

الفصل الثاني: التوزيعات الإحصائية المنقطعة:

التوزيعات الإحصائية المنقطعة أو قوانين التوزيعات الإحصائية المنقطعة لها صيغ عامة معروفة، قد تكون على شكل جدول توزيع احتمالي أو على شكل دالة احتمال. المتغيرات العشوائية المنقطعة التي تتبع قانون معين تحقق شروط دالة الاحتمال .

التوزيعات المنقطعة التي لها أهمية سواء من الناحية النظرية أو من الناحية التطبيقية، هي:
-التوزيع المنتظم -توزيع برنولي -توزيع ثنائي الحدين -التوزيع الهندسي -التوزيع مافوق الهندسي -توزيع بواسون .

1) التوزيع المنتظم المنقطع: Uniform Distribution U(n)

التوزيع المنتظم توزيع احتمالي بسيط يلائم الظواهر التي تكون فيها جميع قيم المتغير المنقطع لها احتمالات متساوية .

مثال 1: نرمي حجر النرد، المتغير العشوائي الرقم الذي يظهر : $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$
كل رقم له احتمال $1/6$.

1-1) قانون التوزيع:

$$f(x) = 1/n, \quad x = 1, 2, 3, \dots, n$$

معطي بالدالة :

حيث n عدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي .

$$X \sim U(n)$$

و نكتب:

1-2) القيمة المتوقعة:

$$\mu = \frac{n+1}{2}$$

القيمة المتوقعة لمتغير منتظم:

1-3) التباين:

$$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

التباين:

مثال 2:

نأخذ عشوائيا شخص من بين 4 أشخاص، المتغير العشوائي رقم الشخص : $x=1, 2, 3, 4$
كل شخص له احتمال $1/4$.

$$f(x) = \frac{1}{4}$$

دالة الاحتمال:

$$E(X) = \sum x * f(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{2}$$

القيمة المتوقعة:

$$V(X) = \sum x^2 * f(x) - \mu^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} + \frac{16}{4} - \left[\frac{5}{2}\right]^2 = \frac{15}{12}$$

التباين:

(2) توزيع برنولي: Bernoulli B(1,ρ)

توزيع إحصائي متقطع يلائم الظواهر التي تشمل على حدثين ممكنين فقط (نتيجتين فقط):

حدث نسميه نجاح ويرمز له 1 ، والحدث الآخر نسميه فشل ويرمز له 0 .

إحتمال النجاح ويرمز له ρ ، وإحتمال الفشل: q=1-ρ

مجموع الاحتمالات: ρ+q=1

مثال 1: رمي قطعة نقود، النتيجة وجه: نجاح 1 ، النتيجة ظهر: فشل 0

إحتمال النجاح: ρ=1/2 ، وإحتمال الفشل: q=1/2

مثال 2: إطلاق طلقة على هدف، إصابة الهدف: نجاح 1 ، عدم إصابة الهدف: فشل 0

إحتمال النجاح ρ= 0.8 ، وإحتمال الفشل q= 0.2

(1-2) قانون التوزيع:

معطى بالدالة:

$$f(x) = \rho^x * q^{(1-x)}$$

$$x = 1, 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad q = 1 - \rho$$

أو بالجدول:

x	f(x)
1	ρ
0	q
	1

و نكتب: $X \sim B(1, \rho)$

(2-2) القيمة المتوقعة:

تحسب بالعلاقة: $E(X) = \sum x * f(x)$

$$E(X) = 1 * \rho + 0 * q = \rho$$

وتساوي:

أي إحتمال النجاح: μ=ρ

(3-2) التباين:

يحسب بالعلاقة : $V(X) = \sum x^2 * f(x) - \mu^2$

ويساوي : $V(X) = 1 * \rho + 0 * q - \rho^2 = \rho - \rho^2 = \rho(1 - \rho) = \rho * q$

أي جداء إحتمال النجاح في إحتمال الفشل : $\sigma^2 = \rho.q$

مثال 3:

نرمي حجر نرد، نسمي ظهور الرقم (4) نجاح 1، ظهور رقم آخر فشل 0 .

إحتمال النجاح $\rho = 1/6$ ، إحتمال الفشل $q = 5/6$ ،

القيمة المتوقعة و التباين : $E(X) = \rho = \frac{1}{6}$ ، $V(X) = \rho.q = \frac{5}{36}$

3) توزيع ثنائي الحدين: Binomial Distribution B(n,ρ)

توزيع إحتمالي متقطع يستخدم في الظواهر التي نهتم فيها بظهور حدث معين (نجاح 1) ، عدد من

المرات x من بين جملة من المحاولات عددها n .

