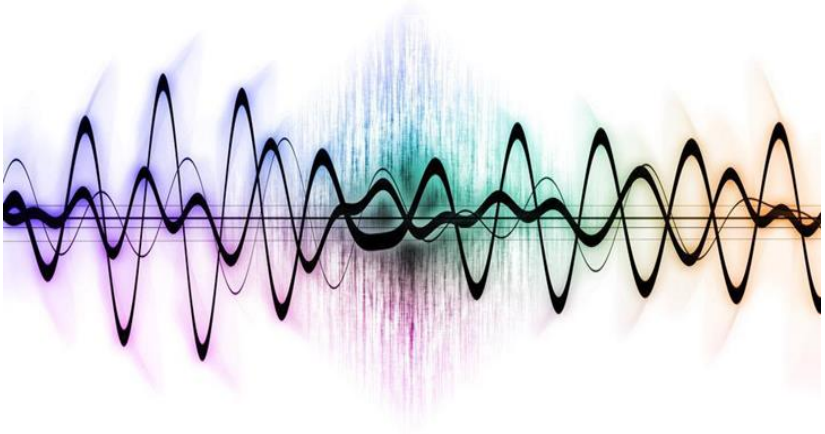
Chemseddine

ZIGHA

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

COURS : Ondes et Vibrations



UNIVERSITE DE JIJEL

2024/2025

COURS DE PHYSIQUE 3
Destiné aux étudiants de 2eme Année Licence
Filière : Electronique et Telecom

AVANT-PROPOS

Le présent cours, intitulé : « Vibrations et Ondes » (physique 3) est présenté en conformité au canevas relatif à la formation Licence LMD-S3 dans le domaine Science et Technologie (ST). Ce cours est structuré en deux parties : La première, répartie en sept chapitres, traite le problème des vibrations. Le premier chapitre consacré aux généralités, le deuxième chapitre porte sur l'utilisation du formalise de Lagrange qui décrit les oscillations des systèmes physiques. L'étude des oscillations linéaires (de faible amplitude) libres des systèmes à un degré de liberté est présentée dans le troisième chapitre. Le quatrième chapitre traite le mouvement amorti qui prend en compte les forces de frottements de viscosité proportionnelles à la vitesse du mobile. La notion de résonance consacrée aux oscillations forcées est présentée au cinquième chapitre. Le sixième et septième chapitre présente les vibrations aux plusieurs degrés de liberté. La deuxième partie, que constituent les quatre derniers chapitres, est consacrée au traitement des phénomènes de propagation des ondes. Le cours présenté avec un enchaînement logique, chaque nouveau concept défini est clarifié par des exemples simples et utiles, le tout a été réalisé avec l'esprit de permettre une meilleure assimilation par l'étudiant

Chemseddine ZIGHA

Programme

COURS DE PHYSIQUE 3 (Vibrations et Ondes)
Destiné aux étudiants de 2eme Année Licence Filière : Electronique et Telecom

Volume horaire	Semestriel	Hebdomadaire
Cours	heures	1h 30mn
TD	heures	1h 30mn

Attention !!!

Ce produit pédagogique numérisé est la propriété exclusive de ***l'UNIVERSITE de JIJEL***.
Il est strictement interdit de la reproduire à des fins commerciales.
Seul le téléchargement ou impression pour un usage personnel
(1 copie par utilisateur) est permis.

Sommaire

PREMIERE PARTIE : VIBRATIONS

Chapitre 1. Généralités

1.1 Définition d'une oscillation (Vibration) 1
1.2 Définition d'un mouvement périodique 1
1.3 La représentation complexe 2
1.3.1 Exemples 2
1.4 Coordonnées généralisées d'un système physique 2
1.4.1 Degré de liberté 2
1.5 Superposition des grandeurs périodique 3
1.5.1 Grandeurs sinusoïdales de même pulsation 3
1.5.2 Grandeurs sinusoïdales de mêmes amplitudes 3
1.5.3 Grandeurs sinusoïdales quelconques. 4
1.6 Définition des séries de fourrier 4
1.6.1 Cas des fonctions paires et impaires 4
1.7 Lois de Newton 5
1.8 Moment d'inertie 7
1.9 Le vecteur moment de la force $\vec{\mathbf{F}}$ par rapport au point A 8

Chapitre 2. Introduction aux équations de Lagrange

2.1 Introduction 9
2.2 Equation de Lagrange pour une particule 10
2.2.1 Cas des systèmes conservatifs 11
2.2.2 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse 11
2.2.3 Cas d'une force extérieure dépendant du temps 11
2.2.4 Système à plusieurs degrés de liberté 11

Chapitre 3. Oscillations libres non amorties des Systèmes à un degré de liberté

3.1 Oscillateurs libres 12
3.2 Oscillateur harmonique 12
3.2.1 Exemples 12
3.3 Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple 13
3.3.1 Exemples 13
3.4 L'énergie d'un oscillateur harmonique 14
3.5 Condition d'équilibre 14
3.5.1 Exemple 15
3.6 Equation de Lagrange 15
3.6.1 Exemple 15

Chapitre4. Oscillations libres amorties des systèmes à un degré de liberté

4.1 Introduction 16
4.2 Force d'amortissement. 16
4.3 Equation de Lagrange des systèmes amortis 16
4.4 Equation différentielle des systèmes amortis 17
4.5 Résolution de l'équation différentielle 17
4.6 Décrément logarithmique 20
4.6.1 Exemples 20

Chapitre 5. Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

5.1 Force d'excitation 21
5.2 Equation de Lagrange des systèmes forcés 21
5.3 Equation différentielle des systèmes forcés 21
5.4 Solution de l'équation différentielle 21
5.5 Résonnance 22
5.6 Bande passante et facteur de qualité 23
5.7 Analogie entre les systèmes mécaniques et circuits électriques 24

Chapitre 6. Oscillations libres des Systèmes à deux degrés de liberté

6.1 Equations de Lagrange 25
6.2 Système masses-ressorts en translation 25
6.3 Types de couplage 26
6.4 Résolution des équations différentielles 27

Chapitre 7. Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

7.1 Equations de Lagrange 29
7.2 Système masses-ressorts-amortisseurs 29
7.2.1 Résonance et antirésonance 30
7.3 Impédance d'entrée et de transfert 31
7.4 Généralisation aux systèmes à N degré de liberté 32

DEUXIEME PARTIE : ONDES

Chapitre 1. Phénomène de propagation à une dimension

1.1 Généralité et définition de base 33
1.1.1 Les dimensions physiques d'une onde 33
1.2 Equation de propagation 34
1.3 Solution de l'équation de propagation (Méthode de D'Alembert) 34
1.4 Onde progressive sinusoïdale 35
1.5 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales 35

Chapitre 2. Cordes vibrantes

2.1 Equation des ondes 37
2.2 Ondes progressives harmoniques 38
2.3 Oscillations libres d'une corde de longueur finie 38
2.4 Réflexion et transmission 39

Chapitre 3. Ondes acoustiques dans les fluides

3.1 Introduction 40
3.2 Equation d'onde 40
3.3 Vitesse du son 42

Chapitre 4. Ondes électromagnétiques

4.1 Equations de Maxwell 43
4.2 Onde Electromagnétique 44
4.3 Phénomène de propagation des Ondes Electromagnétiques 45
4.4 Puissance électromagnétique (vecteur de Poynting) 45
4.5 Equation d'onde 46
4.6 Différents types d'ondes électromagnétiques 47
4.6.1 Onde plane 47
4.6.2 Onde progressive 47
4.6.3 Onde monochromatique 48
4.7 Réflexion/transmission entre deux milieux (incidence normale et oblique) 48

BIBLIOGRAPHIE 50

VIBRATIONS

Figure 2.1: organigramme de la solution d'une équation différentielle du second ordre 10

Figure 4. 1: Régime apériodique ou fortement amorti 18
Figure 4. 2: Régime critique 18
Figure 4. 3: Régime oscillatoire amorti ou pseudopériodique 19

Figure 6. 1: Différents systèmes mécaniques et électriques couplés par élasticité 26
Figure 6. 2: systèmes mécaniques et électriques couplés par inertie 26
Figure 6. 1: Couplage visqueux des différents systèmes mécanique et électriques 26

ONDES

Figure 2. 1: Corde vibrante transversalement 37
Figure 2. 2: Corde de longueur L fixée aux extrémités 39

Figure 3. 1: Propagation d'une onde acoustique 41

Figure 4. 1: Schéma de principe de transmission de l'information en espace libre 44
Figure 4. 2: Phénomène de Propagation des Ondes Electromagnétique 45
Figure 4. 3: Onde plane 47
Figure 4. 4: Incidence normale 48
Figure 4. 5: Incidence oblique 49

PREMIERE PARTIE

VIBRATIONS

Chapitre1.

Généralités

1.1 Définition d'une oscillation (Vibration)

On appelle oscillation, un mouvement qui s'effectue de **part et d'autre** d'une position d'équilibre.
(Par vibration, on désigne les oscillations **rapides** des systèmes **mécaniques**.)

1.2 Définition d'un mouvement périodique

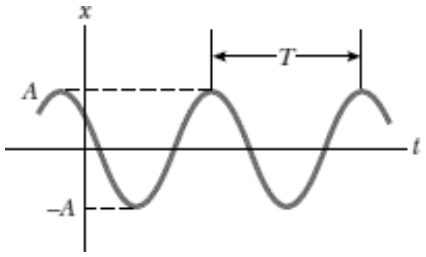
Un mouvement est dit périodique s'il se répète identique a lui-même pendant des intervalles de temps égaux. Le plus petit intervalle de répétition est appelé période (notée T, mesurée en secondes s.) le nombre de répétitions par seconde est appelé fréquence (notée f, mesurée en Hertz ou s^{-1}.) Elle est reliée à la période par : $$f = \frac{1}{T}$$

Le nombre de tours par seconde est appelé pulsation (notée ω, mesurée en rad/s.)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Mathématiquement, la périodicité s'exprime par $g(t + T) = g(t)$. Une grandeur périodique est dite Sinusoïdale lorsqu'elle est de la forme $g(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. A est appelée amplitude, ω la pulsation, φ la phase initiale. Parmi les grandeurs physiques étudiées des systèmes oscillants, on trouve :

- Le déplacement x.
- L'angle θ.
- La charge q.
- Le courant i.
- La tension U.
- Un champ E.



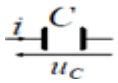
1.3 La représentation complexe

Pour faciliter les calculs, nous transformons les grandeurs sinusoïdales en des exponentielles qui sont plus simples à manipuler. Ceci possible grâce à la formule d'Euler :

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta} \quad j^2 = -1$$

1.3.1 Exemples

a) Soit un condensateur et un courant $i(t) = I_0 \cos \omega t$.



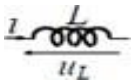
Trouver l'impédance complexe $\underline{\boldsymbol{Z_c}}$ **:**

$\underline{\boldsymbol{Z_c}} = \frac{\boldsymbol{Uc}}{\underline{\boldsymbol{i}}}$ $rappel: U_c = \frac{q}{c} = \frac{\int idt}{c}$ $car: i = \frac{dq}{dt}$

$i(t) = I_0 \cos \omega t \rightarrow \underline{i}(t) = I_0 e^{j\omega t}$.

$$U_c(t) = \frac{\int idt}{c} \rightarrow \underline{U_c}(t) = \frac{\int \underline{i}dt}{c} = \frac{\int I_0 e^{j\omega t}dt}{c} = \frac{I_0 e^{j\omega t}}{jc\omega} = \frac{\underline{i}}{jc\omega} \Rightarrow \underline{Z_c} = \frac{\underline{Uc}}{\underline{i}} = \frac{\underline{i}}{jc\omega\underline{i}} = \frac{1}{jc\omega}$$

b) Soit une bobine L et un courant $i(t) = I_0 \cos \omega t$.



Trouver l'impédance complexe $\underline{\boldsymbol{Z_L}} = \frac{\boldsymbol{U_L}}{\underline{\boldsymbol{i}}}$ $rappel: U_L = L\frac{di}{dt}$

$i(t) = I_0 \cos \omega t \rightarrow \underline{i}(t) = I_0 e^{j\omega t}$.

$$U_L(t) = L\frac{di}{dt} \rightarrow \underline{U_L}(t) = L\frac{d\underline{i}}{dt} = L\frac{d(I_0 e^{j\omega t})}{dt} = jL\omega I_0 e^{j\omega t} = jL\omega\underline{i} \Rightarrow \underline{Z_L} = \frac{\underline{U_L}}{\underline{i}} = \frac{jL\omega\underline{i}}{\underline{i}} = jL\omega$$

1.4 Coordonnées généralisées d'un système physique

Définition : Les coordonnées généralisées sont l'ensemble de variables réelles indépendantes ou liées permettant de décrire et configurer tous les éléments du système à tout instant t.

<u>On note :</u>

Les coordonnées généralisées : $q_1(t), q_2(t), \ldots \ldots . q_N(t)$.

Les vitesses généralisées : $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots \ldots . \dot{q}_N(t)$.

1.4.1 Degré de liberté

Définition : Le degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées indépendantes, nécessaires pour configurer tous les éléments du système à tout instant : $d = N$

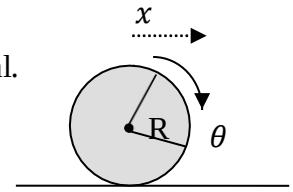
Ou bien, le nombre de coordonnées généralisées liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins (-) le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles : $d = N - r$

d: Degré de liberté

N **:** Nombre de coordonnées généralisées

r **:** Nombre de liaisons reliant ces coordonnées entre elles.

1.4.1.1 Exemples :



- Un disque de masse m et de rayon R, roule sans glisser sur un plan horizontal.

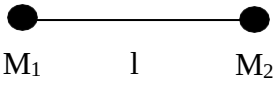
  Ici on a deux coordonnées généralisées x et θ donc $N = 2$.

  x et θ sont liées avec une relation : $x = R\theta$ donc : $r = 1$.

  Le nombre de degrés de liberté $d = N - r = 1$.

- Un système mécanique constitué de 02 points matériels M_1 et M_2 reliés d'une tige de longueur l.

$\begin{cases} M_1(x_1,\ y_1,\ z_1) : 3 \\ M_2(x_2,\ y_2,\ z_2) : 3 \end{cases} \Rightarrow N = 6$



L'équation de liaison : $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = c^{ste} \Longrightarrow r = 1 \Longrightarrow d = 5$

1.5 Superposition des grandeurs périodiques

L'addition de deux ou plusieurs grandeurs de même nature est appelée superposition.

1.5.1 Grandeurs sinusoïdales de mêmes pulsations

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation ω est une grandeur sinusoïdale de pulsation ω.

1.5.1.1 Exemple

Soit les deux grandeurs sinusoïdales : $g_1(t) = \sqrt{2}\cos(3t - \pi/4)$ et $g_2(t) = \sqrt{2}\sin(3t - \pi)$

$\sqrt{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin(3t - \pi) \rightarrow \sqrt{2}e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2}e^{j\left(\omega t + \pi - \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}(e^{-j\pi/4} + e^{j\pi/2})\, e^{j\omega t} = 1.e^{j\omega t}$

$= \cos(\omega t)$ $Donc.\ A = 1$ et $\varphi = 0$.

1.5.2 Grandeurs sinusoïdales de mêmes amplitudes

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de même amplitude est une grandeur sinusoïdale à amplitude modulée si les deux pulsations sont différentes.

1.5.2.1 Exemple

Soit les deux grandeurs sinusoïdales : $g_1(t) = a\cos\omega_1 t$, $g_2(t) = a\cos\omega_2 t$.

La superposition est : $g_1(t) + g_2(t) = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t$.

$$g(t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\ t\right)\ \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\ t\right)$$

1.5.3 Grandeurs sinusoïdales quelconques.

La superposition de deux grandeurs sinusoïdales de pulsations différentes ω_1 et ω_2 ne sera une grandeur périodique que si le rapport entre leur période est un nombre rationnel : $T_1/T_2 = n/m$
La période résultante est le plus petit multiple commun : $T = mT_1 = nT_2$.

