

## الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية ذات بعدين:

إذا كان لدينا متغير عشوائي  $X$  ، ومتغير عشوائي  $Y$  ، و يوجد احتمال أن كل قيمة ممكنة لـ  $X$  يمكن أن تحدث مع أي قيمة ممكنة لـ  $Y$  ، فإنه يكون لدينا متغير عشوائي ثنائي (bivariate variable) أو متغير عشوائي ببعدين Two-way Random Variables .

في حالة عدة متغيرات عشوائية، يكون لدينا متغير عشوائي بعدة أبعاد أو شعاع عشوائي.

### تعريف:

لتكن تجربة عشوائية مع فضاء عينة  $S$  ،

التطبيق  $(X, Y)$  من  $S$  في  $R^2$  ، الذي يرفق بكل عنصر  $a \in S$  ، ثنائية عددين حقيقيين :

$(X(a), Y(a))$  ، يسمى ثنائية متغيرات عشوائية ، إذا كان كل تطبيق  $X, Y$  متغير عشوائي.

فضاء متغيرتين عشوائيتين هو مجموعة الثنائيات: <sup>1</sup>

$$\mathcal{A} = \{(x, y); x = X(a), y = Y(a), a \in S\}$$

### (1 حالة المتغيرات المنقطعة:

#### 1-1 دالة الاحتمال المشترك: Join Probability Function

إذا كانت  $X, Y$  متغيرتين عشوائيتين منقطعتين:

القيم الممكنة لـ  $X$  :  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$

القيم الممكنة لـ  $Y$  :  $Y = y_1, y_2, \dots, y_m$

نفرض أنه لكل ثنائية من القيم  $(x_i, y_j)$  يوجد احتمال:  $f(x_i, y_j)$

أي يوجد احتمال أن:  $X = x_i, i = 1, 2, \dots, n$

و يوجد احتمال أن:  $Y = y_j, j = 1, 2, \dots, m$

حيث:  $f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j)$

<sup>1</sup> Khaldi khaled, Probabilités. Op-cit, P 95 .

تسمى الدالة  $f(X, Y)$  دالة الإحتمال المشترك للمتغيرين  $X, Y$  .

هذه الدالة تحقق الشرطين:

أ° لكل قيم  $X, Y$  الإحتمالات غير سالبة :  $f(x_i, y_j) \geq 0$

ب° مجموع الإحتمالات :  $\sum_1^n \sum_1^m f(x_i, y_j) = 1$

مثال 1:

نرمي حجري نرد، المتغير العشوائي  $X$  هو الرقم الذي يظهر على الحجر الأول، المتغير العشوائي  $Y$  هو الرقم الذي يظهر على الحجر الثاني:

الثنائية  $(X, Y)$  هي متغير عشوائي ببعدين، حيث:  $f(x_i, y_j) = \frac{1}{36}$

$$f(1,1) = \frac{1}{36}, f(1,2) = \frac{1}{36}, f(1,3) = \frac{1}{36}, \dots$$

$$f(2,1) = \frac{1}{36}, f(2,2) = \frac{1}{36}, \dots$$

## 2-1 جدول التوزيع الإحتمالي المشترك:

يمكن تمثيل كل ثنائية  $(x_i, y_j)$  و الإحتمال المقابل لها  $f(x_i, y_j)$  ، بجدول يسمى جدول التوزيع الإحتمالي المشترك أو جدول ثنائي Bivariate Table ،

حيث :  $f(x_i, y_j) = p_{ij}$

| $X / Y$  | $y_1$         | $y_2$         | $\dots$ | $y_j$         | $\dots$ | $y_m$         | $\Sigma$     |
|----------|---------------|---------------|---------|---------------|---------|---------------|--------------|
| $x_1$    | $p_{11}$      | $p_{12}$      | $\dots$ | $p_{1j}$      | $\dots$ | $p_{1m}$      | $p_{1\cdot}$ |
| $x_2$    | $p_{21}$      | $p_{22}$      | $\dots$ | $p_{2j}$      | $\dots$ | $p_{2m}$      | $p_{2\cdot}$ |
| $\dots$  | $\dots$       | $\dots$       |         | $\dots$       |         | $\dots$       | $\dots$      |
| $x_i$    | $p_{i1}$      | $p_{i2}$      | $\dots$ | $p_{ij}$      |         | $p_{im}$      | $p_{i\cdot}$ |
| $\dots$  | $\dots$       | $\dots$       |         |               | $\dots$ |               | $\dots$      |
| $x_n$    | $p_{n1}$      | $p_{n2}$      | $\dots$ | $p_{nj}$      |         | $p_{nm}$      | $p_{n\cdot}$ |
| $\Sigma$ | $p_{\cdot 1}$ | $p_{\cdot 2}$ | $\dots$ | $p_{\cdot j}$ | $\dots$ | $p_{\cdot m}$ | 1            |

