

9. خلاصة الوحدة في بطاقة واحدة

الوحدة 1

1.1

التمهيد : التوزيعات الاحتمالية المتقطعة



3. دالة التوزيع التراكمي

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

وبالنسبة للمتغير المتقطع:

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f_X(t)$$

ومنها:

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-1)$$



2. دالة التوزيع الاحتمالي

$$f_X(x) = P(X = x)$$

مع الشروط:

$$f_X(x) \geq 0 : \text{ لكل قيمة ممكنة } x$$

$$\sum_x f_X(x) = 1$$



1. المتغير العشوائي المتقطع

المتغير العشوائي X متغير يأخذ قيمًا عددية منفصلة وقابلة للعد.

$$\text{مثال: } X \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{أو } X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$



6. مثال تطبيقي

إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.50	0.30	0.15	0.05

فإن:

- $E(X) = 0.75$
- $Var(X) = 0.6375$
- $\sigma_X \approx 0.798$



5. الانحراف المعياري

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$



4. التباين

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x)$$



7. أهم العلاقات

في المتغير المتقطع:

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f_X(t)$$

ومنها:

في المتغير المتقطع:

$$f_X(x) = P(X = x)$$

في التوزيع التراكمي:

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-1) \text{ أو } P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-1)$$



قاعدة ذهبية

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

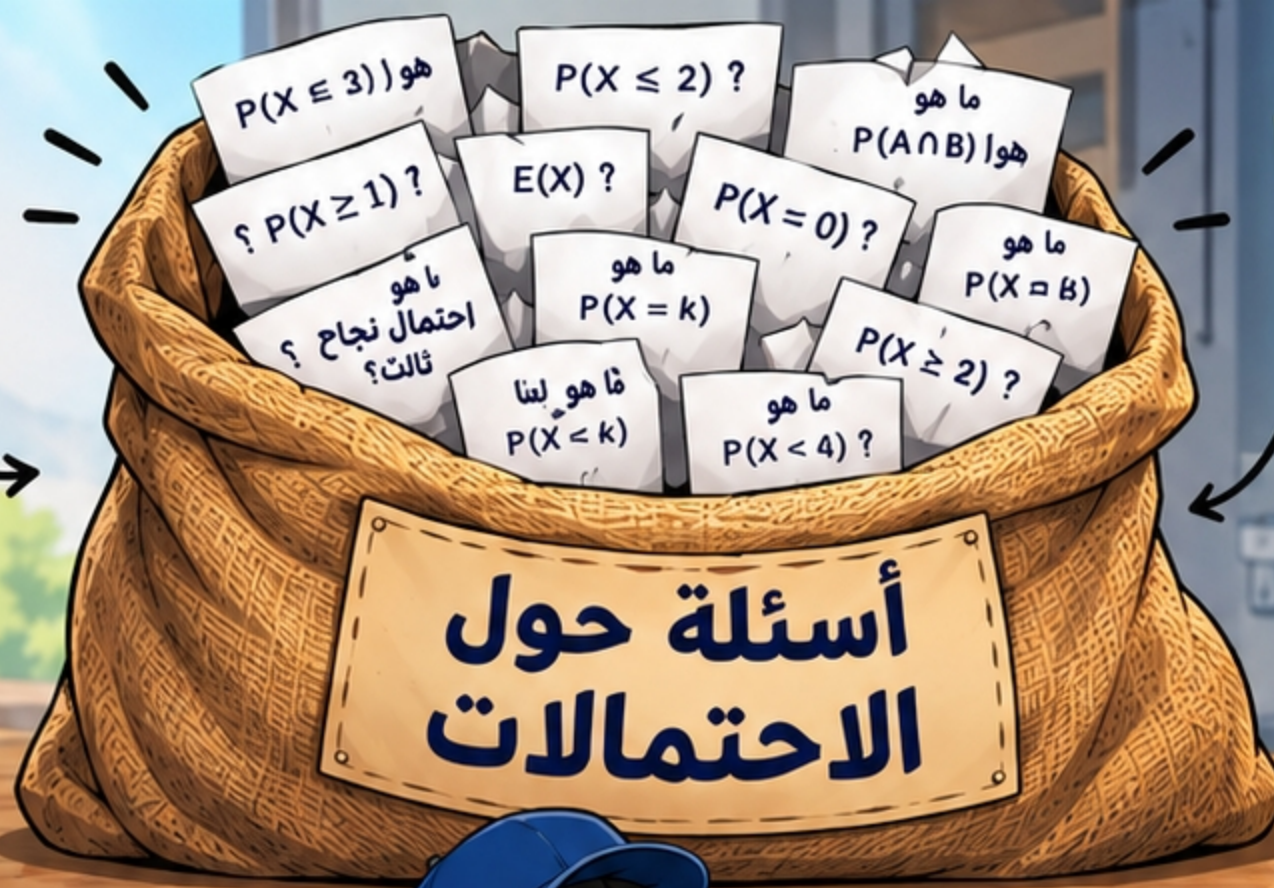
تعطي احتمال القيم حتى x
(احتمال تراكمي)