1.5.3.1 Exemple

Soit les deux grandeurs sinusoïdales : $g_1(t) = 5\cos(5t + 2)$, $g_2(t) = 2\cos(7t + 3)$.

Leur superposition est : $5\cos(5t + 2) + 2\cos(7t + 3)$

Comme $T_1/T_2 = (2\pi/5)/(2\pi/7) = n/m$ est un nombre rationnel

($n = 7$, $m = 5$), *la superposition est une grandeur périodique de période*

$$T = m\frac{2\pi}{5} = n\frac{2\pi}{7} = 2\pi s$$

1.6 Définition des séries de fourrier

Il est possible d'exprimer une grandeur périodique par une somme de sinus et de cosinus qui sont plus simples à manipuler physiquement et mathématiquement. Cette somme est appelée **série** de **fourrier.**
La série de Fourier d'une fonction f (t) périodique de période T, est définit par :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)\ .$$

Le a_0, les a_n, et les b_n sont appelée les **coefficients** de Fourier.

- La pulsation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ est appelée la pulsation **fondamentale**.
- Les pulsations supérieures $n\omega$ (multiple de ω) sont appelées les **harmoniques.**
- Les coefficients de Fourier sont définis par :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\ , a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ cos\ (n\omega t)dt\ et\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ sin\ (n\omega t)dt$$

1.6.1 Cas des fonctions paires et impaires

- **Fonctions paires** : Une fonction est dite paire si $f(-t) = f(t)$.

Dans la série de Fourier des fonctions paires, il n'y a que les termes en **cosinus** et parfois la constante a_0 qui est la valeur moyenne de la fonction : $b_n = 0$.

- **Fonctions impaires** : Une fonction est dite impaire si $f(-t) = -f(t)$.

Dans la série de Fourier des fonctions impaires, il n'y a que les termes en **sinus** : $a_0 = a_n = 0$.

1.7 Lois de Newton

Les lois de Newton constituent le socle fondamental de la mécanique classique. Elles décrivent la dynamique des corps matériels soumis à des forces extérieures et permettent de relier quantitativement les causes (forces) et les effets (mouvements). Publiées par Isaac Newton en 1687 dans son ouvrage *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, ces lois unifient la description des phénomènes mécaniques.

Elles concernent à la fois les **mouvements de translation** et, par extension, les **mouvements de rotation** des corps solides.

1.7.1 Lois de Newton pour le mouvement de translation

1.7.1.1 Première loi : principe d'inertie

Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme tant qu'aucune force résultante ne vient modifier cet état.

Cette loi introduit la notion de **référentiel inertiel,** un cadre dans lequel un corps non soumis à des forces conserve une vitesse constante. Le mouvement uniforme ne nécessite donc pas de cause permanente, seule une force nette est responsable d'un changement de mouvement.

1.7.1.2 Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique

La variation de la quantité de mouvement d'un corps est égale à la résultante des forces qui s'exercent sur lui : $\sum \vec{F}(ext) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

Si la masse est constante : $\sum \vec{F}(ext) = m\vec{a}(G)$

où m est la masse du corps et $\vec{a}$ son accélération, G désigne le centre de gravité du solide.

Cette loi relie la cause (la force) à l'effet (l'accélération) et permet de prédire la trajectoire d'un corps connaissant les forces appliquées.

1.7.1.3 Troisième loi : principe d'action et de réaction

Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{AB}$ sur un corps B, alors B exerce sur A une force opposée $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Ces forces sont égales en intensité, opposées en direction et de même nature. Elles traduisent la conservation de la quantité de mouvement dans un système isolé et expriment la symétrie des interactions.

1.7.2 Lois de Newton appliquées au mouvement de rotation

Les lois de la dynamique peuvent être transposées au cas des mouvements de **rotation d'un corps solide** autour d'un axe fixe ou d'un centre de masse. Dans ce cadre, les grandeurs linéaires (force, masse, accélération, quantité de mouvement) ont leurs **analogues angulaires** (moment, moment d'inertie, accélération angulaire, moment cinétique).

1.7.2.1 Principe d'inertie en rotation

Un solide en rotation autour d'un axe Δ conserve sa **vitesse angulaire** constante tant qu'aucun **moment résultant** (ou couple de forces) n'agit sur lui.

Autrement dit, en l'absence de moment externe, le **moment cinétique** du corps reste constant : $\frac{\partial \overrightarrow{L}}{\partial t} = 0$.

1.7.2.2 Principe fondamental de la dynamique en rotation

Le moment résultant des forces appliquées à un solide par rapport à un point fixe O est égal à la **dérivée temporelle de son moment cinétique** : $\sum M_O(\vec{F}_{ext}) = \frac{\partial \overrightarrow{L_O}}{\partial t}$

Si le mouvement s'effectue autour d'un axe fixe Δ et que le moment d'inertie I est constant, la relation devient : $$\sum M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta \frac{\partial \omega}{\partial t} = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Où M_Δ est le moment résultant, J_Δ le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe, et $\ddot{\theta}$ l'accélération angulaire.

Cette relation constitue l'**analogue rotationnel de la deuxième loi de Newton**, reliant le couple appliqué à la variation du mouvement de rotation.

1.7.2.3 Principe d'action et de réaction en rotation

Deux corps en interaction exercent l'un sur l'autre des **moments opposés** : $\vec{M}_{BA} = -\vec{M}_{AB}$

Ce principe découle directement de la conservation du moment cinétique du système global. Il intervient notamment dans l'étude des systèmes gyroscopiques, des roues, ou des corps en rotation libre.

1.7.3 Analogie entre translation et rotation

Grandeur en translation	Symbole	Analogue en rotation	Symbole
Coordonnée	x	Coordonnée	θ
Masse	m	Moment d'inertie	J
Vitesse	$\vec{v}$	Vitesse angulaire	ω
Accélération	$\vec{a}$	Accélération angulaire	$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \ddot{\theta}$
Force	$\vec{F}$	Moment ou couple	$M_\Delta(\vec{F})$
Quantité de mouvement	$\vec{P} = m\vec{v}$	Moment cinétique	$\overrightarrow{L} = J\omega$
Énergie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	Énergie de rotation	$E_r = \frac{1}{2}J\omega^2$

Les lois de Newton et leurs équivalents rotationnels offrent un cadre cohérent pour décrire le mouvement de tout système mécanique, qu'il s'agisse d'un point matériel ou d'un solide en rotation. Elles constituent les fondements de la mécanique classique et restent essentielles pour comprendre le comportement des systèmes mécaniques, depuis les particules élémentaires jusqu'aux planètes, en passant par les dispositifs technologiques modernes.

1.8 Moment d'inertie

Est une grandeur physique qui caractérise la répartition de la masse d'un corps par rapport à un axe de rotation. Il joue un rôle similaire à la masse dans les mouvements de translation, mais dans le contexte de la rotation. Le moment d'inertie détermine la résistance d'un objet à un changement de son état de rotation autour d'un axe donné.

- **Facteurs influençant le moment d'inertie :**

- **Masse** : Plus un objet est massif, plus son moment d'inertie sera élevé.
- **Répartition de la masse** : Plus la masse est éloignée de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie sera important. Par exemple, une roue avec plus de masse sur sa jante aura un moment d'inertie plus grand qu'une roue avec une masse concentrée près de son centre.
- **Axe de rotation** : Le moment d'inertie dépend de l'axe autour duquel l'objet tourne. Différents axes donneront différents moments d'inertie pour le même objet.

- **Point matériel :**

Le moment d'inertie J_Δ par rapport à un axe Δ d'un point matériel de masse m, situé à la distance constante r de cet axe Δ, est donné par $J_\Delta = mr^2$. Il s'exprime en kg.m^2.

- **Solide :**

Le moment d'inertieJ_Δ par rapport à un axe Δ d'un solide (S), de masse totale m, est égal à la somme (intégrale) des moments d'inertie par rapport à l'axe Δ des masses "élémentaires" dm le constituant $J_\Delta = \int r^2 dm$ pour un cylindre plein de masse M et de rayon R, par rapport à son axe de révolution, on calcule $J = \frac{1}{2}MR^2$

- **Changement d'axe**

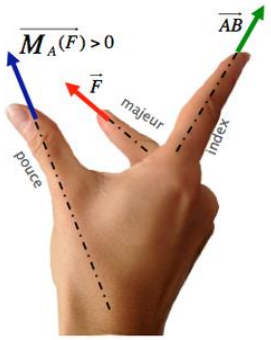
Soit un axe Δ parallèle à un axe Δ_G passant par le centre de gravité G d'un solide (S).
Les moments d'inertie du solide (S) de masse m par rapport à chacun de ces deux axes sont reliés par la relation suivante (formule de Huyggens) : $J_\Delta = J_{\Delta G} + md^2$ où d est la distance entre les deux axes**.**

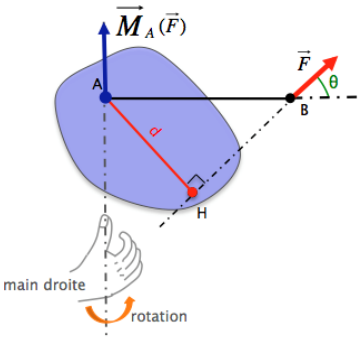
- **Solide composé**

Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ d'un solide composé, est égal à la somme arithmétique des moments d'inertie, par rapport au même axe Δ, de chacun des solides qui le constituent.

1.9 Le vecteur moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A

Pour l'étude de systèmes dans l'espace, la notion de moment scalaire ne suffit plus, et on doit le définir autrement, à partir d'un produit vectoriel. Le vecteur moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A est défini par $\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$ où B est un point quelconque de la ligne d'action de la force $\vec{F}$. De par les propriétés du produit vectoriel, le vecteur moment est perpendiculaire à la fois à la force $\vec{F}$ et au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Son sens est donné par la règle des trois doigts (de la main droite) :





Remarque : $\left\|\overrightarrow{\mathbf{M}_{\mathbf{A}}}(\vec{\mathbf{F}})\right\| = \mathrm{AB}.\left\|\overrightarrow{\mathrm{F}}\right\| \sin\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{F}}\right) = F.ABsin\theta = F.d$, donc le moment scalaire est égal au module du moment vecteur, avec le signe résultant de la convention énoncée ci-dessus selon le sens de rotation induit par la force $\vec{F}$ autour du point A.

RAPPEL : calcul du produit vectoriel en coordonnées cartésiennes

$$\vec{U} \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ U_z V_x - U_x V_z \\ U_x V_y - U_y V_x \end{vmatrix}$$

$U_x \quad V_x$
$U_y \quad V_y$

- **Méthode pratique :** On recopie les deux premières lignes des coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sous les deux vecteurs. La 1° ligne du produit vectoriel s'obtient alors en barrant la 1° ligne de ces coordonnées, et en calculant le déterminant des deux lignes en dessous (lignes 2 et 3). Puis on recommence en barrant la 2° ligne, et enfin la 3° ligne.

- **Cas particulier :** Si le point A appartient à l'axe de rotation du solide, alors le vecteur moment en A d'une force $\vec{F}$ produisant ce mouvement de rotation est porté par l'axe de rotation, et son sens sur cet axe est donné par la règle du tire-bouchon par rapport au sens de rotation du solide.

Chapitre2.

Introduction aux équations de Lagrange

2.1 Introduction

Une vibration est un mouvement autour de la position d'équilibre. Elle est caractérisée par une équation de mouvement de type d'équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t)$$

Avec : y : Le déplacement (m)

$\dot{y}$: La vitesse (m/s)

$\ddot{y}$: L'accélération (m/s^2)

δ : Le coefficient d'amortissement

ω_0 : La pulsation libre (rad/s)

A(t) : Le second membre.

La méthode de résolution de l'équation différentielle est schématisée sur l'organigramme de la figure 2.1. Pour résoudre une équation du second ordre avec second membre, on suit la méthode suivante

Premièrement on cherche la solution homogène $y_H(t)$ lorsque le second membre A(t)=0. Pour cela, on considère que la solution a une forme exponentielle $y(t) = e^{st}$. L'équation différentielle homogène est transformée en une équation caractéristique de deuxième degré d'une variable s qui nous permettra de déterminer les solutions s_1, s_2 par le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe trois solutions homogènes selon les cas de Δ illustré sur l'organigramme. Deuxièmement, on cherche la solution particulière $y_p(t)$ lorsque le second membre A(t) $\neq$ 0. Dans l'organigramme, on constate deux cas d'excitations :

- Une excitation constante
- Une excitation sinusoïdale.

La solution particulière $y_p(t)$ est déterminée selon la règle suivante :

« La solution particulière suit la forme générale du second membre de l'équation différentielle ».

Enfin, la solution générale de l'équation différentielle du second ordre avec second membre est donné par la somme des deux solutions homogène et particulière.

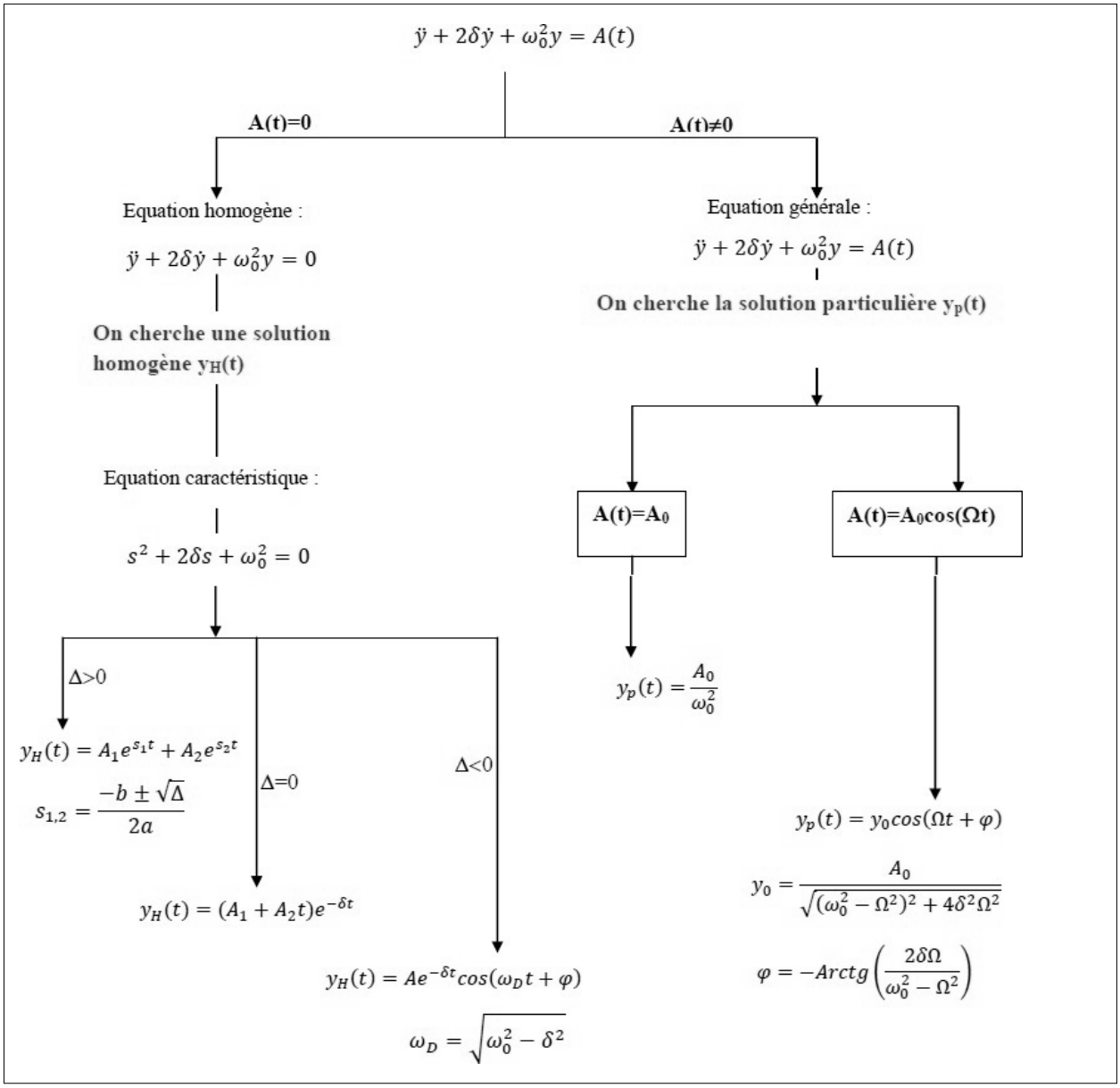


Figure 2.1: organigramme de la solution d'une équation différentielle du second ordre

2.2 Equation de Lagrange pour une particule

L'équation de Lagrange est donnée par la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}} = \mathrm{F}_{\mathrm{ext,q}}$$

Avec : L est le lagrangien définit par : $L = E_c - E_p = T - U$

Avec : E_c, T est l'énergie cinétique du système, Ep, U est l'énergie potentielle du système.

q est la coordonnée généralisée qui caractérise le mouvement vibratoire.

