République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Mohammed Seddik Benyahia Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie



Département de Génie Civil et Hydraulique

Polycopié de cours /TD

Intitulé

Théorie de l'élasticité

Dr. Said DERBANE

Version : 2026
Polycopié destiné aux étudiants de MASTER
Filière : Travaux Publics – Spécialité : Voies et Ouvrages d'Art

Avant-propos

La théorie de l'élasticité constitue une branche fondamentale de la mécanique des milieux continus. Elle permet d'étudier le comportement mécanique des solides déformables soumis à des actions extérieures et d'analyser la distribution des contraintes et des déformations à l'intérieur des structures. Cette discipline occupe une place essentielle dans les domaines du génie civil et des travaux publics, notamment dans l'étude et la conception des voies de communication, des ponts, des ouvrages d'art, des barrages et des structures souterraines.

Le présent polycopié de cours s'adresse aux étudiants de niveau Master de la filière Travaux Publics, spécialité Voies et Ouvrages d'Art. Il a pour objectif de fournir les bases théoriques nécessaires à la compréhension du comportement mécanique des matériaux et des structures, tout en établissant un lien entre les concepts fondamentaux de la mécanique des milieux continus et leurs applications dans le domaine du génie civil.

Le contenu de ce polycopié est organisé en six chapitres. Le premier chapitre présente les notions fondamentales de la mécanique des milieux continus. Le deuxième chapitre introduit les notations tensorielles nécessaires à la formulation des équations mécaniques. Les troisièmes et quatrièmes chapitres sont consacrés respectivement à la théorie de l'état de contrainte et à la théorie de l'état de déformation. Le cinquième chapitre traite des relations entre contraintes et déformations, notamment la loi de Hooke pour les matériaux élastiques. Enfin, le sixième chapitre aborde la formulation classique des problèmes en élasticité linéaire, en présentant les approches en déplacements et en contraintes ainsi que les équations fondamentales associées

Ce polycopié a pour objectif d'aider les étudiants à acquérir une compréhension solide des principes fondamentaux de la théorie de l'élasticité, qui constituent un outil indispensable pour l'analyse et la conception des structures en génie civil. Il constitue également une base nécessaire pour l'étude des méthodes avancées de calcul des structures, telles que la méthode des éléments finis.

Table des matières

Chapitre 1. Généralités sur la mécanique des milieux continus (MMC) 1
1.1. Généralités sur la mécanique des solides 1
1.2. La mécanique des milieux continus (MMC) 1
1.3. Hypothèses fondamentales de la MMC 2
1.4. Formulation théorique et résolution des problèmes en mécanique des structures élastiques 3
Chapitre 2. Notations tensorielles 5
2.1. Les tenseurs 5
2.1.1. Définition 5
2.1.2. Propriétés des tenseurs 6
2.1.3. Opérations sur les tenseurs d'ordre 1 (vecteurs) 6
2.1.4. Opérations sur les tenseurs d'ordre 2 (matrices) 8
2.1.5. Analyse tensorielle 8
2.1.6. Propriétés complémentaires des tenseurs d'ordre 2 10
2.2. Notation indicielle 11
2.2.1. Introduction 11
2.2.2. Règles relatives à l'écriture indicielle 12
2.2.3. Symbole de Kroneker 13
2.2.4. Symbole de permutation : 14
2.3. Rotation des axes 15
Chapitre 3. Théorie de l'état de contrainte 20
3.1. Introduction 20
3.2. Contraintes autour d'un point 20
3.3. Contrainte normale et contrainte tangentielle : 21
3.4. Vecteur contrainte sur un plan quelconque 23
3.4.1. Application 24
3.5. Etat de contraintes : Formule de Cauchy 24
3.6. Changement de base 26
3.7. Equations d'équilibre en coordonnées cartésiennes et principe de réciprocité : 27
3.8. Détermination des contraintes principales et des directions principales 30
3.8.1. Contraintes principales 30
3.8.2. Directions principales 31
3.8.3. Application 32

3.9. Tenseur sphérique et tenseur déviatorique 33
3.9.1. Application 34
3.10. Représentation graphique des contraintes en un point 35
3.10.1. Vecteur contraintes et cercle de Mohr 35
3.10.2. Tricercle de Mohr 36
3.11. Etat plan de contraintes 38
3.12. Etats de contrainte particuliers 38
3.12.1. Etat de contrainte uni-axial : traction (compression) simple 38
3.12.2. Etat de contrainte bi-axial 39
3.12.3. Etat de contrainte isotrope 40
3.12.4. Etat de cisaillement simple : 40
Chapitre 4. Théorie de l'état de déformation 45
4.1. Introduction 45
4.2. Notion de la déformation 45
4.2.1. Cas unidimensionnel 45
4.2.2. Cas bidimensionnel 46
4.3. Déformation normale 47
4.4. Distorsion ou déformation de cisaillement 47
4.5. Cas tridimensionnel 48
4.6. Tenseur des déformations de Green-Lagrange 49
4.7. Déformation volumique 51
4.8. Application 52
4.9. Allongement d'une direction quelconque 52
4.10. Variation d'un angle droit quelconque : 53
4.10. Déformations et directions principales 53
4.10.1. Les déformations principales 54
4.10.2. Les directions principales 54
4.10.3. Le tenseur sphérique de déformation 54
4.11. Etat plan de déformation 54
4.12. Cercle de Mohr 55
4.13. Equations de compatibilité des déformations 55
4.14. Mesure des déformations 56
4.15. Application 57
Chapitre 5. Relations entre les contraintes et les déformations 61
5.1. Introduction 61
5.2. Loi de Hooke généralisée 61
5.3. Loi de Hooke isotrope en axes principaux 62

