

تمارين الفصل الأول:

تمرين 1:

مستودع تخزين فيه منتجات مصدرها من ثلاثة مصانع حيث الحصص كالتالي: المصنع الأول 50% ، المصنع الثاني 30% ، المصنع الثالث 20% .نسبة المنتجات التالفة في هذه المصانع هي على التوالي: 2% ، 3% ، 5% . أخذ منتج عشوائيا من المستودع ؛

1_ماهو احتمال أن يكون غير تالف؟

2_إذا كان هذا المنتج غير تالف، ماهو احتمال أن يكون من المصنع الأول ؟

تمرين 2:

قناص أول يصيب في العادة بمعدل $2/10$ ، قناص ثاني يصيب في العادة بمعدل $1/10$. يطلق كل منهما طلقة على هدف في آن واحد.

1_ماهو احتمال عدم إصابة الهدف؟

2_ماهو احتمال إصابة الهدف مرة واحدة؟

3_ماهو احتمال إصابة الهدف مرتين؟

4_علما أن الهدف أصيب مرة واحدة، ماهو احتمال إصابته من طرف القناص الأول؟

تمرين 3:

ليكن التوزيع الاحتمالي للمتغير X :

x	f(x)
1	1/4
2	a
3	1/4
4	1/4

1_أوجد قيمة a ؛

2_أوجد تابع التوزيع؛

3_أحسب $E(X)$, $V(X)$.

تمرين 4:

1°) لاعب يرمي حجر نرد بحيث : إذا كان الرقم 1 يسجل 2 نقطتين ، إذا كان الرقم 6 يسجل 3 نقاط ، إذا كان الرقم من 2 إلي 5 يسجل نقطة واحدة. ليكن X متغير عشوائي يمثل نقاط اللاعب.

_أوجد جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير X ، أحسب $E(X)$, $V(X)$.

2°) لنفرض أن اللاعب دفع مسبقا 3 دينار، وعندما يسجل نقطة يكسب 2 دينار. ليكن Y متغير عشوائي يمثل ربح اللاعب.

_أوجد $E(Y)$, $V(Y)$.

تمرين 5:

متغير مستمر X معرف بالدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64} * x^2 , & 0 < x < 4 \\ 0 , & x \leq 0 , x \geq 4 \end{cases}$$

1_ تأكد من أن هذه الدالة هي دالة كثافة إحتمالية؛

2_ أوجد دالة التوزيع؛

3_ أحسب الإحتمالات: $pr(x \leq 3)$, $pr(1 < x < 2)$

تمرين 6:

لتكن دالة الكثافة الإحتمالية لمتغير مستمر X :

$$f(x) = \begin{cases} a.x^2 , & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 , & x < 0 , x > 1 \end{cases}$$

1_ أوجد قيمة a ؛

2_ أوجد دالة التوزيع؛

3_ أحسب الإحتمالات: $pr(x \leq \frac{1}{2})$, $pr(x > \frac{3}{4})$

4_ أحسب : $E(X)$, $V(X)$

حل التمرين 1:

نرمز الحدث A_1 المنتج من المصنع الأول، الحدث A_2 المنتج من المصنع الثاني، الحدث A_3 المنتج من المصنع الثالث. نرمز الحدث B المنتج غير تالف.

إحتمالات كل مصنع (الحصص):

$$p(A_1) = 0.5 , p(A_2) = 0.3 , p(A_3) = 0.2$$

إحتمالات التالف (النسب) :

المصنع الأول 0.02 ، المصنع الثاني 0.03 ، المصنع الثالث 0.05 .

إحتمالات غير تالف على التوالي:

$$p(B/A_1) = 1 - 0.02 = 0.98 \quad , \quad p(B/A_2) = 1 - 0.03 = 0.97$$

$$p(B/A_3) = 1 - 0.05 = 0.95$$

1_إحتمال المنتج غير تالف:

$$p(B) = p(A_1) * p(B/A_1) + p(A_2) * p(B/A_2) + p(A_3) * p(B/A_3)$$

$$= 0.5 * 0.98 + 0.3 * 0.97 + 0.2 * 0.95 = 0.97$$

2_إحتمال شرطي: إحتمال من المصنع الأول علما أنه غير تالف؛

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_1) * p(B/A_1)}{p(B)} = \frac{0.5 * 0.98}{0.97} = 0.505$$

حل التمرين 2:

نرمز إصابة القناص الأول A_1 ، عدم إصابة $\bar{A}_1$. نرمز إصابة القناص الثاني A_2 ، عدم إصابة $\bar{A}_2$.
نرمز إصابة الهدف مرة واحدة B .