$F_{ext,q}$: Les forces extérieures généralisées.

Le degré de liberté est égal au nombre de coordonnées (N) moins (-) le nombre de liaisons(r).

$d = N - r$

2.2.1 Cas des systèmes conservatifs

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée dérive d'un potentiel U s'écrit : $F_{ext,q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$

Généralement l'énergie potentielle U ne dépend pas de la vitesse, donc $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$.

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un système conservatif : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

2.2.2 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

Considérons une situation physique dans laquelle la particule est soumise à des forces de frottement de viscosité dont la résultante $\vec{f}$ est de la forme : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

Pour calculer la force généralisée $F_{ext,q}$correspondante, nous utilisons la définition :

$F_{ext,q} = \partial W / \partial q = \vec{f} \cdot \partial\vec{r} / \partial q = - \alpha [\partial\vec{r} / \partial q]^2 [\partial q / \partial t]$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme : $F_{ext,q} = -\beta\dot{q}$

Avec : $\beta = \alpha [\partial\vec{r} / \partial q]^2$

Si en plus des forces qui dérivent d'un potentiel il existe des forces de frottement de viscosité, l'équation de Lagrange s'écrit : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\alpha\dot{q}$

Cette équation de Lagrange se généralise à l'équation suivante : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$

D est la fonction de dissipation donnée par $D = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$ liée à la force de frottement par $f_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$

2.2.3 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Considérons le cas plus général d'un force extérieure dépendant du temps agissant sur un système qui est le siège de forces de frottement qui dérivent d'une fonction dissipation D. Soit $F_{ext,q}$ la composante de la force extérieure. Dans ce cas l'équation de Lagrange peut s'écrire sous la forme équivalente suivante : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q}$

2.2.4 Système à plusieurs degrés de liberté

Dans le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté. Ainsi, si le système possède N degrés de liberté, il est nécessaire d'avoir N coordonnées généralisées qi (i = 1, 2, …, N) ; nous aurons ainsi N équations de Lagrange :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{ext,qi}$

La composante de la force généralisée extérieure est définie par : $F_{ext,qi} = \partial W / \partial qi$

Le ∂W représente le travail des forces extérieures résultant d'une variation ∂qi de la coordonnée qi.

Chapitre3.

Oscillations libres non amorties des Systèmes à un degré de liberté

3.1 Oscillateurs libres

Un système oscillant en absence de toute force **d'excitation**, est appelé oscillateur libre. Le nombre des grandeurs indépendantes intervenant dans le mouvement est appelée degré de liberté.

Un système oscillant à un degré de liberté est habituellement repéré à l'aide d'une coordonnée généralisée q qui est l'écart par rapport à la position d'équilibre stable. Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \dot{q} = 0$$

Cette équation est appelée équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple.

3.2 Oscillateur harmonique

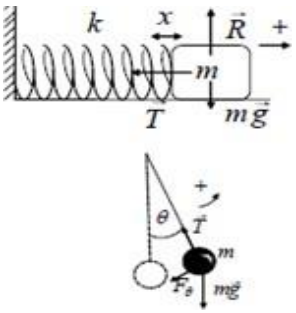
En mécanique, on appelle oscillateur **harmonique** qui, dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x (ou θ) : $F = -Cx$.

C : Une constante **positive**

3.2.1 Exemples

a) Le système masse-ressort ci-dessous est un oscillateur harmonique car la force de rappel est $T = -kx$.

b) La force de rappel du pendule simple est $F_\theta = -mg\sin\theta$. Le pendule devient un oscillateur harmonique lorsque $\theta \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$ donc : $F_\theta = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$



3.3 Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple s'écrit :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \dot{q} = 0$$

La solution d'une telle équation est une fonction sinusoïdale du temps

$$q\,(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Où A représente l'amplitude des oscillations, φ est la phase initiale.

Il est important de remarquer que la pulsation propre ω_0 ne dépend que des éléments qui constituent le système physique étudié (masse, ressort, etc.…) tandis que l'amplitude A et la phase initiale φ sont calculées à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} \boldsymbol{q(t = 0) = q_0} \\ \boldsymbol{\dot{q}(t = 0) = \dot{q}_0} \end{cases}$$

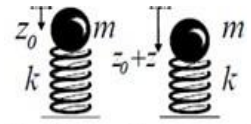
Enfin l'amplitude des oscillations d'un oscillateur harmonique libre ne dépend pas du temps. De telles oscillations sont dites non amorties.

Il faut néanmoins remarquer qu'au-delà d'une certaine amplitude la vibration devient non linéaire. Il s'ensuit d'abord une modification de la période des oscillations et ensuite un changement de la nature du mouvement.

3.3.1 Exemples

a) Trouver à l'aide du PFD l'équation du mouvement du système ci-dessous.

- Calculer sa pulsation propre pour $m = 1kg$ *et* $k = 3N/m$.
- Trouver l'amplitude A et la phase φ sachant qu'initialement la masse est poussée $2cm$ vers le bas puis lancée vers le haut à une vitesse de $2cm/s$.



Equilibre Mouvement

Solution

- PFD en équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow mg - kz_0 = 0$.

  PFD en mouvement : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \Rightarrow mg - k(z + z_0) = m\ddot{z}$.

  Grace à l'équation d'équilibre $mg - kz_0 = 0$, l'équation du mouvement se simplifie :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

  La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{3}$ rad/s.

L'équation horaire est : $z(t) = A\sin(\sqrt{3}t + \varphi)$.

Utilisons les conditions initiales pour trouver A et φ :

$z\,(0) = A\sin\varphi = 2\text{cm}$ $\qquad tan\emptyset = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 2\pi/3$

$\dot{z}(0) = A\sqrt{3}\cos\varphi = -2cm$ $\qquad A = (2/\sin\varphi) = 2/0.87 = 2.3$ cm

3.4 L'énergie d'un oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur harmonique est la somme de ses énergies cinétiques et potentielles :

$E = E_c + E_p = T + U$

- L'énergie cinétique de translation d'un corps de masse m et de vitesse v est : $E_c = \frac{1}{2}\,mv^2$
- L'énergie cinétique de rotation d'un Corps de moment d'inertie J_Δ autour d'un axe Δ et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est : $E_c = \frac{1}{2}\,J_\Delta\dot{\theta}^2$
- L'énergie potentielle d'une masse m dans un champ gravitationnel constant g est :

  $E_p = mgh$. Lors d'une ascension d'une hauteur h

  $E_p = -\,mgh$. Lors d'une descente d'une hauteur h
- L'énergie potentielle d'un ressort à boudin de raideur k lors d'une déformation x est : $E_p = \frac{1}{2}\,kx^2$
- L'énergie potentielle d'un ressort de torsion raideur k lors d'une déformation θ est : $E_p = \frac{1}{2}k\,\theta^2$

Remarque : L'énergie totale $E = E_c + E_p = T + U$ est conservée (constante) durant le mouvement : $\frac{dE}{dt} = 0$. Cette **équation de conservation** donne l'équation du mouvement des systèmes conservés.

3.5 Condition d'équilibre

La condition d'équilibre est $F_{ext,q} = 0$. Si l'équilibre est en $q = q_0$, on écrit $F_{ext,q}\big|_{q=q_0} = 0$.

Pour une force dérivant d'un potentiel ($F_{ext,q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$), la condition d'équilibre s'écrit :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0$$

L'équilibre d'un système est stable si, une fois écarté de sa position d'équilibre, il y retourne. Le système retourne à son équilibre si F est une force de rappel. Puisque $F = -Cq$. On aura une force de rappel si $C > 0$.

Comme $-\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$, la condition d'équilibre **stable** s'écrit :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} > 0$$

Cette condition est aussi une **condition d'oscillation**.

L'équilibre d'un système est instable si le système ne regagne pas son équilibre lors d'un écartement,

c.-à-d. si $C < 0$. La condition d'équilibre **instable** s'écrit donc :

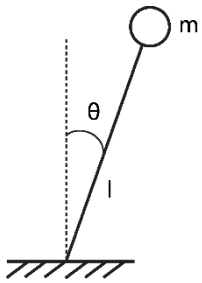
$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{q}^2}\right|_{q=q_0} < 0$$

Pour la translation, les équations deviennent $\left.\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}}\right|_{x=x_0} = 0,\ \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{x}^2}\right|_{x=x_0} > 0$ et $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{x}^2}\right|_{x=x_0} < 0$

Pour la rotation, les équations deviennent $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0,\ \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} > 0$ et $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} < 0$

3.5.1 Exemple

Trouver les positions d'équilibre et leur nature pour le système ci-contre.



Solution

L'énergie potentielle lors d'un écartement θ de la verticale est :

$U = -mgh = -mg\,(l - l\cos\theta)$. Les positions d'équilibre sont données par $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$.

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0.$

Les positions d'équilibres sont donc : $\theta = 0$ *ou* $\theta = \pi$.

$\left.\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = -mgl\cos\theta = -mgl < 0 : \theta = 0$ *est une position d'équilibre instable.*

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -mgl\cos\theta = mgl > 0 : \theta = \pi$ *est une position d'équilibre stable.*

3.6 Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange (appelée aussi équation **d'Euler-Lagrange**) est :

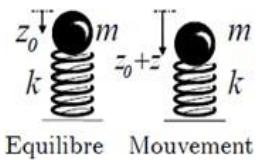
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}} = 0$$

L = Ec – Ep est appelé le **Lagrangien**

L'équation de Lagrange donne aussi directement l'équation du mouvement.

(Pour les translations q = x, y, z. Pour les rotations q = $\theta, \varphi, \ldots$ En électricité q = q.)

3.6.1 Exemple



Ec = $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$, Ep = $\frac{1}{2}kz^2$ +Cte

Le lagrangien est : L = Ec – Ep = $\frac{1}{2}\mathrm{m}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2$ +Cte

L'équation différentielle est donc :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{m}\dot{z}) + kz = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$

Qui est bien l'équation obtenue à l'aide du PFD puis à l'aide de l'équation de conservation.

Chapitre4.

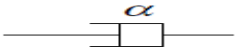
Oscillations libres amorties des systèmes à un degré de liberté

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous n'avons pas tenu compte de certaines réalités physiques. En effet, nous n'avons pas pris en compte les forces de frottement qui sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique du système sous forme de chaleur. Dans ce chapitre, nous allons tenir compte de ces réalités en nous limitant toute fois au cas simple où les pertes sont dues à des frottements visqueux pour lesquels les forces de frottement, qui s'opposent au mouvement, sont proportionnelles à la vitesse.

4.2 Force d'amortissement.

Un système soumis à un frottement est dit amorti. Le frottement le plus simple est le frottement **visqueux**. Les frottements visqueux sont de la forme : $f = -\alpha v$



α est une constante positive appelé coefficient de frottement et v est la vitesse du corps en mouvement. En mécanique, l'amortissement est schématisé par : la vitesse v est dans ce cas la vitesse relative des deux bras de l'amortissement.

4.3 Equation de Lagrange des systèmes amortis

S'il existe un frottement $f = -\alpha \dot{q}$, l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}} = -\alpha \dot{q}$$

En introduisant la fonction de **dissipation** $D = \frac{1}{2}\alpha \dot{q}^2$, nous pouvons

écrire : $f = -\alpha \dot{q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$

(En translation $D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2$. En électricité $D = \frac{1}{2}Ri^2 = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$)

L'équation de Lagrange des systèmes amortis s'écrit (où $q = x, y, z, q, \theta \ldots$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}} = -\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \dot{\mathrm{q}}}$$

4.4 Equation différentielle des systèmes amortis

L'équation différentielle des systèmes linéaires amortis par $f = -\alpha\dot{q}$ est de la forme :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

δ est appelé facteur (ou coefficient, ou constante) d'amortissement.

ω_0 est la pulsation propre.

$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ est appelé facteur de qualité.

4.5 Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle est de la forme $q\,(t) = Ae^{st}$.

En injectant ceci dans l'équation différentielle on obtient :

$$s^2 Ae^{st} + 2\delta sAe^{st} + \omega_0^2 Ae^{st} = 0 \Rightarrow s^2 + 2\delta s + \omega_0^2 = 0$$

Appelé l'équation caractéristique.

On distingue alors trois cas suivant le signe du discriminant réduit $\Delta = \delta^2 - \omega_0^2$

La solution de l'équation différentielle dépend de la valeur de δ par rapport à ω_0 :

- Si $\delta > \omega_0$, on dit que le système est sur-amorti ou apériodique.
- Si $\delta = \omega_0$, on dit que l'on a un amortissement critique.
- Si $\delta < \omega_0$, on dit que le système est sous-ramorti ou pseudopériodique.

- **Cas où le système est sur-amorti ($\delta > \omega_0$)**

$\delta^2 - \omega_0^2 > 0$: (amortissement important : $Q < 0{,}5$)

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :

$$q\,(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Deux solutions réelles pour l'équation caractéristique $\Longrightarrow \begin{cases} s_1 = -\delta - \sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)} \\ s_2 = -\delta + \sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)} \end{cases}$

Soit :

$$q\,(t) = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{-\left[\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right]t} + A_2 e^{\left[\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right]t}\right)$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure ci-dessous représente q en fonction du temps dans le cas particulier où $q(0) = q_0 \; et \; \dot{q}(0) = 0$.

q(t) est une fonction qui tend exponentiellement (sans oscillation) vers zéro

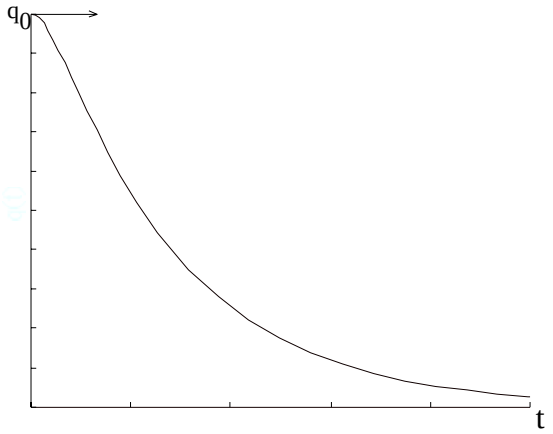


Figure 4. 1: Régime apériodique ou fortement amorti

- **Cas de l'amortissement critique ($\delta = \omega_0$)**

Le mouvement est dit apériodique quand.

$\delta^2 - \omega_0^2 = 0$: (amortissement critique : $Q = 0{,}5$)

Une solution double pour l'équation caractéristique : $s_1 = s_2 = s = -\delta$.

