

الفصل الأول: الإحتمال و المتغيرات العشوائية:

1) مفهوم الإحتمال و الحوادث العشوائية:

1-1) التجربة العشوائية: Experiment of chance

هي كل عملية نعلم مسبقا كل النتائج الممكنة لها، لكن لانستطيع أن نحدد النتيجة التي سوف تظهر في محاولة معينة. أي هي تجربة لها من بين جميع النتائج الممكنة، نتيجة تظهر عن طريق الحظ .
مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تسمى فضاء العينة Sample Space ، ويرمز لها S . فضاء العينة يتكون من n عنصر (نتيجة ممكنة)، ويرمز لهذه العناصر عادة بالرموز : $a, b, c, d, \dots$.
مثل:

رمي قطعة نقود، النتائج الممكنة : ظهر p ، وجه f . فضاء العينة : $S = \{ p, f \}$.

رمي حجر نرد، النتائج الممكنة أو فضاء العينة : $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

2-1) الحدث: Event

الحدث أو الحوادث هي كل مجموعة جزئية من فضاء العينة، ويرمز لها عادة بالرموز : $A, B, C, \dots$.
مثل:

حدث ظهور وجه f عند رمي قطعة النقود : $A = \{ f \}$.

حدث ظهور رقم زوجي عند رمي حجر النرد : $A = \{ 2, 4, 6 \}$.

الحدث البسيط: إذا كانت المجموعة الجزئية تحتوي على عنصر واحد فقط، تسمى حدث بسيط (ابتدائي).

الحدث المستحيل: إذا كانت المجموعة الجزئية تحتوي على عناصر لا تنتمي إلى فضاء العينة (نتيجة

غير ممكنة)، تسمى حدث مستحيل.

الحدث المكمل: الحدث المكمل للحدث A ، ويرمز له $\bar{A}$ ، هو الحدث الذي يشمل مجموعة عناصر

فضاء العينة التي لا تنتمي إلى الحدث A .

الحوادث المتنافية: يكون حدثين A, B متنافيين إذا كان وقوع أحدهما ينفي أو يمنع وقوع الآخر.

الحوادث المستقلة: يكون حدثين A, B مستقلين إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر.

الإتحاد: إتحاد حدثين A, B و يرمز له $A \cup B$ هو حدث يتكون من العناصر التي تنتمي إلى A أو

تنتمي إلى B أو كليهما ، ويعني وقوع أحد الحدثين على الأقل .

التقاطع: تقاطع حدثين A, B و يرمز له $A \cap B$ هو حدث يتكون من العناصر التي تنتمي إلى A و تنتمي إلى B ، أي العناصر المشتركة و يعني وقوع الحدثين معا .

مثال 1:

رمي حجر نرد ، الحدث رقم زوجي : $A = \{ 2,4,6 \}$ ،

الحدث رقم أكبر أو يساوي 4 : $B = \{ 4,5,6 \}$ ،

يمكن تحديد الحوادث: $\bar{A} = \{ 1,3,5 \}$

$$A \cup B = \{ 2,4,5,6 \}$$

$$A \cap B = \{ 4,6 \}$$

الإحتمال: Probability (3-1)

إحتمال عنصر وإحتمال حدث: (1-3-1)

إذا كان S فضاء عينة يحتوي على n عنصر، فإن إحتمال عنصر a هو : $1/n$.
و إذا كان حدث A يحتوي على k عنصر، فإن إحتمال الحدث A هو : k/n ، أي :
عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث A ، على عدد الطرق التي يقع فيها فضاء العينة S .
وهذا هو التعريف التقليدي للإحتمال : عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة (الكلية) .

تعريف:

إذا كان S فضاء عينة منتهى ويحتوي على n عنصر : $S = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_n \}$

فإنه يمكن تعيين عدد حقيقي $p(a_i)$ للعنصر a_i ويسمى إحتمال هذا العنصر، بحيث يحقق الشرطين:

$$0 \leq p(a_i) \leq 1 \quad (أ)$$

$$\sum_{i=1}^n p(a_i) = 1 \quad (ب)$$

ويعرف إحتمال أي حدث A على أنه مجموع إحتمالات العناصر المكونة له .¹

ليكن S فضاء عينة لتجربة عشوائية، و لتكن $U(S)$ مجموعة الحوادث المعرفة على S ، فإنه يرافق كل حدث $A \in U(S)$ عدد معين $p(A) \in [0,1]$ يسمى إحتمال الحدث A ، بحيث يحقق المسلمات التالية :

$$0 \leq p(A) \leq 1 , \quad p(A) \geq 0 \quad (أ) \quad \text{إذا كانت } A \subset S , \text{ فإن الإحتمال :}$$

$$p(S) = 1 \quad (ب) \quad \text{إحتمال :}$$

¹ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. عمادة شؤون المكتبات، جامعة الملك سعود الرياض 1991. ص 5 .