$$f_X(x) = P(X = x)$$

تعطي احتمال قيمة محددة
(احتمال نقطي)

مجموعة من الأسئلة
المتعددة حول
الاحتمالات...
بنفس عشوائي!



انتبه!
في قوانين الاحتمالات
لا نستخدم نفس الطريقة
المتبعة في حساب
الاحتمالات العادية.
يجب أولاً تحديد القانون
الذي تتبعه الظاهرة،
ثم نستخدم جميع القوانين
المتعلقة بهذا القانون.



أي قانون
ينطبق على هذه
المسألة؟

مرة أخرى بعد تحديد
القانون، أستخدم جميع
القوانين المرتبطة به
والتي تنتمي إليه...



- $P(X = 1) = p$
- $P(X = 0) = 1 - p$
- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$

($n = 1$)
(تجربة واحدة)



- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$
- $E(X) = np$
- $Var(X) = np(1 - p)$

(n محاولات)



- $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

(أحداث نادرة)



- $P(X = k) = (1 - p)^{k - 1} p$
- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$

(أول نجاح)



- $P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N - K}{n - k}}{\binom{N}{n}}$
- $E(X) = n \left(\frac{K}{N} \right)$
- $Var(X) = n \left(\frac{K}{N} \right) \left(1 - \frac{K}{N} \right) \frac{(N - n)}{(N - 1)}$

(دون إرجاع)



قانون برنولي (Bernoulli Distribution)

أداة سريعة للمراجعة

أحد أهم القوانين الاحتمالية المنفصلة – مقياس الإحصاء الرياضي
لطلبة السنة الثانية علوم مالية ومحاسبة

3. خصائص التوزيع

- المتغير العشوائي: $X \in \{0, 1\}$
- المتوسط (الأمّل الرياضي):

$$E(X) = p$$

- التباين:

$$Var(X) = p(1 - p)$$

- الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{p(1 - p)}$$

2. دالة التوزيع الاحتمالي

إذا كان $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ فإن:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p & \text{إذا كان } x = 1 \\ 1 - p & \text{إذا كان } x = 0 \end{cases}$$

أو بشكل مكافئ:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

حيث $x \in \{0, 1\}$

1. تعريف القانون

توزيع برنولي، هو توزيع احتمالي متقطع يأخذ قيمتين ممكنتين فقط (نجاح أو فشل) مع احتمال ثابت لحدوث النجاح.

يُرمز له بالرمز:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

حيث:

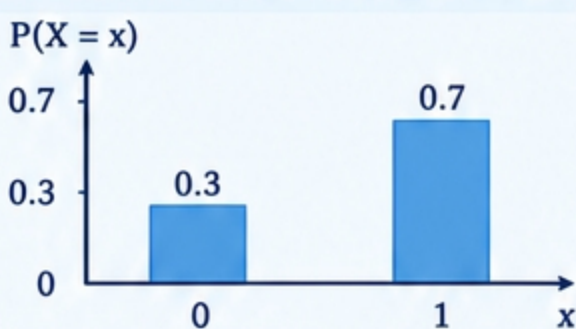
p : احتمال النجاح ($0 \leq p \leq 1$)

$1 - p$: احتمال الفشل

6. جدول القيم واحتمالاتها

x	دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x)$
0	0.3
1	0.7

كما يمكن كتابة التوزيع على شكل جدول احتمالات أو مخطط أعمدة.