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q\,(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{st}.$$

Dans le cas particulier où $q(0) = q_0 \; et \; \dot{q}(0) = 0$

$$q\,(t) = (1 + \delta\, t)\, e^{st}$$

q(t) est encore une fonction qui tend vers zéro sans oscillation lorsque le temps augment

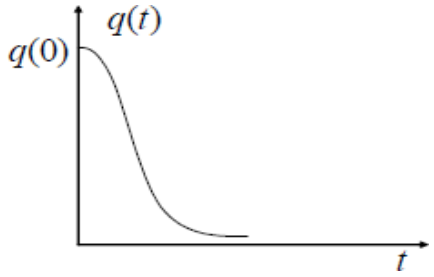


Figure 4. 2: Régime critique

- **Cas où le système est sous-amorti ($\delta < \omega_0$)**

Le mouvement est dit en régime pseudopériodique quand

$\delta^2 - \omega_0^2 < 0$: (amortissement faible : $Q > 0{,}5$)

Le mouvement résultant est $q\,(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$, soit :

Deux solutions complexes pour l'équation caractéristique $\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\delta - j\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)} \\ s_2 = -\delta + j\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)} \end{cases}$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q\,(t) = Ae^{-\delta t} \cos\,(\omega_A t + \varphi\,)$$

Avec $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; A et φ sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. Dans le cas particulier où $q(0) = q_0 \; et \; \dot{q}(0) = 0$, on obtient :

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_A} q_0$$

$$\varphi = -\arctan(\frac{\delta}{\omega_A})$$

Le mouvement est dit pseudo-périodique. $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ est appelé pseudo-pulsation**.**

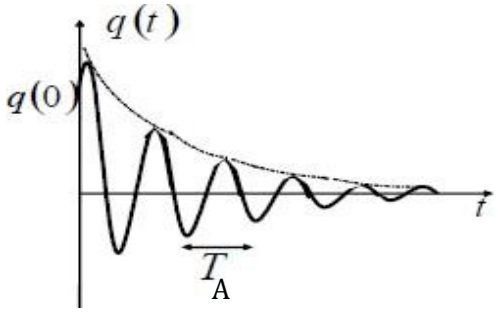


Figure 4. 3: Régime oscillatoire amorti ou pseudopériodique

Système faiblement amorti : variation de q en fonction du temps

La figure représente les variations de q(t) au cours du temps. On remarque que q(t) est enveloppée par les deux fonctions exponentielles : $\pm\frac{\omega_0}{\omega_A} \; q_0 e^{-\delta t}$. Le lieu des maximas est obtenu en résolvant

$\dot{q}(0) = 0$. Ce qui donne : $\tan(\omega_A t + \varphi) = -\delta/\omega_A = \tan(\varphi)$

D'où l'on tire l'instant t_n correspondant au n-ième maximum :

$$t_n = n\frac{2\pi}{\omega_A}$$

Les maximas de q(t) sont séparés par des intervalles réguliers égaux à

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}$$

T_A est appelée la pseudo-période. On remarque que, en plus de la diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps, l'un des effets de l'amortissement est l'augmentation de la période des oscillations. Pour des systèmes faiblement amortis ($\delta << \omega_0$), on peut remarquer que $\omega_A \approx \omega_0$ et que la pseudo période est peu différente de la période propre :

$$T_A \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

4.6 Décrément logarithmique

Pour évaluer la diminution exponentielle de l'amplitude du mouvement pseudo-périodique, nous utilisons le logarithme.

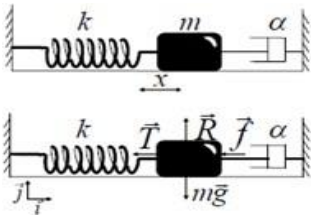
Le rapport $D = \ln\frac{q(t)}{q(t+T_A)} = \frac{1}{n}\ln\frac{q(t)}{q(t+nT_A)}$ est appelé le décrément logarithmique.

En utilisant la solution de l'équation différentielle on trouve $D = \ln\frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T_A)}} \Rightarrow D = \delta\, T_A$

La constante de temps : $\tau = \frac{1}{\delta}$

4.6.1 Exemples

Soit le système masse-ressort ci-contre.



Trouver l'équation du mouvement d'abord avec le Lagrangien puis avec PFD (newton).

Solution

- A l'aide du Lagrangien :

Le Lagrangien est : L = Ec − Ep = $\frac{1}{2}\boldsymbol{m\dot{x}^2}$ - $\frac{1}{2}\boldsymbol{kx^2}$ D = $\frac{1}{2}\alpha\dot{\boldsymbol{x}}^2$

L'équation de Lagrange s'écrit alors :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}} = -\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \dot{\mathrm{x}}} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

- A l'aide du PFD : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \quad \vec{T} + m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow -kx\vec{i} - mg\vec{j} + R\vec{j} - \alpha\dot{x}\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i}$

Par projection sur $x'Ox$: $-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Chapitre5.

Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

5.1 Force d'excitation

Pour vaincre les frottements responsables des pertes d'énergie et des ralentissements des systèmes en mouvements, il faut appliquer une force externe qu'on appelle **excitation.**

5.2 Equation de Lagrange des systèmes forcés

Si en plus du frottement $f = -\alpha\dot{q}$, il existe une force d'excitation externe $F(t)$, l'équation de Lagrange s'écrit :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}} = -\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \dot{\mathrm{x}}} + F(t)$ $\Rightarrow$ (En translation)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \dot{\theta}} + \mathcal{M}(t)$ $\Rightarrow$ (En rotation. $\mathcal{M}$ est le moment de la force F.)

5.3 Equation différentielle des systèmes forcés

L'équation du mouvement des systèmes linéaires amortis par $f = -\alpha\dot{q}$ et excités par $F(t)$ est de la forme (a est une constante)

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F(t)}{a}$$

5.4 Solution de l'équation différentielle

La résolution de l'équation est très simple pour une excitation sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

Dans ce cas l'équation différentielle s'écrit : $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F_0 \cos \omega \mathrm{t}}{a}$

La solution générale de cette équation est : $q(t) = q_T(t) + q_P(t)$.

- $q_T(t)$ est la solution **(transitoire)** de l'équation homogène (sans F). Elle dépend du signe de $\delta^2 - \omega_0^2$. Elle est dite transitoire car elle s'éteint au cours du temps (chap. 4)
- $q_P(t)$ est la solution **(permanente ou particulière)** de l'équation non homogène (avec F). Elle est appelée permanente car elle dure tout au long du mouvement.

Elle est de la forme $q\ (t) = A\ \cos\ (\omega t + \varphi)$. On trouve A et φ à l'aide de la représentation complexe comme suit :

$$F_0 \cos \omega t \rightarrow F_0 e^{j\omega t}.$$

$$q\ (t) = A\ \cos\ (\omega t + \varphi). \rightarrow \underline{q\ (t)} = A e^{j\ (\omega t\ +\ \varphi)} = \underline{A} e^{j\omega t}$$

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F_0}{a} \cos \omega t \rightarrow \ddot{\underline{q}} + 2\delta\ \dot{\underline{q}} + \omega_0^2\ \underline{q} = \frac{F_0}{a}\ e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow -\ \omega^2 \underline{A}\ e^{j\omega t} + 2\delta j\omega \underline{A}\ e^{j\omega t} + \omega_0^2\ \underline{A} e^{j\omega t} = \frac{F_0}{a}\ e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A}\ (-\ \omega^2 + 2\delta j\omega + \omega_0^2\ ) = \frac{F_0}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{a}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\delta\omega}$$

L'amplitude du mouvement est donc :$A = \underline{|A|} = \dfrac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2}}$

La phase φ du mouvement (déphasage entre $q\ (t)$ et $F\ (t)$) est donner par :

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}\ (\underline{A})}{\text{Re}\ (\underline{A})} = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

5.5 Résonnance

La pulsation d'excitation ω pour laquelle l'amplitude A atteint son maximum est appelée **pulsation de résonance** (d'amplitude) ω_R. A est maximale lorsque $\frac{\partial \text{A}}{\partial \omega} = 0$.

$$A = \underline{|A|} = \frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\frac{\partial \text{A}}{\partial \omega}\ =\ 0 \Rightarrow \frac{[-4\omega^2\ (\ \omega_0^2 -\ \omega^2\ )\ + 8\delta^2\omega^2]\frac{F_0}{a}}{2[[(\omega_0^2 -\ \omega^2)2 +\ 4\delta^2\omega^2\ ]]^{3/2}} = 0 \Rightarrow\ -4\ (\ \omega_0^2 -\ \omega^2\ )\ + 8\delta^2\ = 0$$

$$\omega\ = \sqrt{\omega_0^2 -\ 2\delta^2} \equiv\ \omega_R\ \Leftrightarrow\ \omega_R\ =\ \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Avec cette pulsation, l'amplitude $A = \underline{|A|} = \dfrac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2}}$ devient au point max :

$$\text{A}_{\text{max}} = \frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 - 4\delta^4}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{A}_{\text{max}} = \frac{F_0}{a\omega_0^2} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Pour qu'il y ait résonance il faut que :$\omega_0^2 -\ 2\delta^2 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Le facteur de qualité doit donc être supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇒ l'amortissement doit être faible.

$\tan \varphi = -\infty$ ($\varphi = -\pi/2$) lorsque $\omega = \omega_0$, cette pulsation est appelée pulsation de **résonance de phase**

5.6 Bande passante et facteur de qualité

La puissance instantanée fournie par la force d'excitation est : $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{Fdq}{dt} = F\dot{q}$

En utilisant $q\ (t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $F\ (t) = F_0\cos\omega t$, on trouve :

$\mathcal{P} = -F_0\cos\omega t.\,\omega\, A\sin(\omega t + \varphi) = -\frac{1}{2}\,\omega A F_0\,[\sin\varphi + \sin(2\omega t + \varphi)]$

La puissance moyenne est $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{P}dt = -\frac{1}{2}\omega A F_0\sin\varphi = -\frac{1}{2}\,\omega A F_0\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$

D'après $A = \underline{|A|} = \frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\delta^2\omega^2}}$ et $\tan\varphi = \frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}$: $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\omega^2\delta(F_0^2/a)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}$

$\langle\mathcal{P}\rangle$ est maximale lorsque $\frac{\partial\langle\mathcal{P}\rangle}{\partial\omega} = 0 \Rightarrow \begin{cases}\omega = \omega_0\\ \langle\mathcal{P}\rangle_{max} = F_0^2/4\delta a\end{cases}$

La pulsation ω_{c1} et ω_{c2} pour les quelles $\langle\mathcal{P}\rangle$ est à moitié de son maximum sont appelées **pulsations de coupure**. La largeur $\omega_{c2} - \omega_{c1} = B$ est appelée la **Bande passante**.

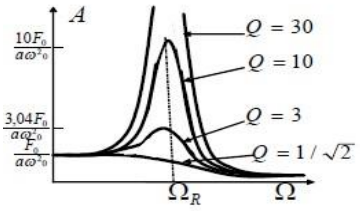
$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\langle\mathcal{P}\rangle_{max}}{2}$ (à faible amortissement : $\delta \ll \omega_0$) pour $\omega_{c1} \approx \omega_0 - \delta$ et $\omega_{c2} \approx \omega_0 + \delta$.

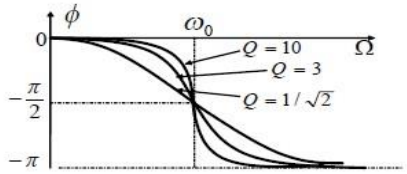
Donc $B = 2\delta$

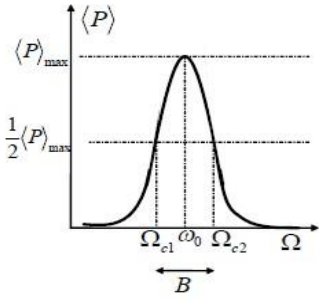
$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ est le facteur de qualité (voir chap. 4).

Les graphes de A, φ, et $\langle\mathcal{P}\rangle$ en fonction de la pulsation d'excitation ω sont représentés ci-dessous :

avec $\lambda = \delta, \Omega = \omega, \Omega_R = \omega_R, \Omega_{c1} = \omega_{c1}\ et\ \Omega_{c2} = \omega_{c2}$:







$A = \frac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}.$ $\quad \phi = \tan^{-1}\left[-\frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right].$ $\quad \langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\Omega^2\lambda(F_0^2/a)}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}$

5.7 Analogie entre les systèmes mécaniques et circuits électriques

Analogie entre les systèmes mécaniques et électriques

Le formalisme développé en cours est valable pour toute coordonnée généralisé q. Dans le cas des systèmes mécaniques q peut être $x, y, z, \theta, ...$, alors que dans le cas des systèmes électriques q est la charge q qui circule dans le circuit. Nous avons alors les tableaux suivants des analogies mécanique-électrique.

Analogie entre grandeurs

Système Mécanique			Système Electrique		
Grandeur	**réelle**	**complexe**	**Grandeur**	**réelle**	**complexe**
Coordonnée	x	$\underline{x}$	Charge	q	$\underline{q}$
Vitesse	$v = \dot{x}$	$\underline{v}=\dot{\underline{x}}$	Courant	$i = \dot{q}$	$\underline{i}=\dot{\underline{q}}$
Force	F	$\underline{F}$	Tension	E	$\underline{E}$

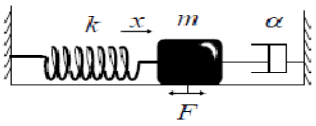
Analogie entre formules

Système Mécanique		Système Electrique	
Formule	**complexe**	**Formule**	**complexe**
Impédance mécanique	$\underline{\mathcal{Z}}=\dfrac{\underline{F}}{\underline{v}}$	Impédance électrique	$\underline{\mathcal{Z}}=\dfrac{\underline{E}}{\underline{i}}$
Force d'inertie	$m\dfrac{d\underline{v}}{dt}=jm\omega\underline{v}$	f.c.e.m d'inductance	$L\dfrac{d\underline{i}}{dt}=jL\omega\underline{i}$
Force de frottement	$\alpha\underline{v}$	Tension d'une résistance	$R\underline{i}$
Force d'un ressort	$k\underline{x}=k\int\underline{v}dt=\dfrac{k}{j\omega}\underline{v}$	Tension d'une capacité	$\dfrac{q}{C}=\dfrac{1}{C}\int\underline{i}dt=\dfrac{1}{jC\omega}\underline{i}$

Analogie entre éléments et caractéristiques

Système Mécanique		Système Electrique	
Ressort	k	Capacité inverse	$\dfrac{1}{C}$
Inertie	m	Inductance	L
Frottement	α	Résistance	R
Pulsation de résonance	$\sqrt{k/m}$	Pulsation de résonance	$1/\sqrt{LC}$
Bande passante	$2\lambda=\alpha/m$	Bande passante	$2\lambda=R/L$
Energie d'un ressort	$\frac{1}{2}kx^2$	Energie d'un condensateur	$\frac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$
Energie cinétique d'un corps	$\frac{1}{2}mv^2$	Energie d'une bobine	$\frac{1}{2}Li^2$
Puissance dissipée par frottement	αv^2	Puissance dissipée par effet Joule	Ri^2

Exemple

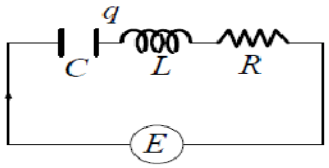


$$-k\underline{x}-\alpha\underline{v}+\underline{F}=m\frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$\underline{F}=\frac{k}{j\omega}\underline{v}+jm\omega\underline{v}+\alpha\underline{v}$$

Impédance mécanique

$$\underline{\mathcal{Z}}=\frac{\underline{F}}{\underline{v}}=\frac{k}{j\omega}+jm\omega+\alpha$$



$$\frac{1}{C}\int\underline{i}dt+L\frac{d\underline{i}}{dt}+R\underline{i}-\underline{E}=0$$

$$\underline{E}=\frac{1}{jC\omega}\underline{i}+jL\omega\underline{i}+R\underline{i}$$

Impédance électrique

$$\underline{\mathcal{Z}}=\frac{\underline{E}}{\underline{i}}=\frac{1}{jC\omega}+jL\omega+R$$

Chapitre6.