الجدول يعطي كل الإحتمالات المشتركة ،

$$f(x_1, y_2) = pr(X = x_1, Y = y_2) = p_{12} \quad \text{مثلا:}$$

$$f(x_2, y_2) = pr(X = x_2, Y = y_2) = p_{22}$$

$$f(x_n, y_m) = pr(X = x_n, Y = y_m) = p_{nm} \quad \text{إلى آخر إحتمال:}$$

مجموع الإحتمالات في كل سطر يسمى إحتمال هامشي (إحتمال حدي):

$$pr(X = x_i) = \sum_1^m p_{ij} = p_{i\bullet}$$

أي إحتمال قيمة  $x_i$  ، مع كل قيم  $Y$  .

مجموع الإحتمالات في كل عمود يسمى أيضا إحتمال هامشي:

$$pr(Y = y_j) = \sum_1^n p_{ij} = p_{\bullet j}$$

أي إحتمال قيمة  $y_j$  ، مع كل قيم  $X$  .

المجاميع الهامشية دائما تحقق:

$$\sum_1^n p_{i\bullet} = \sum_1^m p_{\bullet j} = \sum_1^n \sum_1^m p_{ij} = 1$$

أي مجموع الإحتمالات يساوي واحد 1 ، سواء كان الجمع في الأسطر أو الأعمدة.

### 3-1 دالة الإحتمال الحدي (الهامشي): Marginal Probability Function

الإحتمالات الهامشية السابقة تعطينا دوال الإحتمال الهامشي أو دوال الإحتمال الحدية لكل من  $X, Y$

على حدة .<sup>2</sup>

دالة الإحتمال الحدية للمتغير  $X$  :

$$f_x(x_i) = pr(X = x_i) = \sum_1^m f(x_i, y_j) = p_{i\bullet}$$

---

<sup>2</sup> أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. مرجع سبق ذكره، ص 19 .

إحتمال قيمة  $x_i$  ، مع كل قيم  $Y$  ،

أي مجموع الإحتمالات في كل سطر، يتم التجميع لدالة الإحتمال المشترك بالنسبة للمتغير  $Y$  .

الدالة السابقة تكتب بإختصار:

$$f_x(X) = \sum_y f(x, y)$$

دالة الإحتمال الحدية للمتغير  $Y$  :

$$f_y(y_j) = pr(Y = y_j) = \sum_1^n f(x_i, y_j) = p_{\bullet j}$$

إحتمال قيمة  $y_j$  ، مع كل قيم  $X$  ،

أي مجموع الإحتمالات في كل عمود، يتم التجميع لدالة الإحتمال المشترك بالنسبة للمتغير  $X$  .

الدالة السابقة تكتب بإختصار:

$$f_y(Y) = \sum_x f(x, y)$$

مثال 2:

نأخذ المثال 1 السابق، رمي حجري نرد، المتغير العشوائي  $X$  هو الرقم الذي يظهر على الحجر الأول،

المتغير العشوائي  $Y$  هو الرقم الذي يظهر على الحجر الثاني:

الثنائية  $(X, Y)$  هي متغير عشوائي ببعيين،

جدول التوزيع الإحتمالي المشترك:

| $X / Y$ | $y_1=1$ | $y_1=2$ | $y_1=3$ | $y_1=4$ | $y_1=5$ | $y_1=6$ | $\Sigma$            |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------------|
| $x_1=1$ | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | $p_{1\bullet}=6/36$ |
| $x_1=2$ | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | $p_{2\bullet}=6/36$ |
| $x_1=3$ | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | $p_{3\bullet}=6/36$ |
| $x_1=4$ | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | $p_{4\bullet}=6/36$ |
| $x_1=5$ | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | $p_{5\bullet}=6/36$ |
| $x_1=6$ | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | 1/36    | $p_{6\bullet}=6/36$ |

|          |                      |                      |                      |                      |                      |                      |   |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---|
| $\Sigma$ | $p_{\bullet 1}=6/36$ | $p_{\bullet 2}=6/36$ | $p_{\bullet 3}=6/36$ | $p_{\bullet 4}=6/36$ | $p_{\bullet 5}=6/36$ | $p_{\bullet 6}=6/36$ | 1 |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---|