5.3.1. Cas unidimensionnel 62
5.3.2. Cas plan de contraintes : plan : (1, 2) 62
5.3.3. Cas tridimensionnel 63
5.4. Etat de cisaillement Pur : Module de glissement 63
5.4.1. Relation entre cisaillement et module de glissement 64
5.5. Loi de Hooke dans le cas d'un matériau élastique linéaire et isotrope 65
5.4.1. Cas de l'état plan de contraintes 65
5.4.2. Cas de l'état plan de déformations 65
5.4.3. Loi de Hooke en élasticité linéaire isotrope tridimensionnel 66
5.5. Influence de la température : thermo-élasticité (dilatation thermique) 69
5.6. Energie de déformation élastique: énergie potentielle élastique 70
5.6.1. Densité d'énergie associée aux contraintes normales 70
5.6.2. Densité d'énergie associée aux contraintes tangentielles 71
5.6.3. Densité d'énergie associée à un état général de contraintes 71
5.6.4. Application 72
5.6.5. Décomposition de la densité de l'énergie de déformation 72
5.7. Exercice d'application 73
Chapitre 6. Formulation classique des problèmes en élasticité linéaire 77
6.1. Introduction 77
6.2. Bilan des équations fondamentales et des grandeurs inconnues 77
6.3. Conditions aux limites 78
6.3.1. Application 78
6.4. Principe de Saint-Venant 79
6.4. Principe d'unicité 79
6.4. Approches de formulation des problèmes d'élasticité 79
6.4.1. Approche en déplacement ou solution de Lamé 79
6.4.2. Approche en contraintes ou solution de Beltrami 80

Chapitre 1. Généralités sur la mécanique des milieux continus (MMC)

1.1. Généralités sur la mécanique des solides

La mécanique est une branche de la physique qui étudie et décrit les mouvements, les déformations et les états d'équilibre des systèmes matériels soumis à l'action de forces.

La mécanique des solides est une science qui étudie le comportement des corps solides soumis à des sollicitations extérieures ou à des actions diverses. Ce comportement se caractérise par la transmission des forces à l'intérieur de la matière, la mesure de la déformation de la matière et l'évaluation des déplacements des points du solide.

Contrairement à la mécanique rationnelle, qui considère les corps comme géométriquement immuables (indéformables) mais peuvent faire partie du mécanisme en mouvement (corps rigides), la mécanique des corps déformables accorde une large importance aux perturbations géométriques qui naissent à l'intérieur des corps sous l'influence des diverses sollicitations.

1.2. La mécanique des milieux continus (MMC)

Dans un sens plus large, une hypothèse usuelle est d'admettre que le corps solide est continu; on peut alors adopter le point de vue macroscopique et faire appel aux notions de la mécanique des milieux continus.

On dit qu'un domaine contient un milieu matériel continu lorsque l'on suppose que la matière y est distribuée de manière continue. Ainsi, à chaque instant et en tout point de ce domaine, il est possible de définir des grandeurs physiques locales caractérisant le milieu, telles que la masse, la densité ou les propriétés mécaniques. Ces grandeurs physiques sont représentées par des objets mathématiques continus et dérivables : un scalaire (masse volumique, température,…etc.), un vecteur (vitesse, accélération, forces volumiques, etc.) ou un tenseur d'ordre (n) (contraintes, déformations,…etc.). La valeur d'une grandeur physique définie en chaque point de l'espace et à chaque instant constitue ce que l'on appelle un champ.

La MMC constitue une branche fondamentale de la mécanique qui étudie le comportement des matériaux soumis à des sollicitations, en s'intéressant à la fois à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides. Toutefois, l'étude des fluides est généralement traitée de manière autonome dans une discipline spécifique, la mécanique des fluides. De ce fait, la MMC se concentre principalement sur l'analyse de la déformation des solides.