Oscillations libres des Systèmes à deux degrés de liberté

6.1 Equations de Lagrange

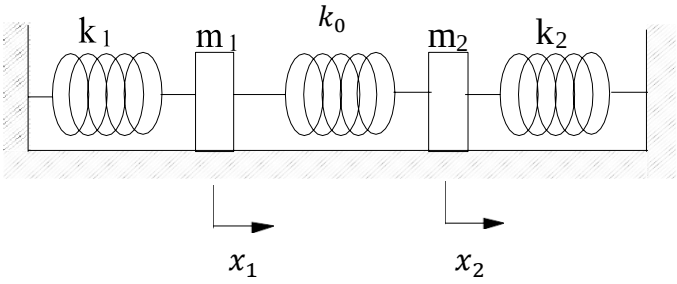
Les systèmes qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté.

Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_1} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_2} = 0 \end{cases}$$

6.2 Système masses-ressorts en translation

Soit le système libre ci-contre. Les deux variables indépendantes sont x_1 et x_2. k_0 est appelé élément de **couplage**.



$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

$\mathrm{E_p} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$

On calcule le lagrangien : $L = \mathrm{E_c} - \mathrm{E_p}$

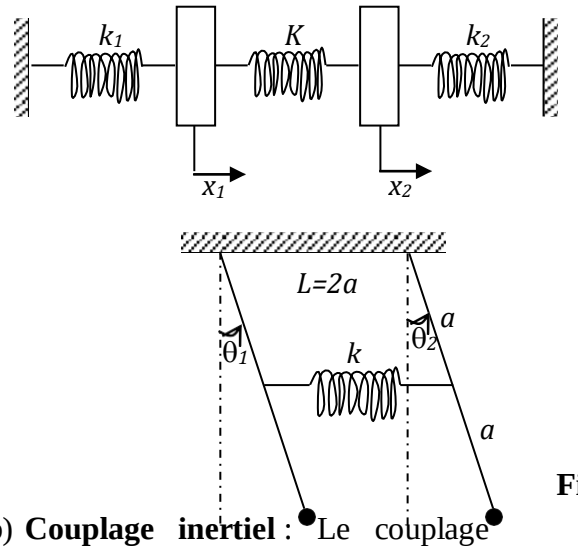
Les deux équations de Lagrange s'écrivent : $Pour\ D = 0, F = 0 : systeme\ non\ amorti\ et\ non\ forcé.$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_1} = 0 \longrightarrow m_1 \ddot{x}_1 + (k_0 + k_1) x_1 - k_0 x_2 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_2} = 0 \longrightarrow m_2 \ddot{x}_2 + (k_0 + k_2) x_2 - k_0 x_1 = 0 \end{cases}$$

Les termes $k_0 x_1\ et\ k_0 x_2$ qui apparaissent respectivement dans la première et la seconde équation sont appelés termes de couplage, et les deux équations déférentielles sont dites couplées.

6.3 Types de couplage

a) **Couplage élastique** : Le couplage entre les deux systèmes est à travers un ressort (capacité).



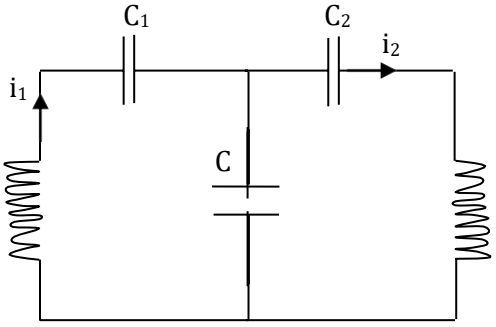
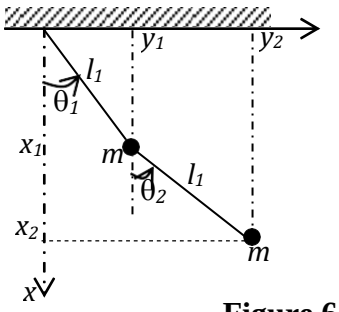


Figure 6. 1 : Différents systèmes mécaniques et électriques couplés par élasticité

b) **Couplage inertiel** : Le couplage entre les deux systèmes est à travers une masse (bobine).



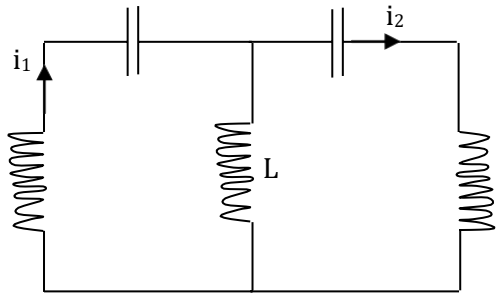
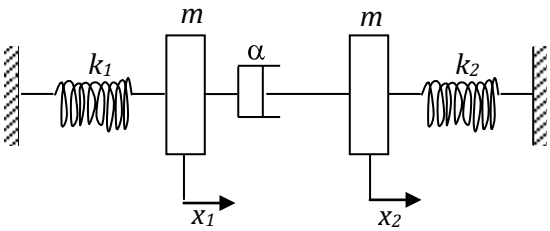


Figure 6. 2 : systèmes mécaniques et électriques couplés par inertie

c) **Couplage visqueux** : Le couplage entre les deux systèmes est à travers un amortisseur (résistance).



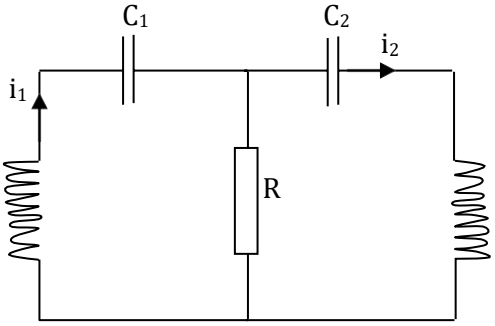


Figure 6. 1: Couplage visqueux des différents systèmes mécanique et électriques

6.4 Résolution des équations différentielles

Les deux solutions de ces deux équations différentielles sont des fonctions périodiques et sont composées de deux fonctions harmoniques de pulsations différentes et d'amplitudes différentes. Supposons que l'une de ces composantes harmoniques s'écrivent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1}(t) = \boldsymbol{A_1}\cos(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi}) \\ \boldsymbol{x_2}(t) = \boldsymbol{A_2}\cos(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi}) \end{cases}$$

Où A_1, A_2 et φ sont des constantes dépendantes des conditions initiales et ω l'une des pulsations propres du système. Pour trouver ω, utilisons la représentation complexe :

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{x_1} = \underline{A_1}e^{j\omega t}$$
$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{x_2} = \underline{A_2}e^{j\omega t}$$

La substitution de $\underline{\boldsymbol{x_1}}$ et $\underline{\boldsymbol{x_2}}$ dans le système d'équations différentielles donne

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k_0 + k_1}{m_1}\right)\underline{A}_1 - \frac{k_0}{m_1}\underline{A}_2 \\ -\frac{k_0}{m_2}\underline{A}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{k_0 + k_2}{m_2}\right)\underline{A}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + a)\underline{A}_1 - b\underline{A}_2 \\ -c\underline{A_1} + (-\omega^2 + d)\underline{A}_2 \end{cases}$$

Ce qui constitue un système d'équations linéaires homogènes dont les inconnues sont $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$. Ce système admet une solution non identiquement nulle seulement si le déterminant Δ(ω) des coefficients de $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ est égal à zéro.

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 + a & -b \\ -c & -\omega^2 + d \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant Δ(ω) est appelé déterminant caractéristique. L'équation Δ(ω) = 0 est appelée **l'équation caractéristique** ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit :

$$\omega^4 - (a + d)\,\omega^2 + (ad - bc) = 0$$

Cette équation est une équation quadratique en ω qui admet deux solutions réelles et positives ω_1 et ω_2 appelées **pulsations propres** du système ou **normales**. La plus petite est appelée la **fondamentale**, l'autre est appelée l'**harmonique.**

Cet exemple montre qu'il y a deux pulsations propres dans un système à deux degrés de liberté. Chacune des coordonnées, $\underline{\boldsymbol{x_1}}$ et $\underline{\boldsymbol{x_2}}$, possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2

$$x_1 = A_1(1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1(2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2 = A_2(1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2(2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Où $A_1(1)$, $A_1(2)$, $A_2(1)$, $A_2(2)$, φ_1 et φ_2 sont des constantes. Le terme de plus basse fréquence correspondant à la pulsation ω_1 est appelé le fondamental. L'autre terme, de pulsation ω_2, est appelé harmonique. Les doubles indices sont utilisés pour les amplitudes des différentes composantes harmoniques ; le premier indice se réfère à la coordonnée et le second à la pulsation. Par exemple $A_1(2)$ est l'amplitude de $x_1(t)$ à la pulsation ω_2.

- **Premier mode propre** :

Lorsque $A_1(2) = A_2(2) = 0$, x_1 et x_2 correspondent à la première solution particulière sont des fonctions sinusoïdales, **en phase**, de pulsation ω_1, on dit que le système oscille dans le premier mode.

Pour $\omega = \omega_1$, le système $\begin{cases} (-\omega_1^2 + a)\underline{A}_1(1) - b\underline{A}_2(1) \\ -c\underline{A_1(1)} + (-\omega_1^2 + d)\underline{A}_2(1) \end{cases} \Longrightarrow : \mu_1 = \frac{\underline{A_1(1)}}{\underline{A_2(1)}} = \frac{-\omega_1^2+d}{c} > 0.$

Dans ce cas $$\begin{cases} x_1 = A_1(1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2(1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

- **Deuxième mode propre** :

Lorsque $A_1(1) = A_2(1) = 0$, x_1 et x_2 correspondent à la seconde solution particulière et sont des fonctions sinusoïdales, **en opposition de phase**, de pulsation ω_2 , on dit que le système oscille dans le second mode.

Pour $\omega = \omega_2$, le système $\begin{cases} (-\omega_2^2 + a)\underline{A}_1(2) - b\underline{A}_2(2) \\ -c\underline{A}_1(2) + (-\omega_2^2 + d)\underline{A}_2(2) \end{cases} \Longrightarrow : \mu_2 = \frac{\underline{A_1(2)}}{\underline{A_2(2)}} = \frac{-\omega_2^2+d}{c} < 0.$

Dans ce cas $$\begin{cases} x_1 = A_1(2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A_2(2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans le cas général, le système vibre dans une **superposition** de ces deux modes propres.
Donc la solution générale (x_1 , x_2) est une combinaison linéaire de ces deux solutions particulières. x_1 et x_2 s'écrivent alors

$$x_1 = A_1(1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1(2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2 = \frac{1}{\mu_1}A_1(1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{1}{\mu_2}A_1(2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Où $A_1(1)$, $A_1(2)$, φ_1 et φ_2 sont des constantes d'intégration dont les valeurs sont fixées par les conditions initiales.

Chapitre7.

Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

7.1 Equations de Lagrange

Soit un système à deux degrés de liberté, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, à des forces de frottement de viscosité et des forces extérieures. Si les coordonnées généralisées sont q_1 et q_2, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_1} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + F_{q1} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_2} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} + F_{q2} \end{cases}$$

Dans cette expression F_{q1} et F_{q2} sont les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées respectives q_1 et q_2. Elles sont respectivement définies par

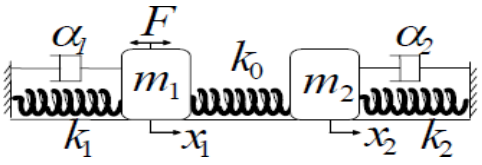
$F_{q1} = \left.\dfrac{\partial W_1}{\partial q_1}\right|_{\substack{\partial q_1 \neq 0 \\ \partial q_2 = 0}}$, dans cette expression ∂W_1 représente le travail des forces extérieures pour une variation ∂q_1 de la coordonnée q_1, lorsque $\partial q_2 = 0$.

$F_{q2} = \left.\dfrac{\partial W_2}{\partial q_2}\right|_{\substack{\partial q_2 \neq 0 \\ \partial q_1 = 0}}$, dans cette expression ∂W_2 représente le travail des forces extérieures pour une variation ∂q_2 de la coordonnée q_2, lorsque $\partial q_1 = 0$.

7.2 Système masses-ressorts-amortisseurs

Pour étudier les particularités des oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté, étudions le système symétrique suivant soumis à une force horizontale F, appliquée à la première masse.

Soit le système ci- contre.



$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

$\mathrm{E_p} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$

On calcule le lagrangien : $L = \mathrm{E_c} - \mathrm{E_p}$, les deux équations de Lagrange s'écrivent :

Ou $\mathrm{D} = \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \dot{x}_2^2$ *et* $\mathrm{F} = F_0 \cos \omega t$.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_1} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + F \longrightarrow m_1\ddot{x}_1 + (k_0 + k_1)x_1 + \alpha_1\dot{x}_1 - k_0x_2 = F_0 cos\ \omega t \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_2} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \quad \longrightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + (k_0 + k_2)x_2 + \alpha_2\dot{x}_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

7.2.1 Résonance et antirésonance

Avec $D = 0$ *et* $F \neq 0$: *systéme forcé mais non amorti.*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_1} = F \quad \longrightarrow m_1\ddot{x}_1 + (k_0 + k_1)x_1 - k_0x_2 = F_0 cos\ \omega t \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_2} = 0 \quad \longrightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 + (k_0 + k_2)x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

La solution générale de système d'équations déférentielles est égale à la solution du système homogène et d'une solution particulière. La solution de l'équation homogène,en raison de l'amortissement, tend vers zéro lorsque le temps augmente. Lorsque le régime permanent s'établit, la solution devient égale à la solution permanente et s'écrit alors :

La solution permanente du système est **:**

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

A_1, A_2, φ_1 et φ_2 dépendent de la pulsation d'excitation ω et de F_0.

Pour trouver A_1, A_2, utilisons La représentation complexe :

$F(t) = F_0 \cos \omega t \rightarrow \underline{F}(t) = F_0 e^{j\omega t}$

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \underline{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \underline{A}_1 e^{j\omega t}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \underline{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \underline{A}_2 e^{j\omega t}$$

En remplacent dans le système on aura :

$$\begin{matrix} m_1\ddot{\underline{x}}_1 + (k_0 + k_1)\underline{x}_1 - k_0\underline{x}_2 = F_0 e^{j\omega t} \\ m_2\ddot{\underline{x}}_2 + (k_0 + k_2)\underline{x}_2 - k_0\underline{x}_1 = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k_0 + k_1}{m_1}\right)\underline{A}_1 - \frac{k_0}{m_1}\underline{A}_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ -\frac{k_0}{m_2}\underline{A}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{k_0 + k_2}{m_2}\right)\underline{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Pour simplifier nos calcule on prend le c**as où** : $m_1 = m_2 = m$ *et* $k_0 = k_1 = k_2 = k$.