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad \text{دالة الإحتمال المشترك:}$$

الإحتمالات المشتركة:

$$f(1, 2) = pr(X = 1, Y = 2) = p_{12} = \frac{1}{36} \quad \text{مثلا:}$$

$$f(2, 2) = pr(X = 2, Y = 2) = p_{22} = \frac{1}{36}$$

وهي كلها متساوية هنا وتساوي جداء الإحتمالات المنفردة لكل رقم (إحتمال كل حدث منفرد):

$$p_{ij} = p_{12} = p_1 * p_2 = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{مثلا:}$$

دالة الإحتمال الحدية للمتغير X :

$$f_x(x_i) = pr(X = x_i) = \sum_1^m f(x_i, y_j) = p_{i\bullet}$$

الإحتمالات الحدية:

$$f_x(1) = pr(X = 1) = \sum_1^6 f(1, y_j) = p_{1\bullet} = \frac{6}{36} \quad \text{مثلا:}$$

$$f_x(2) = pr(X = 2) = \sum_1^6 f(2, y_j) = p_{2\bullet} = \frac{6}{36}$$

و تكتب بإختصار:

$$f_x(X) = \sum_y f(x, y) = p_{i\bullet}$$

$$f_x(1) = \sum_y f(1, y) = \frac{6}{36}$$

$$f_x(2) = \sum_y f(2, y) = \frac{6}{36}$$

دالة الإحتمال الحدية للمتغير Y :

$$f_y(y_j) = pr(Y = y_j) = \sum_1^n f(x_i, y_j) = p_{\bullet j}$$

الإحتمالات الحدية:

$$f_y(2) = pr(Y = 2) = \sum_1^6 f(x_i, 2) = p_{\bullet 2} = \frac{6}{36} \quad \text{مثلا:}$$

و تكتب بإختصار:

$$f_y(Y) = \sum_x f(x, y) = p_{\bullet j}$$

$$f_y(2) = \sum_x f(x, 2) = \frac{6}{36}$$

#### Conditional Probability Function : دالة الإحتمال الشرطي: (4-1)

رأينا سابقا الإحتمال المشترك يساوي:

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

و دالة الإحتمال المشترك للمتغيرين  $X, Y$ :

$$f(x, y) = pr(X = x, Y = y)$$

إذا كان المتغيرين مستقلين، فإن الإحتمال المشترك يساوي الجداء:

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j) = pr(X = x_i) * pr(Y = y_j)$$

$$f(x_i, y_j) = p_{i\bullet} * p_{\bullet j} = p_{ij}$$

دالة الإحتمال المشترك تكتب إذن:

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

أي في حال متغيرين مستقلين دالة الإحتمال المشترك تساوي جداء دالتي الإحتمال الحدية.

#### دوال الإحتمال الشرطي:

إذا كان المتغيرين غير مستقلين، فإن الإحتمال المشترك يساوي:

الجداء بشرط  $(X=x_i)$ :

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i, Y = y_j) =$$

$$f(x_i, y_j) = pr(X = x_i) * pr(Y = y_j / X = x_i)$$

دالة الإحتمال المشترك تكتب بالشكل:

$$f(x, y) = f_x(x) * f(y/x)$$

الدالة  $f(y/x)$  : تسمى دالة الإحتمال الشرطي للمتغير  $Y$  بشرط المتغير  $X=x$ .

ونفس الشيء للجداء بشرط  $(Y=y_j)$  :

$$f(x_i, y_j) = pr(Y = y_j, X = x_i) =$$

$$f(x_i, y_j) = pr(Y = y_j) * pr(X = x_i / Y = y_j)$$

دالة الإحتمال المشترك تكتب بالشكل:

$$f(x, y) = f_y(y) * f(x/y)$$

الدالة :  $f(x/y)$  تسمى دالة الإحتمال الشرطي للمتغير  $X$  بشرط المتغير  $Y=y$  .