ج) إذا كانت A_i حيث: $(i = 1, 2, 3, \dots, \infty)$ ، أحداث متنافية ، فإن احتمال:

$$p(\cup A_i) = \sum_1 p(A_i)$$

من المسلمات السابقة يمكن إثبات النتائج التالية:²

نتيجة 1: إذا كانت $\emptyset$ مجموعة خالية (حدث مستحيل) فإن: $p(\emptyset) = 0$

نتيجة 2: إذا كان $\bar{A}$ مكمل الحدث A ، فإن: $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

نتيجة 3: إذا كان $A \subset B$ ، فإن: $p(A) \leq p(B)$

نتيجة 4: إذا كان A, B حدثين ، فإن: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

قاعدة جمع الاحتمالات:

من العلاقات السابقة يمكن أن نجد:

إذا كان A, B متنافيين: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

مثال 2:

رمي حجر نرد، الحدث: $A = \{ 2, 4, 6 \}$ ، الحدث: $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ ،

نحسب الاحتمالات: $p(A) = \frac{3}{6}$ ، $p(B) = \frac{4}{6}$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

2-3-1 الاحتمال الشرطي: Conditional Probability

إحتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B ، يسمى الاحتمال الشرطي ويرمز له $p(A/B)$ ، ويعرف

كما يلي:

إذا كان A, B حدثين في فضاء عينة ، وكان: $p(B) \neq 0$ ، فإن احتمال الحدث A بشرط حدوث B :

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

قاعدة ضرب الاحتمالات:

من العلاقة السابقة يمكن أن نجد: $p(A \cap B) = p(B) * p(A / B)$

أو أيضا: $p(A \cap B) = p(A) * p(B / A)$

مثال 3:

² نفس المرجع، نفس الصفحة .

مجتمع مكون من 48% رجال و 52% نساء، نسبة 3% من الرجال و نسبة 5% من النساء بطالين. نأخذ شخص واحد عشوائيا ، الحدث H رجل ، الحدث F امرأة ، الحدث C شخص بطل .

إحتمال أن الشخص بطل : بطل وهو رجل + بطل وهو امرأة :

$$p(C) = p(H) * p(C/H) + p(F) * p(C/F) \\ = 0.48 * 0.03 + 0.52 * 0.05 = 0.0404$$

إحتمال أن الشخص رجل علما أنه بطل :

$$p(H / C) = \frac{p(H \cap C)}{p(C)} = \frac{p(H) * p(C/H)}{p(C)} = \frac{0.48 * 0.03}{0.0404} = 0.3564$$

3-3-1 الحوادث المستقلة: Independent Events

يكون حدثين مستقلين إذا كان إحتمال حدوث أحدهما لا يتأثر بحدوث الآخر .

إذا كان A , B حدثين مستقلين، إحتمال حدوث A لا يتأثر بحدوث B ،

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{أي :}$$

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B) \quad \text{في هذه الحالة يكون :}$$

وهذه العلاقة هي التعريف الرياضي لإستقلال حدثين.³

مثال 4:

نرمي حجر نرد مرتين، الحدث A رقم 5 في المحاولة الأولى، الحدث B رقم فردي في المحاولة الثانية،

$$p(A) = \frac{1}{6} , \quad p(B) = \frac{3}{6} \quad \text{إحتمال كل حدث :}$$

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B) = \frac{1}{6} * \frac{3}{6} = \frac{3}{36} \quad \text{الحدثين مستقلين :}$$

2 المتغيرات العشوائية:

المتغير العشوائي: Random Variable

المتغير العشوائي هو متغير يأخذ قيم في مجال معين بطريقة غير منتظمة (عشوائية) ، فإذا أخذ قيمة ما

في لحظة ما فلا يمكننا أن نعرف مسبقا القيمة التي سوف يأخذها فيما بعد . عكس المتغير العادي الذي

يتغير بشكل منتظم (في مجال يحتوي على قيم ممنوحة مسبقا) من قيمة إلي قيمة أخرى، فإذا مر بقيمة ما

في لحظة ما لن يعود ليأخذها مرة ثانية .