En Posant $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, le système devient :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + 2\,\omega_0^2)\,\underline{A}_1 - \omega_0^2\,\underline{A}_2 = \frac{F_0}{m} \\ -\,\omega_0^2\,\underline{A}_1 + (-\omega^2 + 2\,\omega_0^2)\,\underline{A}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad A_1 = \frac{F_0}{m}\frac{|2\,\omega_0^2 - \omega^2|}{\left|(2\,\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4\right|}$$

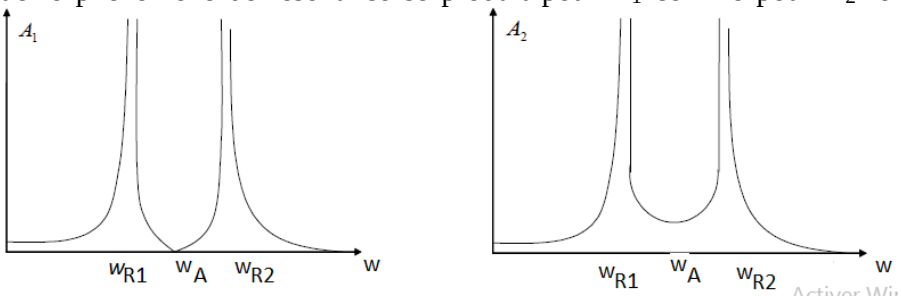
$$A_2 = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2}{\left|(2\,\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4\right|}$$

- Donc, $A_1 = A_2 = \infty$ lorsque

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \equiv \omega_{R1} (\text{appelée premiére pulsation de résonance}) \\ \omega = \sqrt{3}\omega_0 \equiv \omega_{R2} (\text{appelée deuxiéme pulsation de résonance}) \end{cases}$$

- $A_1 = 0$ lorsque $\omega = \sqrt{2}\omega_0 \equiv \omega_A$. ($appelée\ pulsation\ d'\boldsymbol{antirésonance}$.)

On remarque que le phénomène de résonance se produit pour A_1 comme pour A_2 lorsque la pulsation



d'excitation ω est égale à l'une des pulsations propres ω_{R1} ou ω_{R2} du système. L'amortissement étant nul, les amplitudes à la résonance sont très importantes. Lorsque la pulsation ω devient très grande, ces amplitudes tendent vers zéro. Enfin lorsque $\omega = \omega_A$, l'amplitude A_1 est égale à zéro pour cette raison, la pulsation ω_A est appelée pulsation d'antirésonance.

7.3 Impédance d'entrée et de transfert

$Avec\ D \neq 0\ et\ F \neq 0 : Systéme\ amorti\ et\ forcé.$

En électricité, l'impédance est définie en nombres complexes par $\underline{z} = \frac{\underline{F}}{\underline{i}_1}$. Par analogie, on définit l'impédance mécanique par $\underline{z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}}$. $\underline{z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_1}$ est appelée impédance d'entrée. $\underline{z}_T = \frac{\underline{F}}{\underline{v}_2}$ est appelée impédance de transfert. Pour les trouver on utilise encore la représentation complexe :

$$F(t) \rightarrow \underline{F}(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

$$\boldsymbol{x_1} \longrightarrow \underline{\boldsymbol{x}}_1 = \underline{\boldsymbol{A}}_1 \boldsymbol{e^{j\omega t}} \qquad \boldsymbol{x_2} \longrightarrow \underline{\boldsymbol{x}}_2 = \underline{\boldsymbol{A}}_2 \boldsymbol{e^{j\omega t}}$$

$$\underline{v}_1 = j\omega \underline{x}_1 \Longrightarrow \underline{x}_1 = \frac{\underline{v}_1}{j\omega} \qquad \underline{v}_2 = j\omega \underline{x}_2 \Longrightarrow \underline{x}_2 = \frac{\underline{v}_2}{j\omega}$$

$$\ddot{\underline{x}}_1 = j\omega \underline{v}_1 \qquad \ddot{\underline{x}}_2 = j\omega \underline{v}_2$$

En remplacent dans le système on aura :

$$\begin{matrix} m_1 \ddot{\underline{x}}_1 + (k_0 + k_1)\underline{\boldsymbol{x}}_1 + \alpha_1 \dot{\underline{\boldsymbol{x}}}_1 - k_0 \underline{x}_2 = \underline{F} \\ m_2 \ddot{\underline{x}}_2 + (k_0 + k_2)\underline{x}_2 + \alpha_2 \dot{\underline{\boldsymbol{x}}}_2 - k_0 \underline{\boldsymbol{x}}_1 = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} \left(j\omega m_1 + \frac{k_0}{j\omega} + \frac{k_1}{j\omega} + \alpha_1\right)\underline{v}_1 - \frac{k_0}{j\omega}\underline{v}_2 = \underline{F} \\ \left(j\omega m_2 + \frac{k_0}{j\omega} + \frac{k_2}{j\omega} + \alpha_2\right)\underline{v}_2 - \frac{k_0}{j\omega}\underline{v}_1 = 0 \end{cases}$$

En Posant : $j\omega m_1 + \frac{k_1}{j\omega} + \alpha_1 = \underline{z}_1, j\omega m_2 + \frac{k_2}{j\omega} + \alpha_2 = \underline{z}_2\ et \frac{k_0}{j\omega} = \underline{z}_0$

$$\begin{cases}(\underline{z_1}+\underline{z_0})\underline{v_1}-\underline{z_0}\underline{v_2}=\underline{F}\\(\underline{z_2}+\underline{z_0})\underline{v_2}-\underline{z_0}\underline{v_1}=0\end{cases}\Rightarrow \underline{F}=\left(\underline{z_1}+\underline{z_0}-\frac{\underline{z_0^2}}{\underline{z_2}+\underline{z_0}}\right)\underline{v_1}=\left(\underline{z_1}+\frac{\underline{z_2}\underline{z_0}}{\underline{z_2}+\underline{z_0}}\right)\underline{v_1}$$

- L'impédance d'entrée est : $\underline{z_E}=\frac{\underline{F}}{\underline{v_1}}=\underline{z_1}+\frac{\underline{z_2}\underline{z_0}}{\underline{z_2}+\underline{z_0}}\equiv \underline{z_1}+\underline{z_2}\,//\,\underline{z_0}$
- L'impédance de transfert est : $\underline{z_T}=\frac{\underline{F}}{\underline{v_2}}=\underline{z_1}+\underline{z_2}+\frac{\underline{z_1}\underline{z_2}}{\underline{z_0}}$

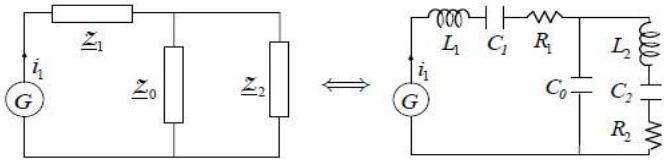
A l'aide de l'analogie de Maxwell,

$$\begin{gathered}m_1\longleftrightarrow L_1,\ m_2\longleftrightarrow L_2,\\ \alpha_1\longleftrightarrow R_1,\ \alpha_2\longleftrightarrow R_2,\\ k_0\longleftrightarrow 1/C_0,\ k_1\longleftrightarrow 1/C_1,\ k_2\longleftrightarrow 1/C_2,\end{gathered}$$

on conclut que:

$\underline{Z}_1 \Longleftrightarrow$ impédance(L_1) + condensateur(C_1) + résistance(R_1).
$\underline{Z}_2 \Longleftrightarrow$ impédance(L_2) + condensateur(C_2) + résistance(R_2).
$\underline{Z}_0 \Longleftrightarrow$ condensateur(C_0).

D'où le circuit électrique équivalent suivant:



7.4 Généralisation aux systèmes à N degré de liberté

Les variables indépendantes nécessaires à la description d'un système en mouvement sont appelées **degrés de liberté**. S'il y'a N variables indépendantes q_i, on écrit N équations de Lagrange :

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_1}=-\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_1}+\mathrm{F}_1(\mathrm{t})\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_2}=-\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_2}+\mathrm{F}_2(\mathrm{t})\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_N}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_N}=-\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_N}+\mathrm{F}_N(\mathrm{t})\end{cases}$$

DEUXIEME PARTIE

ONDES

Chapitre1.

Phénomène de propagation à une dimension

1.1 Généralité et définition de base

Une onde est un phénomène physique de propagation d'une perturbation. Sur son passage, une onde modifie de façon réversible des propriétés locales du milieu de propagation.

Un exemple courant d'onde est la propagation des cercles lorsqu'on jette un caillou dans un lac.

Une onde se caractérise par 3 dimensions physiques :

– la longueur

– la fréquence

– la vitesse de propagation

Ce qui va nous intéresser tout particulièrement, c'est qu'une onde transporte de l'énergie sans transporter de matière.

Cette énergie est utilisée dans beaucoup de domaine. Dans le cas du spectre violet et ultraviolet, les panneaux photovoltaïques récupèrent l'énergie des ondes pour générer de l'électricité. Les chauffe-eaux solaires, quant à eux exploitent les spectres infra-rouges. Les fours à micro-ondes, exploitent l'énergie d'une onde électro-magnétique pour agiter les molécules d'eau et donc chauffer les aliments.

Dans le cas des ondes radios, l'énergie provoque la circulation d'un courant électrique dans une antenne qui est transformée en information analogique (son, image) ou numérique.

1.1.1 Les dimensions physiques d'une onde

- **La longueur**

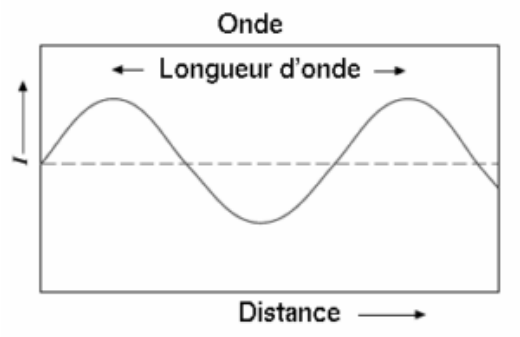
Définit la distance entre deux maximas de l'onde.

- **La fréquence**

Le nombre de fois que le phénomène d'onde se répète en une seconde.

- **La vitesse de propagation**

La vitesse à laquelle se propage cette onde dans l'espace.



1.2 Equation de propagation

Dans les phénomènes vibratoires traités dans la première partie, nous nous sommes intéressés à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, le temps. Nous allons maintenant examiner toute une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps t et d'une variable d'espace *x* par exemple. Ces phénomènes sont régis par une équation aux dérivées partielles, appelée équation d'onde ou équation de propagation à une dimension de la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Dans laquelle ***v*** est la vitesse de propagation

1.3 Solution de l'équation de propagation (Méthode de D'Alembert)

On se propose de résoudre l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

Ainsi, **s (x, t)** représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse ***v*** le long de l'axe (Ox).

De manière symbolique, cette équation peut s'écrire :

$$\left(v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(v\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)s = 0$$

On pose : $p = t + \frac{x}{v}$ et $q = t - \frac{x}{v}$, *e*t, en considérant x et t comme des fonctions de p et de q :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}$$

On en déduit : $v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial p}$ et $v\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} = -2\frac{\partial}{\partial p}$

L'équation de d'Alembert prend alors la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right) = 0$$

Une intégration par rapport à q donne : $\frac{\partial s}{\partial q} = f(p)$

Où f(p) est une fonction qui ne dépend que de p (et pas de q). Enfin une intégration par rapport à q donne :

$$s(q, p) = F(q) + G(p)$$

Où F (q), qui ne dépend que de q, est une primitive de f (q). La fonction G (p) est une fonction qui ne dépend que de p. En revenant aux variables *x* et t, on obtient la solution générale de l'équation des ondes à une dimension :

$$\mathbf{s\ (x,\ t) = F}\left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{+ G}\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Les fonctions $= \mathbf{F}\left(t - \frac{x}{v}\right)$ **et** $\mathbf{G}\left(t + \frac{x}{v}\right)$ sont des fonctions dont la nature est fixée par les conditions aux frontières imposées à la solution s (x, t).

1.4 Onde progressive sinusoïdale

On considère une onde progressive se propageant dans la direction de l'axe des *x*, telle que le point d'abscisse $x = 0$ est soumis à une vibration sinusoïdale de la forme :

$$s(x = 0, t) = S_0 \cos(\omega t)$$

Le point se trouvant à l'abscisse $x > 0$ aura la même vibration que celle du point $x = 0$ mais avec un retard égal à $\frac{x}{v}$: $s(x, t) = S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$

Cette expression constitue la définition d'une onde progressive sinusoïdale (ou harmonique) ; elle peut être écrite sous la forme : $s(x, t) = S_0 \cos[\omega t - \varphi(x)]$

Où $\varphi(x) = \left(\omega\frac{x}{v}\right)$ représente le déphasage lié au temps de propagation $\frac{x}{v}$. On dit que $\varphi(x)$ représente le déphasage dû à la propagation. L'onde progressive sinusoïdale s'écrit sous la forme suivante qui permet de mettre en évidence la double périodicité (dans le temps et dans l'espace) :

$$s(x, t) = S_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

La quantité $T = 2\pi/\omega$ est la période temporelle tandis que la quantité $\lambda = vT$ est la longueur d'onde qui constitue la période spatiale. On peut vérifier aisément que :

$$s(x, t + nT) = s(x, t)$$

$$s(x + n\lambda) = s(x, t)$$

Où n est un nombre entier.

L'onde progressive s'écrit souvent : $s(x, t) = S_0 \cos[\omega t - kx]$

Où $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ est appelé le module du vecteur d'onde qui s'exprime en m^{-1}. On utilise très souvent la notation complexe d'une onde progressive sinusoïdale :

$$s(x, t) = S_0\, e^{i(\omega t - kx)}$$

$$s(x, t) = \underline{S}\, e^{i\omega t}$$

Où $\underline{S} = S_0\, e^{-ikx}$ représente l'amplitude complexe de l'onde progressive sinusoïdale. Le module S_0 de $\underline{S}$ est l'amplitude de l'onde tandis que son argument $-kx$ représente le déphasage dû à la propagation.

1.5 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales

a. Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans le même sens

Considérons deux ondes de même fréquence et de même direction de propagation, d'amplitudes respectives S_1 et S_2, et de phases respectives φ_1 et φ_2. L'onde résultante sera alors :

$$s(x, t) = S_1\, e^{j(\omega t - kx + \varphi 1)} + S_2\, e^{j(\omega t - kx + \varphi 2)} = S\, e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$$

Ou encore en notation réelle : $s(x, t) = S \cos(\omega t - kx + \varphi)$

avec $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

et $\varphi = \text{Arctg}\ \frac{S_1 \sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\varphi_2)}{S_1 \cos(\varphi_1) + S_2 \cos(\varphi_2)}$

La superposition de deux ondes harmoniques de même fréquence, et qui se propagent dans la même direction, donne une autre onde harmonique progressive de même fréquence, d'amplitude S et de phase φ.

b. Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans des sens opposés

Si par contre, on superpose deux ondes harmoniques de même fréquence mais se propageant dans des sens opposés, le résultat est tout autre. En effet, dans ce cas :

$$s(x, t) = S_1 e^{j(\omega t - kx + \varphi 1)} + S_2 e^{j(\omega t + kx + \varphi 2)} = [S_1 e^{j\varphi 1} e^{-jkx} + S_2 e^{j\varphi 2} e^{+jkx}]\ e^{j\omega t}$$

Un cas particulier important se produit quand les deux amplitudes sont identiques. Si on note:

$$S_1 = S_2 = S_0$$

On a: $s(x, t) = 2S_0\, cos\left(kx + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) e^{j\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}$

Et donc en notation réelle : $s(x, t) = 2S_0\, cos\left(kx + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) cos\left(kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$

Ce mode de vibration est très différent d'une onde progressive puisque tous les points *x* de la corde vibrent en phase avec des amplitudes différentes. En particulier, il existe une série de points

$$x_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi}\right]\frac{\lambda}{2}$$

Avec $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Où l'amplitude de vibration est constamment nulle. On dit dans ce cas que l'onde est stationnaire et que les points x_n sont les nœuds de l'onde. Entre chaque paire de nœuds existe un ventre où l'amplitude de vibration est maximum et égale à $2S_0$. On note aussi que l'intervalle entre deux nœuds est égal à une demi-longueur d'onde λ/2.

Chapitre2.

Cordes vibrantes

2.1 Equation des ondes

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée x, et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cet ébranlement se produise suivant l'axe Oy.

Etudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par T la tension à laquelle est soumise la corde. On considère en un point d'abscisse x un segment très court decette corde, de longueur Δx. La masse Δm du segment est donnée par :

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

Où μ est la densité linéique de masse de la corde, c'est-à-dire la masse par unité de longueurqui s'exprime en *kg/m*.

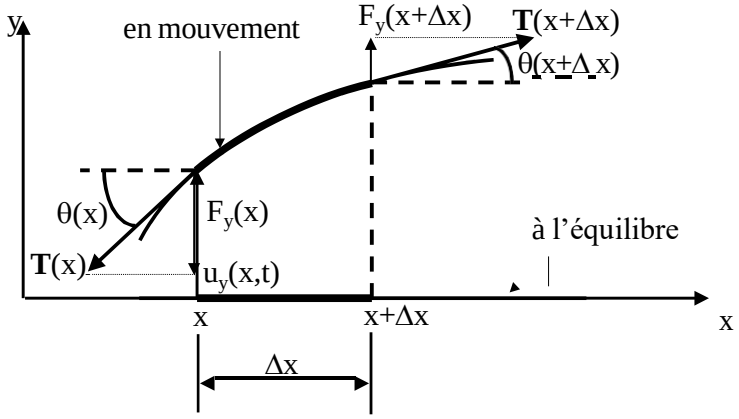


Figure 2. 1: Corde vibrante transversalement

Dans une situation hors équilibre, le segment n'est plus droit, il présente une courbure. Nous considérons des mouvements d'oscillation de la corde de petites amplitudes.

$$\vec{u}\,(x,t) = \vec{u}\,(x,t)\vec{e}_y$$

si bien que nous pouvons faire l'approximation :

$$\sin(\theta)|_x = \tan(\theta)|_x = \frac{\partial u}{\partial x}|_x$$

$$\sin(\theta)|_{x+\Delta x} = \tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\Delta x}$$

Cette approximation néglige aussi l'allongement du segment, et considère donc la tension T constante. La force appliquée sur le segment dans la direction y est la résultante de la force appliquée au point *x*, qui est une force appliquée vers le bas et égale en module à

$$F(x,t) = \mathrm{T}\sin(\theta)|_{x} \cong \mathrm{T}\tan(\theta)|_{x} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}|_{x}$$

et de la force appliquée au point $x+\Delta x$ qui est vers le haut et égale à

$$F(x+\Delta x\,,t) = \mathrm{T}\sin(\theta)|_{x+\Delta x} \cong \mathrm{T}\tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}|_{x+\Delta x}$$

La force totale dans la direction y est donc :

$$R = F(x+\Delta x\,,t) - F(x,t) = \mathrm{T}\left[\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}|_{x+\Delta x} - \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}|_{x}\right] \cong \mathrm{T}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2}\Delta x$$

Nous pouvons appliquer maintenant la loi fondamentale de la dynamique au segment Δx. La force dans la direction y doit être égale au produit de la masse Δm du segment par l'accélération de celui-ci. Donc

$$R = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2}\Delta \mathrm{m}$$

$$\mu\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2} = T\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}$$

Si on définit $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ qui a la dimension d'une vitesse, on constate que

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2} = 0$$

qui est l'équation d'ondes de la corde. *v* qui est la vitesse de propagation de cette onde.

2.2 Ondes progressives harmoniques

Une onde progressive harmonique se propageant selon Ox est définie par :

$$\mathrm{u}\,(x,\,\mathrm{t}) = \mathrm{U}_0\cos(\omega \mathrm{t} - \mathrm{k}x)$$

ou encore en notation complexe

$$\mathrm{u}\,(x,\,\mathrm{t}) = \mathrm{U}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega \mathrm{t} - \mathrm{k}x)}$$

où $\mathrm{k} = \omega/v = 2\pi/\lambda$ est le module du vecteur d'onde, λ étant la longueur d 'onde.

2.3 Oscillations libres d'une corde de longueur finie

Considérons une corde de longueur *L* fixe aux points $x = 0$ et $x = L$. Recherchons unesolution de l'équation d'onde sous la forme :

$$u\,(x,t) = g\,(x)\,f\,(t)$$

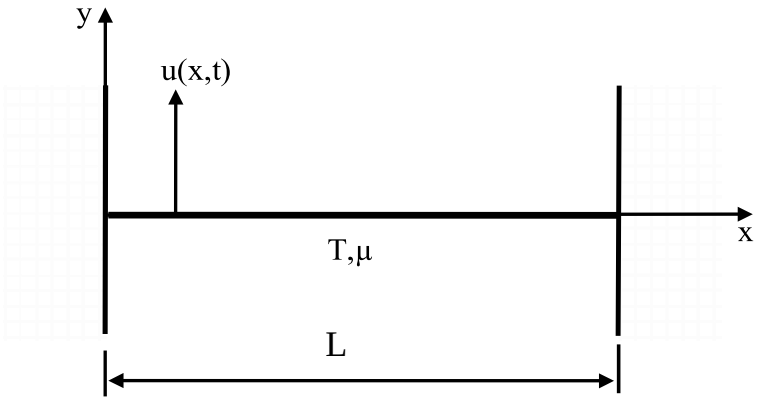


Figure 2. 2: Corde de longueur L fixée aux extrémités

En remplaçant dans l'équation de propagation, on obtient :

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que de *x*, tandis que le membre de gauche ne dépend que de *t*. Ces deux expressions sont donc égales à une constante qui doit être un nombre réel négatif que nous posons égal à $-k^2$ car la solution ne doit pas tendre vers l'infini lorsque *t* tend vers l'infini. Posons $\omega = kv$. On en déduit que :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -k^2 g$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont de la forme :

$$f = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$g = C\cos(kx) + D\sin(kx)$$

2.4 Réflexion et transmission

Soit deux cordes de longueur semi-infinie, reliées en $x = 0$. Leurs masses linéiques sont respectivement μ_1 et μ_2. Lorsqu'une onde venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$ dans la première corde, elle donne naissance au point de jonction, $x = 0$, à une onde réfléchie et une onde transmise. L'écriture de la continuité du déplacement et de la force en $x = 0$ permet d'obtenir le coefficient de réflexion R_u et le coefficient de transmission T_u définis respectivement par :

$$Ru = U_R / U_i$$

$$Tu = U_T / U_i$$

où U_i , U_R et U_T sont les amplitudes des déplacements associés respectivement à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. On en déduit :

$$R_u = (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$$

$$T_u = 2Z_1 / (Z_1 + Z_2)$$

Chapitre3.

Ondes acoustiques dans les fluides

3.1 Introduction

Les ondes acoustiques sont des ondes élastiques qui se propagent dans les fluides (gaz ou liquides). Il est donc possible d'obtenir l'équation d'onde qui régit la propagation des ondes planes dans un fluide par la même démarche que celle que nous avons utilisée pour établir l'équation de propagation des ondes transversales dans une corde.

Dans la suite, nous utiliserons les symboles suivants pour étudier l'onde acoustique qui se propage suivant l'axe des x :

x : coordonnée à l'équilibre d'une particule du milieu.

u_x : composante suivant l'axe des x du déplacement de particule par rapport à la position d'équilibre.

ρ_0 : masse volumique du fluide à l'équilibre

P : pression instantanée en un point quelconque

P_0 : pression à l'équilibre

$p = P - P_0$: surpression ou pression acoustique

c : vitesse de propagation de l'onde

On entend par particule, un élément de volume contenant des millions de molécules de telle sorte qu'il puisse être considéré comme continu, mais toutefois suffisamment petit pour que les grandeurs acoustiques comme la pression, la masse volumique et la vitesse de particule puissent être considérées comme constantes dans cet élément de volume. Dans ce qui suit, nous négligerons les effets de la gravitation de telle sorte que P_0 et ρ_0 sont uniformes dans tout le milieu. On suppose d'autre part que le milieu est homogène, isotrope et parfaitement élastique, c'est-à-dire non dissipatif.

3.2 Equation d'onde

Considérons le cas d'une onde plane émise dans un fluide par une membrane vibrante plane. Lorsque celle-ci est au repos, la pression dans le fluide est uniforme et égale à P_0. En se déplaçant, par exemple dans le sens des x positifs, la membrane comprime la couche de fluide adjacente.

Cette situation est instable : le fluide se détend en comprimant à son tour la tranche voisine. L'onde progresse ainsi de proche en proche par une succession de compressions et de détentes.

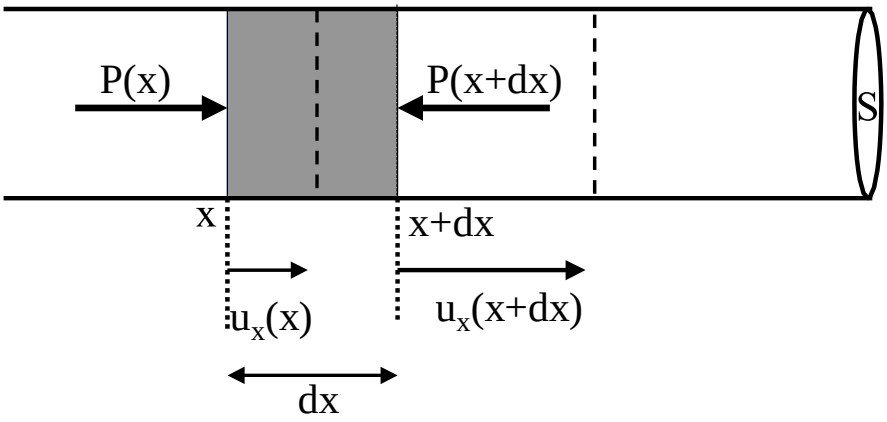


Figure 3. 1: Propagation d'une onde acoustique

Soit une tranche de fluide de petite épaisseur Δx située à l'abscisse x. Lorsque la perturbation atteint ce point, les forces agissant sur cette tranche ne s'équilibrent plus et elle se met en mouvement.

Soit $u_x(x, t)$ le déplacement à l'instant t du plan d'abscisse x. Soient $F_x(x, t)$ et $F_x(x + \Delta x, t)$ les forces agissant sur la tranche de fluide respectivement en x et $x + \Delta x$. Ces forces s'expriment par :

$$F_x(x, t) = S\,P(x, t)$$

$$F_x(x + \Delta x, t) = -S\,P(x + \Delta x, t)$$

La résultante de ces deux forces est :

$$\Delta F_x = F_x(x, t) + F_x(x + \Delta x, t)$$

$$\Delta F_x = -S\,[P(x + \Delta x, t) - P(x, t)]$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $P(x, t)$, on obtient :

$$P(x + \Delta x, t) = P(x, t) + (\partial P/\partial x)\,\Delta x$$

D'où : $$\Delta F_x = -S\,(\partial P/\partial x)$$

Comme $P = P_0 + p$, la force résultante s'exprime par :

$$\Delta F_x = -S\,(\partial p/\partial x)\,\Delta x$$

Sous l'action de cette force, la tranche de fluide subit une accélération et en écrivant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\Delta m\,(\partial^2 u_x/\partial t^2) = -S\,(\partial p/\partial x)\,\Delta x$$

Le fluide étant compressible, le déplacement du plan d'abscisse $x + \Delta x$ est différent du déplacement du plan d'abscisse x et il vaut $u_x(x + \Delta x, t)$. De nouveau un développement en série de Taylor au premier ordre permet d'écrire : $$u_x(x + \Delta x, t) = u_x(x, t) + (\partial u_x/\partial x)\,\Delta x$$

Pour prendre en compte la compressibilité du fluide, calculons la dilatation volumique subies par la tranche de fluide. Soit $\Delta v_0 = S\,\Delta x$, le volume à l'équilibre et soit Δv, le volume en cours de mouvement, avec $$\Delta v = S\,[x + \Delta x + u_x(x + \Delta x) - x - u_x(x)]$$

$$\Delta v = S\,[\Delta x + u_x(x + \Delta x) - u_x(x)]$$

$$\Delta v = S\,[\Delta x + (\partial u_x/\partial x)\,\Delta x]$$

$$\Delta v = \Delta v_0 + (\partial u_x/\partial x)\,\Delta v_0$$

On en déduit la dilatation volumique

$$\theta = (\Delta v - \Delta v_0) / \Delta v_0$$

$$\theta = \partial u_x / \partial u$$

Rappelons que pour un fluide compressible, la surpression p est reliée à la dilatation volumique θ par la relation : $p = -\kappa\,\theta$

Où κ est le module de compressibilité, on obtient ainsi : $p = -\kappa\,(\partial u_x / \partial x)$

Remarque : On utilise souvent le coefficient de compressibilité $\chi = 1 / \kappa$.

Les deux équations :

$$\rho_0\,(\partial^2 u_x / \partial t^2) = -(\partial p / \partial x)$$

$$p = -\kappa\,(\partial u_x / \partial x)$$

Constituent les deux équations fondamentales de l'acoustique. En remplaçant dans la première équation p par son expression tirée de la seconde équation on obtient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Où *v* représente la vitesse de propagation définie par $v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$

3.3 Vitesse du son

Le phénomène de propagation étant un processus adiabatique, la relation liant la pression et le volume est : Pv^γ = constante, en calculant la différentielle, on obtient :

$$v^\gamma\,dP + P\,v^{\gamma-1}\,dv = 0$$

Si l'on considère que dP représente la variation de pression au voisinage de la pression à l'équilibre P_0, on obtient : $v_0^\gamma p + \gamma P_0 v_0^{\gamma-1}\Delta v = 0$

D'où : $p = -\gamma P_0\,(\Delta v / v_0)$

En tenant compte de la définition du module de compressibilité, on obtient : $\kappa = 1 / \chi = \gamma P_0$

D'où la vitesse du son dans un fluide : $V = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$

Exemple : Dans l'air, dans les conditions normales T = 20°C, $P_0 = 10^5$ N.m^{-2}, $\rho_0 = 1.29$ kg.m^{-3} et $\gamma = 1.4$ on en déduit $V \simeq 330$ m · s^{-1}

La valeur de la pression à l'équilibre dépend fortement de la température. Pour une mole de gaz parfait, on a : $P_0 v_0 = RT$ d'où $P_0 = (RT)/ v_0$

Et $V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\rho_0 v_0}}$

Le produit $\rho_0 v_0$ représente la masse molaire M du gaz ; d'où : $V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

Dans un gaz parfait, la vitesse de propagation du son est proportionnelle à la racine carrée de la température mesurée en °K.

Chapitre4.

Ondes électromagnétiques

4.1 Equations de Maxwell

Ce sont des relations de types vectoriels liants le champ électrique au champ magnétique avec des paramètres traduisant la matière (Perméabilité μ, Permittivité ε, Conductivité σ) dans laquelle se propage l'onde électromagnétique. Les équations de Maxwell seront données par :

$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt}$: L'équation de Maxwell-Faraday : C'est la forme différentielle de la loi de Faraday du britannique Michael Faraday.

$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$: L'équation de Maxwell-Gauss : C'est la forme différentielle de la loi de Gauss de l'allemand Carl Friedrich Gauss connue aussi par la loi de Gauss électrique.

$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$: L'équation de Maxwell-Ampère : C'est la forme différentielle de la loi d'Ampère du Physicien français André-Marie Ampère.

$\text{Div}\vec{B} = 0$: L'équation de Maxwell-Flux magnétique : Le champ magnétique est à flux constant, c'est la loi de Gauss magnétique.

Où

$\vec{E}$: Champ électrique (V/m)

$\vec{H}$: Champ magnétique (A/m)

$\vec{D}$: Induction électrique (coulomb/m²) : $\vec{D} = \varepsilon.\vec{E}$ (ε : Permittivité diélectrique (F/m))

$\vec{B}$: Induction magnétique (Tesla) : $\vec{B} = \mu.\vec{H}$ (μ : Perméabilité magnétique (H/m))

$\vec{J}$: Courant de conduction (A/m) : $\vec{J} = \sigma.\vec{E}$ (σ : Conductivité électrique (Ω-1/m))

ρ : Densité de charge (Coulomb/m^3)

4.2 Onde Electromagnétique

Le but principal est la transmission de l'information (parole, image etc…) d'un point à un autre dans l'espace libre. Cette transmission s'effectue sous un aspect électromagnétique.