إذن دوال الإحتمال الشرطي: <sup>3</sup>

للمتغير  $X$  :

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}$$

و الإحتمال الشرطي يكتب:

$$pr(X = x_i / Y = y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

للمتغير  $Y$  :

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}$$

و الإحتمال الشرطي يكتب:

$$pr(Y = y_j / X = x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(x=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

مثال 3:

ليكن متغيرين  $X, Y$  . المتغير  $X$  يأخذ القيم :  $X = 10, 20, 20, 20, 30$

المتغير  $Y$  يأخذ القيم :  $Y = 2, 4, 4, 6$

جدول التوزيع الإحتمالي المشترك للمتغيرين:

<sup>3</sup> نفس المرجع، ص 22 .

| X / Y    | 2                            | 4                             | 6                            | $\Sigma$                      |
|----------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 10       | 1/20                         | 2/20                          | 1/20                         | $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$  |
| 20       | 3/20                         | 6/20                          | 3/20                         | $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ |
| 30       | 1/20                         | 2/20                          | 1/20                         | $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$  |
| $\Sigma$ | $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ | $\frac{10}{20} = \frac{2}{4}$ | $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ | 1                             |

الإحتمالات الشرطية للمتغير X :

$$pr(X = x_i / Y = y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

مثلا:

$$pr(X = 20 / Y = 2) = \frac{f(20, 2)}{pr(Y=2)} = \frac{3/20}{5/20} = \frac{3}{5}$$

$$pr(X = 20 / Y = 4) = \frac{f(20, 4)}{pr(Y=4)} = \frac{6/20}{10/20} = \frac{3}{5}$$

دالة الإحتمال الشرطي للمتغير X :

مثلا: بشرط  $y=4$  ,  $y=2$

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}$$

$$f(x/2) = \frac{f(x, 2)}{f_y(2)} = \frac{f(x, 2)}{5/20}$$

$$f(x/4) = \frac{f(x, 4)}{f_y(4)} = \frac{f(x, 4)}{10/20}$$

الإحتمالات الشرطية للمتغير Y :

$$pr(Y = y_j / X = x_i) = \frac{f(x_i, y_j)}{pr(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

مثلا:

$$pr(Y = 4 / X = 20) = \frac{f(20, 4)}{pr(X=20)} = \frac{6/20}{12/20} = \frac{2}{4}$$

$$pr(Y = 4/X = 30) = \frac{f(30,4)}{pr(x=30)} = \frac{2/20}{4/20} = \frac{2}{4}$$

دالة الإحتمال الشرطي للمتغير Y :

مثلا: بشرط  $x=30$  ,  $x=20$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}$$

$$f(y/20) = \frac{f(20,y)}{f_x(20)} = \frac{f(20,y)}{12/20}$$

$$f(y/30) = \frac{f(30,y)}{f_x(30)} = \frac{f(30,y)}{4/20}$$

### Distribution Function (5-1) دالة التوزيع:

دالة التوزيع تعرف بنفس الشكل كما في حالة متغير واحد ، أي دالة الإحتمال التجميعي :

$$F(x, y) = pr(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_1}^x \sum_{y_1}^y f(X, Y)$$

مثال 4:

نأخذ جدول المثال 3 السابق :

$$F(20, 4) = pr(X \leq 20, Y \leq 4) = \sum_{10}^{20} \sum_2^4 f(X, Y)$$

$$F(20, 4) = \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20}\right) + \left(\frac{3}{20} + \frac{6}{20}\right) = \frac{12}{20}$$

$$F(20, 6) = pr(X \leq 20, Y \leq 6) = \sum_{10}^{20} \sum_2^6 f(X, Y)$$

$$F(20, 6) = \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{3}{20} + \frac{6}{20} + \frac{3}{20}\right) = \frac{16}{20}$$

### Conditional Expectation (6-1) التوقع الشرطي:

-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu_x = \sum_{x_1}^{x_n} x \cdot f_x(x) \quad \text{للمتغير } X$$

$$E(y) = \mu_y = \sum_{y_1}^{y_m} y \cdot f_y(y) \quad \text{للمتغير } Y$$

-التباين:

$$V(X) = \sigma_x^2 = \sum_{x_1}^{x_n} x^2 \cdot f_x(x) - \mu_x^2 \quad : \text{ للمتغير } X$$

$$V(Y) = \sigma_y^2 = \sum_{y_1}^{y_m} y^2 \cdot f_y(y) - \mu_y^2 \quad : \text{ للمتغير } Y$$

-التوقع الرياضي الشرطي:

يعرف بنفس الصيغة لكن بإستخدام دالة الإحتمال الشرطي:

$$E(X/Y) = \sum_{x_1}^{x_n} x \cdot f(x/y) \quad : \text{ للمتغير } X \text{ (بشرط } y)$$

$$E(X/Y) = \sum_{x_1}^{x_n} x \cdot \frac{f(X,Y)}{f_y(y)} \quad : \text{ و يساوي:}$$

$$E(Y/X) = \sum_{y_1}^{y_m} y \cdot f(y/x) \quad : \text{ للمتغير } Y \text{ (بشرط } x)$$

$$E(Y/X) = \sum_{y_1}^{y_m} y \cdot \frac{f(X,Y)}{f_x(x)} \quad : \text{ و يساوي:}$$

-المتغيرات غير المستقلة:

إذا كان المتغيرين  $X, Y$  غير مستقلين، فإن توقع الجداء يكون:

$$E(X.Y) = E[X.E(Y/X)]$$

$$E(X.Y) = E[Y.E(X/Y)] \quad : \text{ و أيضا:}$$

## 7-1 التباين المشترك ومعامل الارتباط:

-التباين المشترك : Covariance

مما رأيناه سابقا يمكن أن نكتب:

$$\mu_x = E(X) = \sum x \cdot f_x(x) \quad : \text{ التوقع الرياضي لـ } X$$

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X - E(X))^2 = \sum (x - \mu_x)^2 \cdot f_x(x) \quad : \text{ التباين:}$$

$$\mu_y = E(Y) = \sum y \cdot f_y(y) \quad : \text{ التوقع الرياضي لـ } Y$$

$$\sigma_y^2 = V(Y) = E(Y - E(Y))^2 = \sum (y - \mu_y)^2 \cdot f_y(y) \quad : \text{ التباين:}$$

التباين المشترك للمتغيرين  $X, Y$  يعرف بالعلاقة:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y)$$

أي أن التباين المشترك هو التوقع الرياضي لجداء الانحرافين عن المتوسط.

ويساوي أيضا: <sup>4</sup>

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{cov}(X, Y) = \sum x \cdot y \cdot f(x, y) - \mu_x \mu_y$$

خواص:

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) \quad (^\circ 1) \text{ التباين المشترك:}$$

$$\text{cov}(X, X) = v(X) \quad (^\circ 2) \text{ إذا كان المتغير نفسه } Y=X :$$

$$\text{cov}(X, a) = 0 \quad (^\circ 3) \text{ إذا كان } a \text{ ثابت:}$$

$$\text{cov}(aX, bY) = a \cdot b \cdot \text{cov}(X, Y) \quad (^\circ 4) \text{ إذا كان } a, b \text{ ثابتين:}$$

$$\text{cov}(X + Y, S) = \text{cov}(X, S) + \text{cov}(Y, S) \quad (^\circ 5) \text{ لتكن: } X, Y, S \text{ متغيرات عشوائية،}$$

المتغيرات المستقلة:

إذا كان  $X, Y$  متغيرين مستقلين فإن التباين المشترك يساوي:

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \\ &= E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 \end{aligned}$$

المتغيرات غير المستقلة:

إذا كان  $X, Y$  متغيرين غير مستقلين التباين المشترك:

$$\text{cov}(X, Y) \neq 0$$

و التباين يساوي:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

<sup>4</sup> سيمور ليبسنتز، الإحتمالات. مرجع سبق ذكره ص 109 .

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2.cov(X, Y)$$

### -معامل الارتباط: Coefficient of Correlation

معامل الارتباط بين متغيرين  $X, Y$  ويرمز له  $r_{xy}$  ، يعرف بالعلاقة: <sup>5</sup>

$$r_{xy} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

أي أنه نسبة التباين المشترك إلي جداء الانحرافين المعياريين للمتغيريين.

معامل الارتباط يعبر عن درجة الارتباط بين المتغيرين و إتجاه الارتباط موجب أم سالب (طردي، عكسي) ،

حيث قيم معامل الارتباط :  $-1 \leq r \leq +1$

إرتباط سالب :  $-1 \leq r < 0$

إرتباط موجب :  $0 < r \leq +1$

إذا كان  $X, Y$  مستقلين فإن :  $r = 0$

خواص:

إذا كان  $X, Y$  متغيرين غير مستقلين ، و  $a, b$  ثوابت:

$$1^\circ) r_{(x+a)(y+b)} = r_{xy}$$

$$2^\circ) r_{(x-a)(y-b)} = r_{xy}$$

$$3^\circ) r_{(ax)(by)} = r_{xy}$$

أي معامل الارتباط لا يتأثر بالثوابت (كسر).