³ Khaldi khaled, Probabilités :rappels de cours et exercices corrigés. OPU alger 1999. P 10.

تعريف:

لتكن تجربة عشوائية مع فضاء عينة S ، نسمي الدالة X التي ترفق بكل عنصر $a \in S$ ، عددا حقيقيا واحدا و واحدا فقط ، تسمي $x=X(a)$ متغير عشوائي.⁴

فضاء المتغير العشوائي هو: $\mathcal{A} = \{x ; x = X(a) , a \in S\}$

1-2 المتغيرات العشوائية المتقطعة: Discrete Random Variables

متغير عشوائي متقطع X هو متغير قيمه الممكنة تكون على شكل نقاط أو قيم منفصلة .

1-1-2 قانون الإحتمال:

ليكن متغير عشوائي متقطع X له n قيمة ممكنة : $x_1, x_2, \dots, x_n$

كل حدث من هذه الحوادث يتحقق بإحتمال خاص : $pr(X = x_i) = p_i , i = 1, 2, \dots, n$

قانون الإحتمال هو العلاقة التي تربط بين القيم الممكنة للمتغير X و الإحتمالات المرافقة لها p_i ، على شكل جدول :

X	Pr(X=x _i)
x ₁	p ₁
x ₂	p ₂
...	...
x _n	p _n
	1

أو على شكل دالة تسمي دالة الإحتمال : $f(x) = pr(X = x_i)$

دالة الإحتمال Probability Function تحقق الشرطين :

(أ) لكل قيم X : $0 \leq f(x) \leq 1$

(ب) مجموع الإحتمالات : $\sum_1^n f(x_i) = 1$

مثال 4:

نرمي قطعة نقود مرتين ، المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور وجه (وجه 1 ، ظهر 0) ،

النتائج الممكنة: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$

قيم المتغير العشوائي: $X = 0, 1, 2$

قيم دالة الإحتمال:

$$f(0) = pr(x = 0) = \frac{1}{4}$$

⁴ Idem, p38.

$$f(1) = pr(x = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$f(2) = pr(x = 2) = \frac{1}{4}$$

2-1-2 دالة التوزيع : Distribution Function

دالة التوزيع أو دالة الإحتمال التجميعي Cumulative Probability Function هي الدالة التي

تعطينا إحتمال X عند أية نقطة أو قيمة يأخذها x_k ،

ليكن متغير عشوائي متقطع X يأخذ القيم: $x_1, x_2, \dots, x_n$

دالة التوزيع تعرف بالشكل:

$$F(x_k) = pr(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^k f(x_i) , k \leq n$$

أي دالة تراكمية تعطينا مجموع الإحتمالات إلى غاية القيمة x_k .⁵

إذا وضعنا $x_k = a$ ، فإن دالة التوزيع :

$$F(a) = pr(X \leq a) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(a)$$

$$pr(X > a) = 1 - pr(X \leq a) = 1 - F(a)$$

لتكن a, b من مجال قيم المتغير X بحيث : $a \leq b$, $a, b \in [x_1, x_n]$

$$pr(a \leq X \leq b) = pr(X \leq b) - pr(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

خواص:

°1 دالة التوزيع متزايدة: $F(x_k) \leq F(x_{k+1})$

°2 دالة التوزيع ثابتة عند أية نقطة أو مجال جزئي: $[x_k, x_{k+1}[$

°3 دالة التوزيع مستمرة على يمين كل نقطة x_k

°4 دالة التوزيع محصورة بين : $0 \leq F(x) \leq 1$

أي : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

مثال 5:

المثال السابق، رمي قطعة نقود مرتين، المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور وجه: $X = 0, 1, 2$

نحسب الإحتمالات:

$$F(0) = pr(x \leq 0) = f(0) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = pr(x \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

⁵ سيمور ليبشستر، الإحتمالات. ترجمة سامح داود. الطبعة الخامسة الدار الدولية، القاهرة 2004 . ص 116 .

$$F(2) = pr(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

2-2 المتغيرات العشوائية المستمرة: Continuous Random Variables

متغير عشوائي مستمر X هو متغير قيمه الممكنة تكون على شكل مجالات من القيم المستمرة، قد تكون محدودة أو غير محدودة .

1-2-2 دالة الكثافة الإحتمالية: Probability Density Function

ليكن متغير عشوائي مستمر X معرف على مجال محدود: $[x_1, x_n]$ أو غير محدود: $]-\infty, +\infty[$. نسمي دالة كثافة إحتمالية للمتغير X الدالة $f(X)$ ، التي تحقق الشروط :

(أ) دالة غير سالبة : $f(x) \geq 0$

(ب) دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ماعدا لعدد محدود من النقاط .