1_إحتمال عدم إصابة الهدف:

$$p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = p(\bar{A}_1) * p(\bar{A}_2) = 0.8 * 0.9 = 0.72$$

2_إحتمال إصابة الهدف مرة واحدة:

$$p(B) = p(A_1 \cap \bar{A}_2) + p(\bar{A}_1 \cap A_2) = 0.2 * 0.9 + 0.1 * 0.8 = 0.26$$

3_إحتمال إصابة الهدف مرتين:

$$p(A_1 \cdot A_2) = p(A_1) * p(A_2) = 0.2 * 0.1 = 0.02$$

4_إحتمال شرطي: إصابة القناص الأول علما مرة واحدة؛

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_1) * p(B/A_1)}{p(B)} = \frac{p(A_1) * p(A_1 \cdot \bar{A}_2)}{p(B)} = \frac{p(A_1) * p(A_1) * p(\bar{A}_2)}{p(B)}$$

$$= \frac{0.2 * 0.2 * 0.9}{0.26} = \frac{0.036}{0.26} = 0.1384$$

حل التمرين 3:

x	f(x)	F(x)	x.f(x)	x ² .f(x)
1	1/4	1/4	1/4	1/4
2	a	2/4	2/4	4/4
3	1/4	3/4	3/4	9/4
4	1/4	1	4/4	16/4
	1		E(x)=10/4	E(x ²)=30/4

$$\sum f(x) = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \quad \text{1_لدينا :}$$

$$F(x) = 0, \quad x < 1 \quad \text{2_تابع التوزيع:}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0.25, & 1 \leq x < 2 \\ 0.5, & 2 \leq x < 3 \\ 0.75, & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$F(x) = 1, \quad x \geq 4$$

$$E(X) = \mu = \sum x \cdot f(x) = \frac{10}{4} = 2.5 \quad \text{3_التوقع الرياضي:}$$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{30}{4} - \left(\frac{10}{4}\right)^2 = \frac{20}{16} = 1.25 \quad \text{التباين :}$$

حل التمرين 4:

(1) _جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير X :

الرقم 1 : 2 نقاط ، الإحتمال $\frac{1}{6}$

الرقم 6 : 3 نقاط ، الإحتمال $\frac{1}{6}$

الرقم (2,3,4,5) : 1 نقطة ، الإحتمال $\frac{4}{6}$

x	F(x)	x.f(x)	X ² .f(x)
1	4/6	4/6	4/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
	1	E(x)=9/6	E(x ²)=17/6

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = \frac{9}{6} \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{7}{12} \quad \text{التباين:}$$

$$Y = 2 \cdot X - 3 \quad \text{2_ربح اللاعب Y ، يتغير مع عدد النقاط:}$$

التوقع الرياضي:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2 \cdot X - 3) = E(2X) - E(3) = 2E(X) - 3 \\ &= 2 \cdot \frac{9}{6} - 3 = 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

التباين:

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(2 \cdot X - 3) = V(2X) + V(3) = 4V(X) + 0 \\ &= 4 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

حل التمرين 5:

1_ دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \frac{3}{64} * x^2 \geq 0, \quad 0 < x < 4$$

$$\int_0^4 f(x).dx = 1$$

$$\int_0^4 \frac{3}{64} x^2 . dx = \left[\frac{1}{64} * x^3 \right]_0^4 = \frac{1}{64} * 4^3 - 0 = 1$$

2_ دالة التوزيع:

$$F(x) = \int_0^x f(X).dX = \int_0^x \frac{3}{64} X^2 . dX = \left[\frac{1}{64} * X^3 \right]_0^x = \frac{1}{64} * x^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{64} . x^3 & , \quad 0 < x < 4 \\ 1 & , \quad x \geq 4 \end{cases}$$

3_ الإحتمال:

$$pr(x \leq 3) = F(3) = \frac{1}{64} . 3^3 = \frac{27}{64}$$

$$pr(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{64} . 2^3 - \frac{1}{64} . 1^3 = \frac{7}{64}$$

حل التمرين 6:

1_ لدينا دالة كثافة احتمالية، يعني:

$$\int_0^1 f(x).dx = 1$$

$$\int_0^1 ax^2 . dx = \left[\frac{a}{3} . x^3 \right]_0^1 = \frac{a}{3} * 1^3 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \quad \Rightarrow a = 3$$

وتكتب:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x < 0, x > 1 \end{cases}$$

2_ دالة التوزيع:

$$F(x) = \int_0^x f(X).dX = \int_0^x 3X^2 . dX = [X^3]_0^x = x^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^3 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

3_ حساب الإحتمالات:

$$pr\left(x \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$pr\left(x > \frac{3}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

4_حساب التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 3x^3 \cdot dx$$

$$= \left[\frac{3}{4} * x^4 \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^1 3x^4 \cdot dx$$

$$= \left[\frac{3}{5} * x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$