5. الحل

- $P(X = 1) = p = 0.7$
- $P(X = 0) = 1 - p = 0.3$
- $E(X) = p = 0.7$

$$Var(X) = p(1 - p) = 0.7 \times 0.3 = 0.21$$

$$\sigma = \sqrt{0.21} \approx 0.458$$

4. مثال تطبيقي

لنفرض أن نجاح طالب في مادة الإحصاء هو $p = 0.7$ ، نختار طالباً واحداً عشوائياً، ليكن:

$X = 1$ نجاح

$X = 0$ رسب

احسب:

1. احتمال النجاح $P(X = 1)$

2. احتمال الفشل $P(X = 0)$

3. المتوسط والتباين والانحراف المعياري

7. ملاحظات مهمة

• قانون برنولي هو حالة خاصة من التوزيع الثنائي ($n = 1$ ، عدد التجارب).

• يستخدم في نمذجة المواقف التي لها نتيجتان فقط (نجاح / فشل).

• أمثلة في المجال المالي والمحاسبي:

- قبول أو رفض طلب تمويل (نجاح = قبول، فشل = رفض).

- حدوث خسارة أو عدم حدوثها في محفظة استثمارية (نجاح = خسارة، فشل = عدم خسارة).

- التحقق من صحة معلومة محاسبية، (نجاح = صحيحة، فشل = غير صحيحة).

خلاصة

قانون برنولي: نموذج بسيط وفعال لتجربة عشوائية ثنائية النتيجة، يتميز بسهولة حساب احتمالاته وخصائصه الإحصائية.

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p, \quad Var(X) = p(1 - p)$$

$$\sigma = \sqrt{p(1 - p)}$$



قانون ذو الحدين (Binomial Distribution)

أحد أهم القوانين الاحتمالية المنفصلة – مقياس الإحصاء الرياضي
لطلبة السنة الثانية علوم مالية ومحاسبة

أداة سريعة
للمراجعة

3. خصائص التوزيع

- التوقع الرياضي: $E(X) = np$
- التباين: $Var(X) = npq$
- الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

- الشكل: متماثل تقريباً إذا كان $p \approx 0.5$ ، ومائل لليمين إذا كان $p < 0.5$ ، ومائل لليسار إذا كان $p > 0.5$.

2. دالة التوزيع الاحتمالي

إذا كان $X \sim B(n, p)$ فإن:

$$f(x) = P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

حيث: $x = 0, 1, 2, \dots, n$

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

حيث:

- n : عدد المحاولات الطبيعية من 1 إلى n .
- $0 \leq x \leq n$.

1. تعريف القانون

- تجربة برنولية منكرة n مرة بشكل مستقل (كل محاولة لها نتيجتان: نجاح أو فشل).
- نرمز لعدد النجاحات في n محاولة بالمتغير العشوائي X .

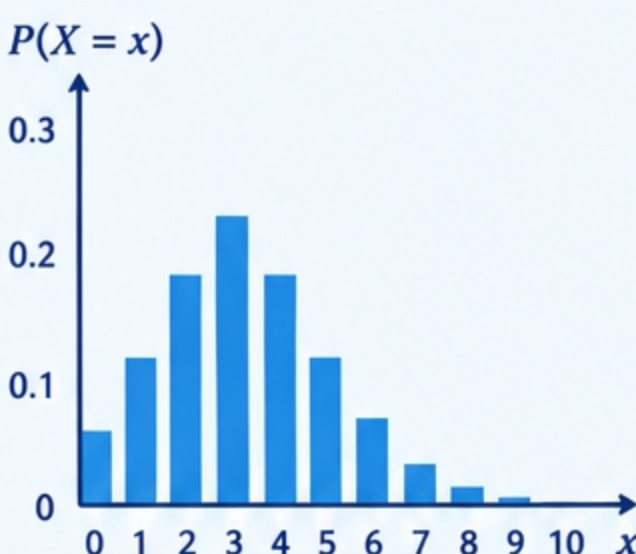
إذن: $X \sim B(n, p)$

حيث:

- n : عدد المحاولات (ثابت موجب).
- p : احتمال النجاح في كل محاولة ($0 \leq p \leq 1$).
- $1 - p$: احتمال الفشل.