(ج) تكامل الدالة على كل المجال يساوي واحد : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

منحني دالة الكثافة مستمر، كل نقطة على المنحني تمثل إرتفاع المنحني عند فئة أو مجال جزئي من مجال تعريف المتغير المستمر، هذا الإرتفاع و المجال الجزئي يحددان الإحتمال بتكامل محدود أو مساحة تحت منحني دالة الكثافة . إذن الإحتمال عند مجال جزئي هو مساحة أو تكامل محدود لدالة الكثافة الإحتمالية ، أما الإحتمال عند نقطة أو قيمة واحدة فهو صفر (لا توجد مساحة) . الإحتمال على المجال الكلي للمتغير المستمر ، هو المساحة الكلية تحت منحني دالة الكثافة وتساوي واحد.

مثال 6:

متغير مستمر X معرف بدالة الكثافة الإحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 , x > 1 \end{cases}$$

هذه الدالة تحقق الشروط :

دالة مستمرة و غير سالبة : $2(1-x) \geq 0 , \forall x \in [0, 1]$

التكامل المحدود : $\int_0^1 2(1-x) . dx = [2x - x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1$

2-2-2 دالة التوزيع: Distribution Function

دالة التوزيع أو دالة الإحتمال التجميعي هي الدالة التي تعطينا الإحتمال على أي مجال يتغير فيه X .

ليكن متغير عشوائي مستمر X معرف على مجال محدود: $[X_1, X_n]$ أو غير محدود: $]-\infty, +\infty[$
دالة التوزيع تعرف بالشكل:

$$F(x) = pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(X) \cdot dX$$

دالة التوزيع تراكمية من أول قيمة لمجال تعريف المتغير المستمر إلى غاية قيمة معينة x .
هذه الدالة تحقق :

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

إذا وضعنا $x=a$ ، دالة التوزيع :

$$F(a) = pr(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(X) \cdot dX = [F(X)]_{-\infty}^a = F(a) - 0$$

لتكن a, b بحيث : $a \leq b$, $a, b \in]-\infty, +\infty[$

$$pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(X) dX = [F(X)]_a^b = F(b) - F(a)$$

و أيضا :

$$pr(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

الإحتمال عند نقطة واحدة:

$$pr(X = a) = pr(a \leq X \leq a) = [F(X)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

خواص:

°1 دالة التوزيع متزايدة : $F(a) \leq F(b)$, $a \leq b$

°2 دالة التوزيع مستمرة على $\mathbb{R}$.

3 دالة قابلة للإشتقاق و المشتقة : $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$

°4 دالة التوزيع محصورة بين : $0 \leq F(x) \leq 1$

أي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

مثال 7:

المثال السابق، دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير المستمر x :

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) , & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 , & x < 0 , x > 1 \end{cases}$$

دالة التوزيع :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(X) dX = \int_{-\infty}^x (2 - 2X) dx = [2X - X^2]_{-\infty}^x = 2x - x^2$$

وتكتب بالشكل:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ (2x - x^2) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

الإحتمالات:

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = pr\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$pr\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

(3) المميزات العددية للمتغيرات العشوائية (العزوم):

العزوم Moments هي خصائص أو مميزات عددية للمتغيرات العشوائية ، تستخدم لتحديد المتوسطات وقياس التشتت، الإلتواء و التفرطح ، كما أنها تعتبر أدلة رقمية لوصف التوزيعات الإحتمالية.

(1-3) العزوم الابتدائية و العزوم المركزية:

(1-1-3) العزوم الابتدائية:

تسمى عزوم إبتدائية أو عزوم حول الصفر Moments around the origin .

تعريف:

يعرف العزم من الرتبة r حول الصفر، لمتغير عشوائي X بالعلاقة التالية:⁶

$$MO_r = E(X^r) = \sum x^r * f(x) \quad \text{متغير متقطع:}$$

$$MO_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r * f(x) dx \quad \text{متغير مستمر:}$$

بإستخدام هذه العلاقات يمكن تعريف عدد لانهائي من العزوم :

$$MO_0 = E(X^0) = \sum f(x) = 1 \quad \text{إذا كان } r=0 \text{ ، فإن :}$$

أي أن العزم الإبتدائي من الرتبة 0 يساوي واحد.

$$MO_1 = E(X) = \sum x * f(x) = \mu \quad \text{إذا كان } r=1 \text{ ، فإن :}$$

أي أن العزم الإبتدائي من الرتبة 1 هو القيمة المتوقعة أو القيمة المتوسطة.

$$MO_2 = E(X^2) = \sum x^2 * f(x) \quad \text{إذا كان } r=2 \text{ ، العزم الإبتدائي من الرتبة 2:}$$

⁶ Khaldi khaled, probabilités. Op-cit, p 42.