وتكون:¹

_ كل محاولة لها نتيجتين فقط : نجاح 1 ، فشل 0 ؛

_ المحاولات عددها n ، مستقلة عن بعضها البعض ؛

_ إحتمال النجاح ثابت ρ من محاولة لأخرى ؛

_ عدد مرات النجاح هو المتغير العشوائي x ، الذي يتراوح بين 0 (صفر نجاح أي المحاولات كلها فشل) و

n (المحاولات كلها نجاح) .

مثال 1: رمي قطعة نقود 3 مرات ، النتيجة وجه: نجاح، عدد مرات النجاح: $x=0,1, 2, 3$.

مثال 2: إطلاق 4 طلقات على هدف، في كل طلقة إصابة الهدف: نجاح ،

إحتمال النجاح $\rho = 0.8$ ، عدد مرات الإصابة: $x= 0, 1, 2, 3, 4$.

توزيع ثنائي الحدين هو تكرار لتجربة برنولي n مرة : تكرار ل (1 أو 0) n مرة ،

بحيث يصبح المتغير العشوائي x هو مجموع (1 أو 0) n مرة .

3-1) دالة الإحتمال:

الصيغة العامة لدالة الإحتمال :

¹ جورج كانافوس، دون ميلر. الإحصاء للتجاربيين مدخل حديث. ترجمة سلطان محمد عبد الحميد. دار المريخ الرياض 2004 . ص 200 .

$$f(x) = C_n^x * \rho^x * q^{(n-x)}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

C_n^x توفيقه تمثل عدد حالات (مرات) الحصول على x نجاح و بدون ترتيب .

ρ إحتمال النجاح في كل مرة ، q إحتمال الفشل.

$$X \sim B(n, \rho) \quad \text{و نكتب:}$$

مثال 3:

نأخذ المثال 2 السابق، إطلاق 4 طلقات على هدف؛

$$f(x) = C_4^x * 0.8^x * 0.2^{(4-x)} \quad \text{دالة الإحتمال:}$$

$$x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$pr(x = 0) = f(0) = C_4^0 * 0.8^0 * 0.2^4 = 0.0016 \quad \text{إحتمال إصابة الهدف 0 مرة:}$$

$$pr(x = 3) = f(3) = C_4^3 * 0.8^3 * 0.2^1 = 0.4096 \quad \text{إحتمال إصابة الهدف 3 مرات:}$$

(2-3) القيمة المتوقعة:

$$\mu = n * \rho \quad \text{القيمة المتوقعة لمتغير ثنائي الحدين:}$$

أي جداء عدد المحاولات في إحتمال النجاح.

(3-3) التباين:

$$\sigma^2 = n * \rho * q \quad \text{التباين:}$$

أي جداء عدد المحاولات في إحتمال النجاح في إحتمال الفشل.

مثال 4:

نأخذ المثال 2 ؛

$$\mu = 4 * 0.8 = 3.2 \quad \text{القيمة المتوقعة:}$$

$$\sigma^2 = 4 * 0.8 * 0.2 = 0.64 \quad \text{التباين:}$$

(4-3) تجميع توزيع ثنائي الحدين:

ليكن متغيرين عشوائيين مستقلين X_1 , X_2 يتبعان توزيع ثنائي الحدين بنفس نسبة النجاح ρ :

$$X_1 \sim B(n_1, \rho)$$

$$X_2 \sim B(n_2, \rho)$$

المتغير: $Y = X_1 + X_2$ يتبع توزيع ثنائي الحدين بنسبة نجاح ρ ، وعدد: $n = n_1 + n_2$

$$Y \sim B(n, \rho)$$

(4) التوزيع الهندسي: $G(\rho)$ Geometric Distribution

يعتمد على فرضيات تجربة برنولي:²

نجاح ، فشل . بمعدل نجاح ثابت ρ ، ومعدل فشل $q=1-\rho$.
نكرر محاولات برنولي إلى غاية الحصول على نجاح في المحاولة k ، وتكون:
_المحاولات مستقلة عن بعضها ؛

_المتغير العشوائي x هو رقم المحاولة التي تحقق نجاح .

(1-4) دالة الاحتمال:

تعطي بالشكل : $f(x) = \rho * q^{x-1}$

$$x = 1, 2, 3, \dots, k$$

ونكتب: $X \sim G(\rho)$

(2-4) القيمة المتوقعة:

القيمة المتوقعة تعرف بأنها مقلوب: $\mu = \frac{1}{\rho}$

أي مقلوب احتمال النجاح .