6. التمثيل البياني

منحنى التوزيع ذو الحدين ($n = 10, p = 0.3$)



5. جدول القيم الاحتمالية (مثال)

لنفس المثال السابق ($n = 10, p = 0.3$)

x	$P(X = x)$
0	0.0283
1	0.1211
2	0.2335
3	0.2670
4	0.2003
5	0.1202
6	0.0574
7	0.0201
8	0.0043
9	0.0005
10	0.0001

4. مثال تطبيقي

في تجربة تلقي 10 أشخاص لعينة اختبار، احتمال نجاح كل واحد هو 0.3. ما احتمال أن ينجح 3 أشخاص بالضبط؟

$n = 10, p = 0.3, x = 3$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= C_{10}^3 (0.3)^3 (0.7)^7 \\ &= 120 \times 0.027 \times 0.082354 \\ &= 0.267 \end{aligned}$$

إذن احتمال نجاح 3 أشخاص هو 0.267 (أي 26.7%).

7. ملاحظات مهمة

- قانون ذو الحدين مناسب فقط عندما يكون عدد المحاولات n ثابتاً واحتمال النجاح p ثابتاً في جميع المحاولات.
- إذا كان n كبيراً و p صغيراً (أو العكس)، يمكن تقريب التوزيع ذو الحدين بتوزيع بواسون.
- أهم الفروض: الاستقلال بين المحاولات، وتساوي احتمال النجاح في كل محاولة.
- العلاقة بين التوزيع ذو الحدين وتوزيع بواسون: إذا كان λ كبيراً و p صغيراً بحيث: $\lambda = np$ فإن $X \sim Po(\lambda)$ يقرب من توزيع بواسون.

خلاصة

قانون ذو الحدين يستخدم لنموذج عدد النجاحات في n محاولة مستقلة، مع احتمال نجاح ثابت p في كل مرة.

$$\begin{aligned} f(x) &= C_n^x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n \\ E(X) &= np, \quad Var(X) = npq \\ \sigma &= \sqrt{npq} \end{aligned}$$

بالتوفيق في دراستكم



قانون بواسون (Poisson Distribution)

الوحدة 1

1.3

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة



1. تعريف قانون بواسون

يُستخدم قانون بواسون لوصف عدد الأحداث التي تحدث في فترة زمنية أو في مجال معين، عندما يكون معدل حدوثها ثابتًا ومستقلًا وأن كل حدث مستقل عن الآخر.

نرمز له بـ:

$$X \sim Po(\lambda)$$

حيث:

- X : المتغير العشوائي (عدد الأحداث).
- λ : معدل حدوث الأحداث ($\lambda > 0$).

2. دالة التوزيع الاحتمالي

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

حيث:

- $x = 0, 1, 2, 3, \dots$
- $\lambda > 0$
- $x! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times x$ ($0! = 1$)

ملاحظة:

احتمال كل قيمة x موجب، ومجموعها يساوي 1.

3. الأمل الرياضي والتباين

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

ومنها:

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$$



4. مثال تطبيقي

إذا كان عدد المكالمات الواردة إلى مركز خدمة العملاء خلال ساعة معينة يتبع قانون بواسون بمعامل $\lambda = 5$ ، فإن:

- $P(X = 0) = e^{-5} \frac{5^0}{0!} = 0.0067$
- $P(X = 3) = e^{-5} \frac{5^3}{3!} = 0.1404$
- $E(X) = 5$ ، $Var(X) = 5$
- $\sigma_X = \sqrt{5} \approx 2.236$

5. جدول القيم الاحتمالية (مثال)

x	$P(X = x)$ (تقريبًا)
0	0.0067
1	0.0337
2	0.0842
3	0.1404
4	0.1755
5	0.1755
6	0.1462
7	0.1044
8	0.0652
9	0.0362
10	0.0181
المجموع	≈ 1



قاعدة ذهبية

7. تطبيقات في المحاسبة والمالية

- عدد الفواتير التي تحتوي على أخطاء.
- عدد السرقات أو الاختلاس.
- عدد المكالمات في مركز خدمة العملاء.
- عدد الحوادث أو المطالبات التأمينية.

6. لمحة عن الباحث بواسون



Siméon Denis Poisson
(1781 – 1840)

- عالم رياضيات وفيزيائي فرنسي.
- اشتهر بأعماله في نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية.
- سُمي قانون بواسون باسمه تكريمًا لإسهاماته في هذا المجال.

لماذا هو مهم؟

يُستخدم قانون بواسون في مجالات عديدة مثل: عدد الزبائن، عدد الأخطاء، عدد الحوادث المرورية، وكذلك في المحاسبة والمالية (مثل عدد الفواتير أو المعاملات).

$$Var(X) = \lambda \quad , \quad \sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

قانون بواسون مناسب عندما تكون الأحداث نادرة وتحدث بشكل مستقل.