... و هذه الحالات تنطبق أيضا على المتغير المستمر .

3-1-2) العزوم المركزية:

العزوم المركزية تكون حول قيمة مركزية (متوسط ، وسيط ...)، إذا كانت العزوم حول القيمة المتوسطة

تسمى عزوم حول المتوسط Moments around the mean .

تعريف:

يعرف العزم المركزي من الرتبة r حول المتوسط، لمتغير عشوائي X بالعلاقة التالية:

$$MC_r = E[(X - \mu)^r] = \sum (x - \mu)^r * f(x) \quad \text{متغير متقطع:}$$

$$MC_r = E[(X - \mu)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^r * f(x) dx \quad \text{متغير مستمر:}$$

بإستخدام هذه العلاقات يمكن تعريف عدد لانهائي من العزوم المركزية :

$$MC_1 = E(X - \mu) = \sum (X - \mu) * f(x) = 0 \quad \text{إذا كان } r=1 \text{ ، فإن :}$$

أي أن العزم المركزي من الرتبة 1 هو مجموع الانحرافات عن المتوسط ويساوي صفر .

$$MC_2 = E[(X - \mu)^2] = \sum (x - \mu)^2 * f(x) = \sigma^2 \quad \text{إذا كان } r=2 \text{ ، فإن :}$$

أي أن العزم المركزي من الرتبة 2 حول المتوسط هو التباين .

$$MC_3 = E[(X - \mu)^3] = \sum (x - \mu)^3 * f(x) \quad \text{إذا كان } r=3 \text{ ، العزم المركزي من الرتبة 3:}$$

... وكذلك بالنسبة للمتغير المستمر .

3-1-3) تطبيقات على العزوم:

- معامل الإلتواء: Skewness Coefficient

التوزيع المتناظر مثل التوزيع الطبيعي يكون فيه: المتوسط يساوي الوسيط، يساوي المنوال. التوزيعات

غير المتناظرة تكون إما موجبة الإلتواء أو سالبة الإلتواء .

معامل فيشر Fisher للإلتواء، ويرمز له γ_1 يساوي العزم المركزي من الرتبة 3 ، مقسوما على الانحراف

المعياري مرفوعا للقوة 3 :

$$\gamma_1 = MC_3 / \sigma^3$$

توزيع متناظر $\gamma_1 = 0$

توزيع موجب الإلتواء $\gamma_1 > 0$ ، توزيع سالب الإلتواء $\gamma_1 < 0$

- معامل التفرطح: Kurtosis Coefficient

مقارنة بالتوزيع الطبيعي المعتدل الذي يكون فيه المنحني متناظر وعلى شكل جرس، فإن التوزيع يكون إما أقل تفرطحاً (مدبب) ، أو أكثر تفرطحاً (منبسط) .

معامل التفرطح ويرمز له γ_2 يساوي العزم المركزي من الرتبة 4 ، مقسوماً على الانحراف المعياري مرفوعاً للقوة 4 ، هذه النسبة مطروحة منها 3 :⁷

$$\gamma_2 = \frac{MC_4}{\sigma^4} - 3$$

توزيع طبيعي معتدل $\gamma_2 = 0$

توزيع مدبب (تشتت ضعيف) $\gamma_2 > 0$ ، توزيع متفرطح (تشتت كبير) $\gamma_2 < 0$

2-3 القيمة المتوقعة: Expected Value

تعريف :

القيمة المتوقعة أو التوقع الرياضي لمتغير عشوائي X هي العزم الابتدائي من الرتبة 1 ، وهي تدل على متوسط قيم المتغير .