مثال 5:

ليكن جدول التوزيع الإحتمالي للمتغيرين  $X, Y$  :

| X / Y | 1    | 2    | $\Sigma$ |
|-------|------|------|----------|
| 1     | 2/12 | 4/12 | 6/12     |
| 2     | 1/12 | 4/12 | 5/12     |

<sup>5</sup> نفس المرجع، نفس الصفحة .

|          |      |      |      |
|----------|------|------|------|
| 3        | 1/12 | 0    | 1/12 |
| $\Sigma$ | 4/12 | 8/12 | 1    |

التوزيع الإحتمالي للمتغير X :

| X | $f_x(x)$ | $x \cdot f_x(x)$ | $x^2 \cdot f_x(x)$ |
|---|----------|------------------|--------------------|
| 1 | 6/12     | 6/12             | 6/12               |
| 2 | 5/12     | 10/12            | 20/12              |
| 3 | 1/12     | 3/12             | 9/12               |
|   | 1        | 19/12            | 35/12              |

التوقع الرياضي:  $\mu_x = \frac{19}{12} = 1.5833$

التباين:  $\sigma_x^2 = \frac{35}{12} - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{59}{144} = 0.4097$

التوزيع الإحتمالي للمتغير Y :

| Y | $f_y(y)$ | $y \cdot f_y(y)$ | $y^2 \cdot f_y(y)$ |
|---|----------|------------------|--------------------|
| 1 | 4/12     | 4/12             | 4/12               |
| 2 | 8/12     | 16/12            | 32/12              |
|   | 1        | 20/12            | 36/12              |

التوقع الرياضي:  $\mu_y = \frac{20}{12} = 1.6666$

التباين:  $\sigma_y^2 = \frac{36}{12} - \left(\frac{20}{12}\right)^2 = \frac{32}{144} = 0.2222$

جدول التوزيع الإحتمالي المشترك للجداء X.Y :

| X.Y | $f(x,y)$ | $(x,y) \cdot f(x,y)$ |
|-----|----------|----------------------|
| 1   | 2/12     | 2/12                 |
| 2   | 5/12     | 10/12                |

|   |      |       |
|---|------|-------|
| 3 | 1/12 | 3/12  |
| 4 | 4/12 | 16/12 |
| 6 | 0    | 0     |
|   | 1    | 31/12 |

$$E(XY) = \sum xy \cdot f(x, y) = \frac{31}{12} \quad \text{التوقع الرياضي للجداء:}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \quad \text{التباين المشترك:}$$

$$= \sum x \cdot y \cdot f(x, y) - \mu_x \mu_y =$$

$$= \frac{31}{12} - \frac{19}{12} * \frac{20}{12} = \frac{-8}{144} = -0.0556$$

معامل الارتباط:  $r_{xy}$

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{-0.0556}{\sqrt{0.4097} * \sqrt{0.2222}} = \frac{-0.0556}{0.30144} = -0.184$$

## (2) حالة المتغيرات المستمرة:

### 1-2 دالة كثافة الإحتمال المشترك لمتغيرين: Join Density Function

نسمي دالة كثافة الإحتمال لمتغيرتين مستمرتين  $X, Y$  ، أو دالة الكثافة المشتركة الدالة  $f(X, Y)$

التي تحقق الشرطين:

$$f(x, y) \geq 0 \quad (1^\circ) \text{ دالة غير سالبة:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (2^\circ) \text{ كل الإحتمالات:}$$

إذا كان مجال التعريف  $]-\infty, +\infty[$  ،

و يمكن أن يكون مجال آخر:  $[x_1, x_n]$  ،  $[y_1, y_m]$  .

### 2-2 دالة التوزيع لمتغيرين: Distribution Function

دالة التوزيع أو دالة الإحتمال التجميعي تعرف بالشكل:

$$F(x, y) = pr(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

أي التكامل المزدوج لدالة الكثافة المشتركة من أول قيمة لمجال التعريف لكل متغير إلي غاية ثنائية معينة  $(x, y)$ .