(3-4) التباين:

التباين يعرف أيضا بأنه جداء المقلوب: $\sigma^2 = \frac{1}{\rho} * \frac{q}{\rho} = \frac{q}{\rho^2}$

أي جداء مقلوب احتمال النجاح في احتمال الفشل مقسوم على احتمال النجاح .

مثال:

شخص يحاول إصابة هدف، معدل إصابته 0.8 ؛

دالة الاحتمال: $f(x) = 0.8 * 0.2^{x-1}$

$$x = 1, 2, 3, \dots$$

_احتمال أن يصيب الهدف في المحاولة 3 : $f(3) = 0.8 * 0.2^2 = 0.032$

_القيمة المتوقعة: $\mu = \frac{1}{0.8} = 1.25$

_التباين: $\sigma^2 = \frac{0.2}{0.8^2} = 0.3125$

² Khaldi khaled, Probabilités. Op-cit, p 69 .

5) التوزيع مافوق الهندسي: Hypergeometric Distribution $H(N,n,r)$

يرتبط كثيرا بتوزيع ثنائي الحدين: ظهور حدث معين (نجاح) عدد من المرات x من بين جملة من المحاولات عددها n .

الإختلاف بينهما، هو أنه في التوزيع مافوق الهندسي تكون:

المحاولات غير مستقلة عن بعضها ؛

إحتمال النجاح يتغير من محاولة لأخرى .

مثال 1:

ليكن مجتمع مكون من $N=5$ ، أشخاص : $\{ H, H, F, F, F \}$

3 ثلاث نساء و 2 رجلين .

نأخذ $n=2$ شخصين عشوائيا بدون إرجاع ،

نسمة ظهور امرأة في كل سحب نجاح ، عدد مرات النجاح : $x = 0, 1, 2$

عدد النساء $r=3$ ، عدد العناصر التي تقابل نجاح من بين $N=5$ عنصر ،

إحتمال النجاح :

السحب الأول : $3/5$ ، السحب الثاني : $3/4$ أو $2/4$. إحتمال النجاح غير ثابت .

عدد مرات الفشل : $n-x=2-x$.

عدد الرجال $N-r=2$ عدد العناصر التي تقابل فشل من بين $N=5$ عنصر .

المفهوم المعتاد في ظواهر التوزيع مافوق الهندسي هو كالتالي :³

r يقابل عدد العناصر التي تقترض كنجاحات؛

N عدد عناصر المجتمع؛

$N-r$ يقابل عدد العناصر التي تقترض كفشل.

في عينة من n عنصر تؤخذ بدون إرجاع ، يمكن الحصول على x عنصر تمثل عدد مرات النجاح ، و

$n-x$ عنصر تمثل عدد مرات الفشل . لكي يتحقق هذا يجب:

أن نأخذ x نجاح من بين r عنصر، أي : C_r^x

³ أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. مرجع سبق ذكره ، ص 156 .

ونأخذ $n-x$ فشل من بين $N-r$ عنصر، أي : C_{N-r}^{n-x}
وهذه تمثل عدد الحالات الملائمة للظاهرة .

أما عدد الحالات الممكنة (الكلية) ، فهي : C_N^n
أي في جميع الحالات نأخذ n عنصر من بين N .
الإحتمال هو عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة .

5-1 دالة الإحتمال:

$$f(x) = \frac{C_r^x * C_{N-r}^{n-x}}{C_N^n} \quad \text{دالة الإحتمال تأخذ الشكل:}$$

$$x = 0, 1, 2 \dots n$$

حيث: N عدد عناصر المجتمع ،
 n عدد المحاولات أو عناصر العينة ،
 r عدد العناصر التي تفترض كنجاحات .

$$X \sim H(N, n, r) \quad \text{و نكتب:}$$

مثال 2:

نأخذ المثال 1 السابق،

$$f(x) = \frac{C_3^x * C_2^{2-x}}{C_5^2} \quad \text{دالة الإحتمال:}$$

$$x = 0, 1, 2$$

$$f(0) = \frac{C_3^0 * C_2^2}{C_5^2} = \frac{1*1}{10} = \frac{1}{10} \quad \text{إحتمال 0 امرأة:}$$

$$pr(x \geq 1) = f(1) + f(2) \quad \text{إحتمال على الأقل امرأة واحدة 1:}$$

$$pr(x \geq 1) = \frac{C_3^1 * C_2^1}{C_5^2} + \frac{C_3^2 * C_2^0}{C_5^2} = \frac{3*2}{10} + \frac{3*1}{10} = \frac{9}{10}$$

5-2 القيمة المتوقعة:

$$\mu = n * \frac{r}{N} \quad \text{القيمة المتوقعة هي جداء عدد المحاولات في إحتمال النجاح:}$$

$$\left(\frac{r}{N}\right) \quad \text{إحتمال النجاح للمحاولة الأولى}$$

5-3 التباين:

التباين هو جداء عدد المحاولات في إحتمال النجاح في إحتمال الفشل في معامل عدم الإرجاع :

$$\sigma^2 = n * \frac{r}{N} * \frac{(N-r)}{N} * \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{n*r*(N-r)*(N-n)}{N^2*(N-1)}$$

مثال 3:

نأخذ المثال 1 السابق،

$$\mu = 2 * \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \quad \text{القيمة المتوقعة:}$$

$$\sigma^2 = \frac{2*3*(5-3)*(5-2)}{5^2*(5-1)} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25} \quad \text{التباين:}$$

6) توزيع بواسون: $Poisson P(\lambda)$

قانون بواسون هو توزيع إحصائي متقطع يلائم الظواهر التي تقع فيها أحداث (نجاحات) بمعدل ثابت في وحدة أو مجال من : الزمن ، المسافة ، المساحة ، الحجم ...
وتكون: ⁴

_الأحداث أو النجاحات نادرة ؛

_الأحداث مستقلة عن بعضها من مجال لآخر؛

_المجال يؤخذ عشوائياً، و المتغير العشوائي x هو عدد النجاحات في المجال .

أمثلة:

1°) عدد المسافرين الذين يصلون إلي محطة قطار في ساعة.

2°) عدد المكالمات الهاتفية في ساعة.

3°) عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من كتاب.

4°) عدد العيوب التقنية في كل 100 كلم من طريق.

6-1) دالة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{\lambda^x * e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{الصيغة العامة لدالة بواسون:}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

حيث: λ معدل أو متوسط النجاحات في المجال،

$e=2.718$ القيمة الأسية.

ونكتب: $X \sim P(\lambda)$

⁴ جورج كانافوس، دون ميلر، الإحصاء للتجاربيين مدخل حديث. مرجع سبق ذكره. ص 237 .

(2-6) القيمة المتوقعة:

القيمة المتوقعة هي معدل النجاحات في المجال: $\mu = \lambda$

(3-6) التباين:

التباين أيضا هو معدل النجاحات: $\sigma^2 = \lambda$

مثال 1:

يتلقى قسم إستجالات في المتوسط 5 مكالمات في الساعة، x متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات في ساعة أخذت عشوائيا .

دالة الاحتمال: $f(x) = \frac{5^x * e^{-5}}{x!}$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

إحتمال تلقي 0 مكالمات في ساعة: $f(0) = \frac{5^0 * e^{-5}}{0!} = 0.00673$

إحتمال تلقي 3 مكالمات في ساعة: $f(3) = \frac{5^3 * e^{-5}}{3!} = 0.1403$

القيمة المتوقعة: $\mu = 5$

التباين: $\sigma^2 = 5$

(4-6) تجميع توزيع بواسون:

ليكن متغيرين عشوائيين مستقلين X_1 , X_2 يتبعان توزيع بواسون:

$$X_1 \sim P(\lambda_1)$$

$$X_2 \sim P(\lambda_2)$$

المتغير: $Y = X_1 + X_2$ يتبع توزيع بواسون بمتوسط: $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$Y \sim P(\lambda)$$

(5-6) تقريب توزيع ثنائي الحدين من بواسون: Poisson approximation

عندما تكون n كبيرة $n \geq 30$ ،

و p صغيرة ، أي: $n.p \leq 5$ ،

يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين من بواسون، بحيث: $\lambda = n.p$ ⁵

مثال 2:

⁵ نفس المرجع، ص 243 .

مصنع ينتج مصابيح كهربائية، نسبة المعيب $\rho = 1\%$ ، أخذنا عينة $n=30$ نسمي مصباح معيب نجاح، X متغير عشوائي يمثل عدد المصابيح المعيبة في العينة.

توزيع ثنائي الحدين:

$$f(x) = C_{30}^x * 0.01^x * 0.99^{30-x} \quad \text{دالة الاحتمال:}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, 30$$

$$f(1) = C_{30}^1 * 0.01^1 * 0.99^{29} = 0.224151 \quad \text{إحتمال 1 مصباح معيب:}$$

توزيع بواسون:

$$\lambda = n \cdot \rho = 30 * 0.01 = 0.3 \quad \text{المتوسط:}$$

$$f(x) = \frac{0.3^x * e^{-0.3}}{x!} \quad \text{دالة الاحتمال:}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(1) = \frac{0.3^1 * e^{-0.3}}{1!} = 0.222245 \quad \text{إحتمال 1 مصباح معيب:}$$