متغير متقطع : $E(X) = \mu = \sum x * f(x)$

متغير مستمر : $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x) dx$

إذا كانت $g(X)$ دالة للمتغير X ، فإن القيمة المتوقعة لهذه الدالة :

X متقطع : $E[g(X)] = \sum g(x) * f(x)$

X مستمر : $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) * f(x) dx$

خواص:

(1) إذا كان a ثابت، التوقع هو :

$$E(a) = a$$

البرهان :

$$E(a) = \sum a * f(x) = a * \sum f(x) = a$$

(2) إضافة ثابت a للمتغير X ، التوقع هو:

$$E(X + a) = E(X) + a$$

البرهان :

⁷ موراي شبيغل، الإحصاء. ترجمة شعبان عبد الحميد. الطبعة السابعة الدار الدولية القاهرة 2004 . ص 143 .

$$E(X + a) = \sum (x + a) * f(x) = \sum x * f(x) + \sum a * f(x) = E(X) + a$$

(3) ضرب ثابت a بالمتغير X ، التوقع هو:

$$E(aX) = a * E(X)$$

البرهان :

$$E(aX) = \sum (a * x) * f(x) = a * \sum x * f(x) = a * E(X)$$

(4) إذا كان X, Y متغيرين، توقع المجموع هو :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

البرهان :

$$E(X + Y) = \sum (x + y) * f(x, y) = \sum x * f(x) + \sum y * f(y) = E(X) + E(Y)$$

بنفس الطريقة يمكن البرهان أن توقع الفرق هو:

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

(5) إذا كان X, Y متغيرين مستقلين، توقع الجداء هو:

$$E(X.Y) = E(X) * E(Y)$$

البرهان :

$$E(X.Y) = \sum (x.y) . f(x, y) = \sum x . f(x) * \sum y . f(y) = E(X) * E(Y)$$

هذه الخواص تنطبق أيضا على حالة المتغير المستمر، وبنفس الطريقة يمكن البرهان بإستخدام التكامل.

Variance : التباين (3-3)

تعريف :

تباين متغير عشوائي X هو العزم المركزي حول المتوسط من الرتبة 2 ، وهو يدل على التشتت أو إبتعاد قيم المتغير عن المتوسط .

$$V(X) = \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 * f(x) \quad \text{متغير متقطع :}$$

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] \quad \text{التباين بدلالة التوقع :}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum x^2 * f(x) - \mu^2 \quad \text{أو :}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 * f(x) dx \quad \text{متغير مستمر :}$$

التباين بدلالة التوقع :⁸ $V(X) = E[(X - \mu)^2]$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f(x)dx - \mu^2 \quad \text{أو :}$$

خواص:

(1) إذا كان a ثابت، التباين هو :

$$V(a) = 0$$

البرهان :

$$V(a) = E(a^2) - [E(a)]^2 = a^2 - a^2 = 0$$

(2) إضافة ثابت a للمتغير X ، التباين هو :

$$V(X + a) = V(X)$$

البرهان :

$$V(X + a) = E[(X + a) - (\mu + a)]^2 = E[(X + a - \mu - a)^2] = E[(X - \mu)^2] = V(X)$$

(3) ضرب ثابت a بالمتغير X ، التباين هو :

$$V(aX) = a^2 * V(X)$$

البرهان :

$$V(aX) = E[(aX - a\mu)^2] = E[a^2 * (X - \mu)^2] = a^2 * V(X)$$

(4) إذا كان X, Y متغيرين مستقلين، تباين المجموع هو :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

البرهان :

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 = E[X^2 + Y^2 + 2XY] - \\ &[E(X) + E(Y)]^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - [E(X)]^2 + [E(Y)]^2 + \\ &2E(X)E(Y)] = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(X)E(Y) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - \\ &2E(X)E(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2E(X)E(Y) - \\ &2E(X)E(Y) = V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

وتباين الفرق هو : $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$

البرهان :

$$\begin{aligned} V(X - Y) &= E[(X - Y)^2] - [E(X - Y)]^2 = E[X^2 + Y^2 - 2XY] - \\ &[E(X) - E(Y)]^2 = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY) - [E(X)]^2 + [E(Y)]^2 - \end{aligned}$$

⁸ Walder Masiéri, Statistique et calcul des probabilités. Edition Dalloz Paris 2001. P 323 .

$$2E(X)E(Y)] = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 - 2E(X)E(Y) +$$

$$2E(X)E(Y) = V(X) + V(Y)$$

(5) إذا كان X, Y متغيرين مستقلين، تبين الجداء هو :

$$V(X.Y) = E(X^2).E(Y^2) - [E(X)]^2.[E(Y)]^2$$

البرهان :

$$V(X.Y) = E[(X.Y)^2] - [E(X.Y)]^2 = E[X^2.Y^2] - [E(X).E(Y)]^2 =$$

$$= E(X^2).E(Y^2) - [E(X)]^2.[E(Y)]^2$$