خواص:

°1 دالة متزايدة على مجال معين؛

°2 دالة مستمرة على  $\mathbb{R}$ ؛

°3 الإحتمال:  $F(+\infty, +\infty) = 1$

°4 الإحتمالات:  $F(-\infty, +\infty) = F(+\infty, -\infty) = 0$

°5 المشتقة الكلية:  $f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$

### 3-2 دالة كثافة الإحتمال الحدية: Marginal Density Function

دالة كثافة الإحتمال الحدية أو الإحتمال الهامشي للمتغير  $X$ ، هي تكامل دالة الكثافة المشتركة بالنسبة للمتغير الآخر  $Y$ :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_x(x) = \int_{y_1}^{y_m} f(x, y) dy, \quad y \in [y_1, y_m]$$

و بنفس الشكل دالة كثافة الإحتمال الحدية أو الإحتمال الهامشي للمتغير  $Y$ ، هي تكامل دالة الكثافة المشتركة بالنسبة للمتغير الآخر  $X$ :<sup>6</sup>

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$f_y(y) = \int_{x_1}^{x_n} f(x, y) dx, \quad x \in [x_1, x_n]$$

<sup>6</sup> أحمد عودة، مقدمة في النظرية الإحصائية. مرجع سبق ذكره، ص 39.

## Marginal Distribution Function (4-2) دالة التوزيع الحدية:

دالة التوزيع الحدية للمتغير  $X$  :

$$F_x(x) = pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx$$

أي تساوي دالة الكثافة الحدية للمتغير  $X$  .

و بنفس الشكل دالة التوزيع الحدية للمتغير  $Y$  :

$$F_y(y) = pr(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$$

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^y f_y(y) dy$$

أي تساوي دالة الكثافة الحدية للمتغير  $Y$  .

## Conditional Probability Function (5-2) دالة الإحتمال الشرطي:

دالة كثافة الإحتمال المشترك تكتب بالشكل:

$$f(x, y) = f_x(x) * f(y/x)$$

وكذلك:

$$f(x, y) = f_y(y) * f(x/y)$$

دالة الإحتمال الشرطي:

للمتغير  $X$  (بشرط  $y$ ) :

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}$$

للمتغير  $Y$  (بشرط  $x$ ) :

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}$$

### المتغيرات المستقلة:

إذا كان  $X, Y$  متغيرين مستقلين:

$$f(x, y) = f_x(x) * f_y(y)$$

ذلك لأن:

$$f(x/y) = f_x(x) \quad , \quad f(y/x) = f_y(y)$$

### 6-2 التوقع الشرطي: Conditional Expectation

-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x) dx \quad : \text{للمتغير } X$$

$$E(y) = \mu_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_y(y) dy \quad : \text{للمتغير } Y$$

-التباين:

$$V(X) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_x(x) dx - \mu_x^2 \quad : \text{للمتغير } X$$

$$V(Y) = \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_y(y) dy - \mu_y^2 \quad : \text{للمتغير } Y$$

-التوقع الشرطي:

يعرف بنفس الصيغة لكن بإستخدام دالة الإحتمال الشرطي: <sup>7</sup>

$$E(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/y) dx \quad : \text{للمتغير } X \text{ (بشرط } y)$$

$$E(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{f(x,y)}{f_y(y)} \cdot dy \quad : \text{و يساوي:}$$

$$E(Y/X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y/x) dy \quad : \text{للمتغير } Y \text{ (بشرط } x)$$

$$E(Y/X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{f(x,y)}{f_x(x)} \cdot dx \quad : \text{و يساوي:}$$

-المتغيرات غير المستقلة:

---

<sup>7</sup> نفس المرجع، ص 61 .

إذا كان المتغيرين  $X, Y$  غير مستقلين، فإن توقع الجداء يكون:

$$E(X.Y) = E[X.E(Y/X)]$$

$$E(X.Y) = E[Y.E(X/Y)] \quad \text{و أيضا:}$$

## 7-2) التباين المشترك و معامل الارتباط:

### التباين المشترك: Covariance

التباين المشترك بين المتغيرين  $X, Y$  يعرف بالعلاقة:<sup>8</sup>

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

حيث:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y) dy dx$$

المتغيرات المستقلة: إذا كان  $X, Y$  متغيرين مستقلين فإن التباين المشترك يساوي:

$$cov(X, Y) = 0$$

المتغيرات غير المستقلة: إذا كان  $X, Y$  متغيرين غير مستقلين التباين المشترك:

$$cov(X, Y) \neq 0$$

و التباين يساوي:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2.cov(X, Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2.cov(X, Y)$$

### معامل الارتباط: coefficient of Correlation

معامل الارتباط بين متغيرين  $X, Y$  يعرف بالعلاقة:<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Khaldi khaled, Probabilités. Op-cit P 99 .

