11}, N_{11} \in \mathbb{R}.$$

اذن بتوحيد المقامات و المطابقة نجد أن : $A_{11} = N_{11} = 1$ و $M_{11} = -1$.

مما يستلزم أن :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{3x}{x^3-1} dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} + I = \ln|x-1| + I. \end{aligned}$$

في المثال 27 وجدنا أن:

$$I = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}(2x+1)^2 + 1\right) + \sqrt{3} \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}(2x+1)}\right) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

اذن :

$$I_2 = \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}(2x+1)^2 + 1\right) + \sqrt{3} \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}(2x+1)}\right) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

ملاحظة 9

إذا كان $n \geq m$ فاننا نجري أولاً القسمة الاقليدية لنحصل على

$$E(x) = \frac{S(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

حيث ان $S(x)$ و $R(x)$ عبارة عن كثيري حدود . $S(x)$ يسمى حاصل القسمة الاقليدية و $R(x)$ يسمى باقي القسمة الاقليدية و تكون درجته أقل تماماً من m .

تمرين: أحسب التكامل

$$I = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

الحل

نلاحظ أن درجة كثير حدود البسط أكبر من درجة كثير حدود المقام، لذلك نقوم أولاً باجراء عملية القسمة الاقليدية فنجد

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - 3x + 2} = x + 1 + \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

اذن

$$I = \int (x + 1) dx + \int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

في المثال 28 و جدنا أن :

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \ln |x - 1| + 3 \ln |x - 2| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

من جهة أخرى نعلم أن :

$$I = \int (x + 1) dx = \ln |x + 1| + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

اذن و منه نستنتج أن :

$$I = \ln |x + 1| + \ln |x - 1| + 3 \ln |x - 2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4.5 التطبيقات الاقتصادية للتكامل

ان للتكامل تطبيقات عدة في العلوم الاقتصادية، وتندرج تحت التطبيقات الاقتصادية للتكامل، الدوال الحدية و الكلية و منها التكلفة الكلية و الايرادات الكلية فضلاً عن الاستهلاك و الادخار و فائض المنتج و المستهلك و غيرها من التطبيقات الاقتصادية. لذلك في هذه الفقرة سنقدم بعض الأمثلة دون الخوض في التفاصيل الاقتصادية.

دالة التكلفة الكلية (TC)

يساعد التكامل في ايجاد دالة التكلفة الكلية (TC) من دالة التكلفة الحدية (MC) و التي تعرف بأنها التغير الحاصل في الكلفة الكلية الناتجة من الزيادة في الانتاج . و من المعروف أن الجزء الذي يتغير من الكلفة الكلية هو الكلفة المتغيرة بتغير مستوى الانتاج أي:

$$TC = \int MC dx.$$

مثال 29

لتكن دالة الكلفة الحدية للمنتج x المعطاة كمايلي :

$$MC := f(x) = -3x^2 + 16x + 5.$$

إذا كانت الكلفة الكلية لانتاج 5 وحدات من x هو 500 وحدة نقدية، أوجد دالة الكلفة الكلية.

الحل
نعلم أن

$$TC = \int MC dx.$$

و منه

$$\begin{aligned} TC := F(x) &= \int -3x^2 + 16x + 5 dx, \\ &= -x^3 + 8x^2 + 5x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

من جهة أخرى الكلفة الكلية لانتاج 5 وحدات هو 500 وحدة نقدية ، أي بصيغة أخرى

$$F(5) = 500.$$

اذن

$$500 = 100 + c \Rightarrow c = 400.$$

و منه دالة الكلفة الكلية هي

$$TC = -x^3 + 8x^2 + 5x + 400.$$

دالة الايرادات الكلية (TR)

يستخدم التكامل كذلك لايجاد دالة الايرادات الكلية (يرمز لها اقتصاديا بالرمز TR). من خلال دالة الايراد الحدي MR و التي يعبر عنها بـ:

$$MR = \frac{dTR}{dQ}.$$

لذلك انطلاقا من العبارة السابقة يمكن ايجاد TR عن طريق التكامل الاتي :

$$TR = \int MR dQ.$$

تمرين: لتكن لدينا دالة الايراد الحدي التالية:

$$MR = \frac{6}{(x-3)^2} - 4.$$

أوجد دالة الايراد الكلي و دالة الطلب.

الحل
لدينا

$$TR = \int \frac{6}{(x-3)^2} - 4 dx = -\frac{6}{(x-3)} - 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

معلوم أنه اقتصاديا $TR(0) = 0$ ، و منه $c = -2$.

من جهة أخرى، نعلم أن دالة الطلب تعطى بالعلاقة :

$$P = \frac{TR}{x}.$$

أي ،

$$\begin{aligned} P = \frac{TR}{x} &= -\frac{6}{x(x-3)} - 4 - \frac{2}{x} \\ &= \frac{-6 - 2x + 6}{x(x-3)} - 4 \\ &= \frac{-2x}{x-3} - 4. \end{aligned}$$

اذن دالة الطلب P هي

$$P(x) = \frac{-2x}{x-3} - 4.$$

للاطلاع على مزيد من التطبيقات الاقتصادية للتكامل يمكن للطلاب التوجه الى المرجع [2].

5.5 تمارين مقترحة

التمرين الأول: أحسب التكاملات التالية:

$$1) \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx, \quad 2) \int \frac{1}{4} \frac{x}{x^2+1} dx, \quad 3) \int \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx, \quad \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$$

التمرين الثاني: باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب:

$$1) \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad 2) \int x e^{-x} dx, \quad 3) \int_0^1 x^2 \ln x dx, \quad \int \ln(1+x^2) dx.$$

التمرين الثالث : باستعمال طريقة التبديل المتغير أحسب:

$$1) \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx, \quad 2) \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx, \quad 3) \int \frac{e^{2x}}{e^{x+1}} dx, \quad \int \sqrt{e^x - 1} dx.$$

التمرين الرابع:

1. أحسب :

$$1) \int \frac{1}{x(x+1)} dx, \quad 2) \int \frac{2x}{(x-1)(x-2)^2} dx \quad 3) \int \frac{x-1}{x^2+2x+5} dx.$$

2. تحقّق أنّ

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2},$$

ثمّ أحسب التكامل

$$\int \frac{1}{x(x^2+x+1)^2} dx.$$

المراجع

- [1] رشيد توري، ترجمة عبد الحفيظ مقران، الطبعة الثانية، الجزائر، مدخل الى التحليل الرياضي. ديوان المطبوعات الجامعية ، 2 , 1994.
- [2] علي درب كسار الحياي، قسم الاقتصاد الزراعي، جامعة بغداد. الاقتصاد الرياضي.
- [3] سعود محمود، التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009 .
- [4] بابا حامد، محاضرات في التحليل ، ديوان المطبوعات الجامعية، 1988 .
- [5] قادة علاب، عناصر من التحليل الرياضي، التوابع لمتغير واحد، ترجمة أبو بكر خالد سعد الله ، ديوان المطبوعات الجامعية، 1991.
- [6] بن عيسى لخضر ، التحليل الرياضي ، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009
- [7] J. Bass , *Mathématiques Analys*. Tome II, Masson et Cie, 1972
- [8] Chiang, A. C, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw Hill, 1984
- [9] S. Rossignol, *Mathématiques en économie-gestion*. Openbook, DUNOD .2015
- [10] L. Schwartz, *Cours d'Analyse* .1 école polytechniques, Paris .1967
- [11] B. Ycart, *Calcul des primitives*. Université Joseph Fourier, Grenoble.