La transmission de l'information en espace libre nécessite des antennes, l'une à l'émission et l'autre à la réception (Figure. 4.1).

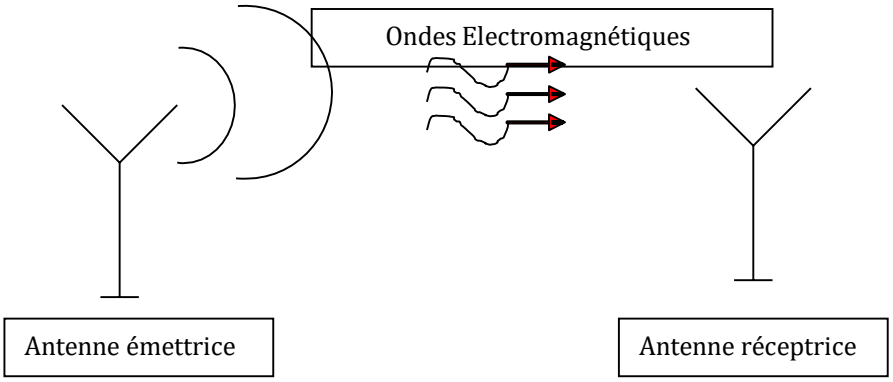


Figure 4. 1: Schéma de principe de transmission de l'information en espace libre

- L'antenne émettrice, qui est parcourue par un courant électrique, engendre dans l'espace une onde électromagnétique composée d'un champ électrique E et d'un champ Magnétique H. Cette onde gagne de proche en proche tout le milieu ; ***c'est ce qu'onappelle la propagation des ondes électromagnétiques***.
- Le récepteur reçoit l'onde électromagnétique et la transforme en un courant électrique.
- Le milieu de propagation est caractérisé par des paramètres influents sur la propagation des ondes électromagnétiques tels que :

  - La Perméabilité magnétique μ (H/m)
  - La Permittivité diélectrique ε (F/m)
  - La Conductivité électrique σ (Ω^{-1}/m)

Remarque :

1) L'expression : $Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ représente l'impédance du milieu de propagation.
2) L'expression : $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$ représente la vitesse de propagation.
3) L'influence de σ : La conductivité σ est un paramètre très important, il indique l'effet dissipatif du milieu au niveau du quel l'énergie électromagnétique transportée par l'onde électromagnétique diminue progressivement, une partie de cette énergie étant dissipée par effet joule.

4.3 Phénomène de propagation des Ondes Electromagnétiques

Découvert en 1887 par Heinrich Rudolf **Hertz**, un savant Allemand qui a eu l'idée d'établir un lien entre l'oscillation des charges et la théorie des équations électromagnétiques de Maxwell. Pour cela, il a conçu un oscillateur pour produire des ondes électromagnétiques en montrant qu'elles possèdent toutes les propriétés de la lumière (réflexion, réfraction et polarisation) ; il mesure la vitesse de ces ondes (300 000 km/s), confirmant la théorie énoncée en 1864 par le mathématicien et physicien écossais James Clerk Maxwell. Il ouvre ainsi la voie à la télégraphie sans fil par ondes hertziennes.

Principe :

Si on considère un repère cartésien (o, x, y, z), au niveau du quel on placera un émetteur ***E*** (Figure. 4.2).

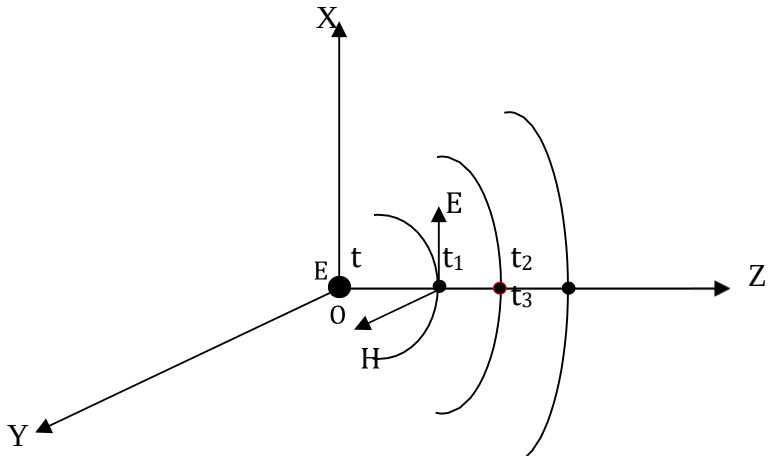


Figure 4. 2: Phénomène de Propagation des Ondes Electromagnétique

L'onde qui est composée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{H}$ est émise à t_0. A l'instant t_1 elle sera à la distance d_1, à l'instant t_2 à la distance d_2 etc…

Donc, il y a un temps et une distance, par conséquent une vitesse appelée vitesse de propagation.

4.4 Puissance électromagnétique (vecteur de Poynting)

Représente le vecteur indiquant la direction de propagation ($\vec{E}$, $\vec{H}$ et $\vec{P}$ forment un trièdre direct). Du point de vue sens physique, il représente la densité de puissance de l'onde électromagnétique (puissance par unité de surface).

Ce vecteur est donné par cette expression :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x^* & H_y^* & H_z^* \end{vmatrix}$$

4.5 Equation d'onde

En absence de charges et de courant, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$div\left(\vec{\mathrm{E}}\right) = 0$$

$$div\left(\vec{\mathrm{H}}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathrm{E}}\right) = -\frac{d\vec{\mathrm{H}}}{dt}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathrm{H}}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\vec{\mathrm{E}}}{dt}$$

Pour établir l'équation relative au champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$, il éliminer le champ magnétique $\vec{\mathrm{H}}$. Pour cela, calculons le rotationnel de chacun des membres de la loi de Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathrm{E}}\right)\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{d\vec{\mathrm{H}}}{dt}\right)$$

En permutant l'ordre des dérivations, on obtient :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{\mathrm{E}}\right) = -\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathrm{H}}\right) = -\frac{d}{dt}\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{d\vec{\mathrm{E}}}{dt}\right\}$$

Sachant que $$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathrm{E}}\right) = \overrightarrow{grad}\,div\left(\vec{\mathrm{E}}\right) - \Delta\vec{\mathrm{E}}$$

Où Δ est le Laplacien vectoriel, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta\vec{\mathrm{E}} - \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{\mathrm{E}}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{d\vec{\mathrm{E}}}{dt}\right\}$$

Comme en dehors des charges $$div\left(\vec{\mathrm{E}}\right) = 0$$

On obtient finalement :

$$\Delta\vec{\mathrm{E}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{\mathrm{E}}}{dt^2} = \vec{0}$$

Pour établir l'équation aux dérivées partielles pour le champ magnétique $\vec{\mathrm{H}}$, calculons le rotationnel de chacun des membres du théorème d'Ampère-Maxwell :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathrm{H}}\right)\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{\mathrm{H}}\right)\right) - \Delta\vec{\mathrm{H}} = \overrightarrow{rot}\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{d\vec{\mathrm{E}}}{dt}\right\}$$

Mais $$div\left(\vec{\mathrm{H}}\right) = 0$$

Et en inversant l'ordre des dérivations :

$$-\Delta\vec{\mathrm{H}} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathrm{E}}\right)\right]$$

Or $$\overrightarrow{rot}\left(\vec{\mathrm{E}}\right) = -\frac{d\vec{\mathrm{H}}}{dt}$$

Donc $$-\Delta\vec{\mathrm{H}} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{\mathrm{H}}}{dt^2}$$

Ou encore

$$\Delta\vec{H} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{d^2\vec{H}}{dt^2} = \vec{0}$$

On obtient la même expression que pour le champ électrique.

L'équation

$$\Delta\left(\frac{\vec{E}}{\vec{H}}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\vec{E}}{\vec{H}}\right) = \vec{0}$$

Constitue l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide, où on a posé $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

4.6 Différents types d'ondes électromagnétiques

4.6.1 Onde plane

Si on considère une surface de dimension réduite découpée dans un front d'ondes sphérique à très grande distance de l'émetteur, cette surface sera assimilée à un plan.

Par définition, une onde plane est une onde dont le front d'ondes est un plan.

Par conséquent les vecteurs champs électrique et magnétique appartiennent au front d'onde plan (Figure. 4. 3).

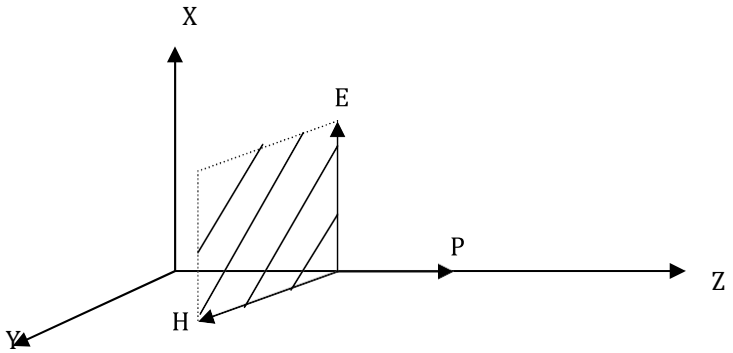


Figure 4. 3: Onde plane

- **<u>Caractéristiques d'une onde plane</u>** :

1) Le champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$, sont perpendiculaires
2) Le champ électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{H}$, appartiennent au plan d'onde (XOY)
3) ($\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{P}$) forme un trièdre directe.

4.6.2 Onde progressive

On considère un milieu sans charges et sans pertes (j=0, ρ=0 et σ=0). Les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, ne dépendent que de z (la direction de propagation) et du temps t. Alors l'équation de propagation devient :

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$\vec{E}\,(z, t) = F\left(t - \frac{z}{v}\right) + G\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

Où F correspond à une propagation dans le sens des z positives : Onde progressive et G correspond à une propagation provenant des z positives vers la source. Dans un milieu indéfini une telle propagation ne peut pas avoir lieu (sans signification physique).

4.6.3 Onde monochromatique

Une onde monochromatique ou onde harmonique est une onde qui peut être décrite par une fonction sinusoïdale du temps. Sa densité spectrale d'énergie ne présente qu'une seule fréquence, qu'une seule longueur d'onde. On parle également d'onde monoénergétique ou simplement d'onde sinusoïdale. En pratique, il n'existe pas d'onde parfaitement monochromatique, il y a toujours une dispersion autour de la fréquence centrale du rayonnement : leurs spectres n'occupent qu'une bande très étroite de fréquence.

Modélisation analytique /Vibration sinusoïdale

Une vibration harmonique est la variation S(t) d'une grandeur physique autour d'une valeur moyenne suivant une fonction sinusoïdale du temps. On peut écrire :

$S(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

- A est l'amplitude et correspond à la valeur maximale,
- ω est la pulsation angulaire (rad·s-1),
- ϕ est le retard de phase en radian.

4.7 Réflexion/transmission entre deux milieux (incidence normale et oblique)

1) Incidence normale

Dans la quelle, la direction de propagation est perpendiculaire à la surface de séparation des deux milieux, comme il est illustré dans la figure suivante :

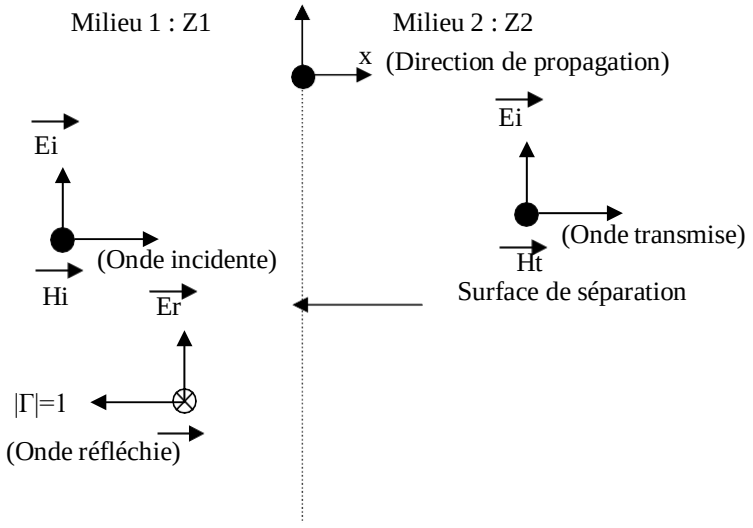


Figure 4. 4: Incidence normale

1) Incidence oblique

Dans la quelle, la direction de propagation (zi) fait un angle avec la normale de la surface de séparation des deux milieux, comme il est illustré dans la figure suivante :

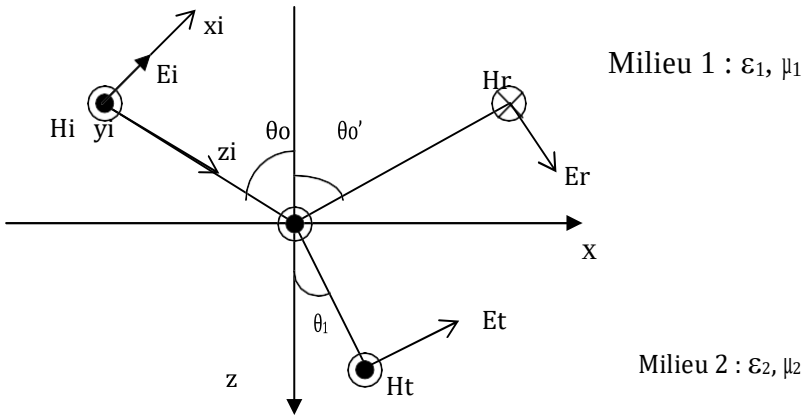


Figure 4. 5: Incidence oblique

BIBLIOGRAPHIE

[1] Pr. Djelouah Hakim, Vibration et ondes manuel de cours, Université des sciences et technologies Houari Boumediene, 2006-2007.

[2] M. Balkanski et C. Sebenne, Physique 2 : ondes et phénomènes vibratoires, DUNOD, Paris

[3] G. Ney, Analogies et modèles électriques, acoustique et mécanique vibratoire, N°2579, Ecole supérieure d'électricité, Paris, 1978.

[4] Tamer Bécherrawy, Vibrations et ondes, La voiser, 2010.

[5] André Lecerf, Rappel de cours et exercices résolus physique des ondes et des vibrations, TEC et DOC – L voisier, 1993.

[6] Janine Bruneaux, Jean Matricon, Vibrations ondes, ellipses, 2008.

[7] A. Fouillé, P. déréthé, Cours de physique des vibrations, Dunod, 1976.

[8] Hecht, Physique – ondes, optique physique moderne 3, de Boeck, 2007.

[9] Jean-Paul-Mathieu, vibrations et phénomènes de propagation, Tome I, oscillateurs, Masson et Cie, Editeurs, 1974.

[10] P. Hammad, ≪ Vibrations et Ondes≫ , http://sites.google.com/site/exerev

[11] H. Lumbroso, ≪ Ondes Mécaniques et Sonores≫, Edition DUNOD, ISBN 2-10- 00468-8,2000

[12] R. Gabillard, ≪ Vibration et phénomène de propagation≫, Edition, 1972 DUNOD

[13] E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli : « La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétique », 2ème Edition, Edi-Science 2006.

[14] R Michel Hulin : « Electromagnétisme, Équations de Maxwell », Armand Colin 1971.

[15] Pierre Krempf : « Electromagnétisme MP », Collection les nouveaux Précis Bréal 2004.

[16] Maxime Nicolas : « Ondes et électromagnétisme », Dunod 2009.

[17] Patrice Tchofo Dinda, Pierre Mathey : « Electromagnétisme, Ondes et propagation guidée », Dunod 2017.