<sup>9</sup> Idem P 100 .

$$r_{xy} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

حيث: قيم معامل الارتباط :  $-1 \leq r \leq +1$

إرتباط سالب :  $-1 \leq r < 0$

إرتباط موجب :  $0 < r \leq +1$

إذا كان  $X, Y$  مستقلين فإن :  $r = 0$

### مثال 6:

لتكن دالة الكثافة لمتغيرين  $X, Y$  :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & , 0 < x < y < 1 \\ 0 & , \text{ other wise} \end{cases}$$

دالة الكثافة الحدية للمتغير  $X$  :

$$f_x(x) = \int_x^1 f(x, y) dy = \int_x^1 2. dy = [2y]_x^1$$

$$f_x(x) = 2 - 2x$$

حيث:  $0 < x < 1$

دالة الكثافة الحدية للمتغير  $Y$  :

$$f_y(y) = \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^y 2. dx = [2x]_0^y$$

$$f_y(y) = 2y$$

حيث:  $0 < y < 1$

دالة الكثافة الشرطية:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$$

حيث:  $0 < x < y$  ,  $0 < y < 1$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{2}{2-2x} = \frac{1}{1-x}$$

حيث:  $x < y < 1$  ,  $0 < x < 1$

التوقع الشرطي  $E(X/Y)$ :

$$E(X/y) = \int_0^y x \cdot f(x/y) dx = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y} \cdot dx = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} \cdot x^2 \right]_0^y$$

$$E(X/Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{y} - 0 = \frac{y}{2}$$

حيث:  $0 < y < 1$

التوقع الشرطي  $E(Y/X)$ :

$$E(Y/X) = \int_x^1 y \cdot f(y/x) dy = \int_x^1 y \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot dy = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)} \cdot y^2 \right]_x^1$$

$$E(Y/X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{(1-x)} = \frac{1-x^2}{2(1-x)} = \frac{1+x}{2}$$

حيث:  $0 < x < 1$

حساب الإحتمال:  $pr(0 < x < 1/2)$

نستعمل دالة الكثافة الحدية:

$$pr\left(0 < x < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_x(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - 2x) dx$$

$$= [2x - x^2]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

حساب الإحتمال الشرطي  $pr((0 < x < 1/2) | y = 3/4)$  ، بشرط  $(y = 3/4)$ :

نستعمل دالة الكثافة الشرطية:

$$pr\left((0 < x < \frac{1}{2}) / y = \frac{3}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(x / y = \frac{3}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3/4}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{3}\right) dx = \left[\frac{4}{3} \cdot x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

التوقع الرياضي:  $E(X)$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f_x(x) dx = \int_0^1 x(2 - 2x) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx$$

$$= \left[ x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

التوقع الرياضي:  $E(Y)$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^1 y \cdot f_y(y) dy = \int_0^1 y(2y) dy = \int_0^1 (2y^2) dy \\ &= \left[ \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

توقع الجداء،  $E(XY)$  :

$$E(XY) = \int_0^1 \int_x^1 xy \cdot f(x, y) dy dx \quad \text{نحسب:}$$

$$x < y < 1, \quad 0 < x < 1 \quad \text{حيث:}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy \cdot f(x, y) dx dy \quad \text{وهي نفس النتيجة عندما نحسب:}$$

$$0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \quad \text{حيث:}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^y xy \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^y 2xy \cdot dx \cdot dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^y 2xy \cdot dx \right) dy = \int_0^1 ([x^2 y]_0^y) \cdot dy \\ &= \int_0^1 (y^2 \cdot y - 0) \cdot dy = \int_0^1 (y^3) \cdot dy = \left[ \frac{1}{4} \cdot y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

التباين:  $V(X)$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot f_x(x) dx = \int_0^1 x^2(2 - 2x) dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3) dx \\ &= \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(x^2) - (\mu_x)^2 = \frac{1}{6} - \left( \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{18}$$

التباين:  $V(Y)$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 \cdot f_y(y) dy = \int_0^1 y^2(2y) dy = \int_0^1 (2y^3) dy \\ &= \left[ \frac{2}{4}y^4 \right]_0^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$V(Y) = E(y^2) - (\mu_y)^2 = \frac{1}{2} - \left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{18}$$

التباين المشترك:  $\text{COV}(XY)$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$$

معامل الارتباط:  $r_{xy}$

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1/36}{\sqrt{1/18} \sqrt{1/18}} = \frac{1/36}{1/18} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$