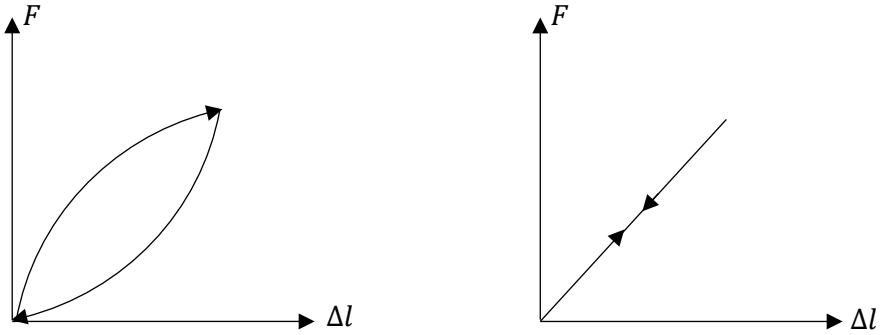
La MMC repose sur l'hypothèse de la continuité du milieu, selon laquelle la matière est considérée comme homogène et continue, en négligeant les discontinuités liées à sa structure microscopique. Cette approximation permet de décrire le comportement global moyen du

matériau sans tenir compte de la nature discrète de ses constituants (particules, molécules ou vides). Cette hypothèse demeure pertinente lorsque le volume étudié est suffisamment grand par rapport à la taille caractéristique de ses composants.

Dans le cadre de ce cours, l'attention est portée essentiellement sur la déformation élastique des solides. Un matériau est qualifié d'élastique lorsqu'il retrouve sa forme et ses dimensions initiales après suppression des charges qui ont provoqué sa déformation. Il est dit élastique linéaire lorsque la déformation est proportionnelle au chargement appliqué et que cette relation reste indépendante du chemin de chargement, qu'il s'agisse de chargement ou de déchargement.

Les matériaux présentant un comportement strictement élastique jusqu'à la rupture sont relativement rares. Toutefois, pour de faibles niveaux de déformation, la majorité des matériaux adoptent un comportement essentiellement élastique et, dans de nombreux cas, approximativement linéaire. Cette observation demeure valable même pour des matériaux classiquement reconnus pour leur comportement inélastique, tels que les sols.

La théorie de l'élasticité regroupe l'ensemble des outils et méthodes mathématiques permettant de formuler et de résoudre les problèmes de mécanique des solides déformables présentant un comportement élastique. Elle repose fondamentalement sur l'hypothèse de continuité du milieu, laquelle se traduit, sur le plan mathématique, par la représentation des grandeurs physiques du problème telles que les déplacements, les déformations et les contraintes sous forme de fonctions continues de l'espace et du temps.



Comportement élastique non linéaire Comportement élastique linéaire

Figure 1.1. *Comportement élastique*

1.3. Hypothèses fondamentales de la MMC

Dans de nombreuses applications pratiques en génie civil, deux hypothèses supplémentaires sont fréquemment adoptées, à savoir l'homogénéité et l'isotropie du matériau. En mécanique des milieux continus, l'homogénéité implique que les propriétés physiques et mécaniques du matériau demeurent constantes en tout point du domaine étudié (masse volumique, densité…etc.). L'isotropie, quant à elle, est définie relativement à une propriété donnée : un matériau est dit isotrope lorsque cette propriété présente la même valeur quelle que soit la direction considérée (Module d'élasticité E et coefficient de Poisson ν).

1.4. Formulation théorique et résolution des problèmes en mécanique des structures élastiques

La formulation des problèmes consiste à exprimer les équations mathématiques qui gouvernent le comportement du système étudié. En général, trois familles d'équations doivent être considérées : les équations d'équilibre, les équations de compatibilité et les équations constitutives. L'ensemble de ces équations forme un système différentiel dont la résolution permet d'obtenir la solution du problème.

L'étape de résolution est généralement complexe en raison de la difficulté à traiter les systèmes d'équations obtenus. Lorsque la résolution analytique est impossible ou trop ardue, la résolution numérique constitue une alternative efficace. Dans ce contexte, plusieurs méthodes peuvent être employées, notamment la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, ainsi que d'autres techniques numériques adaptées.

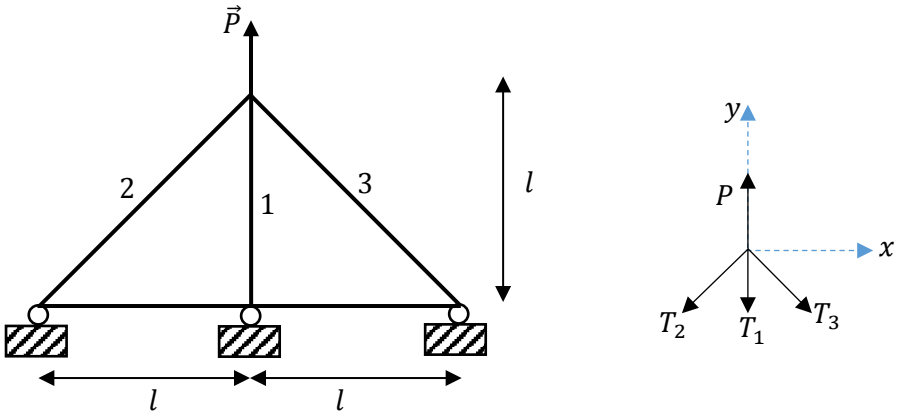


Figure 1.2. *Système treillis à barre articulées*

Afin d'illustrer les différentes étapes de la formulation et de la résolution des problèmes d'élasticité, on considère le cas d'un système treillis simple à barres articulées, représentée sur la figure 1.2a. La résolution de ce problème consiste à déterminer les efforts normaux (tensions) dans les trois (03) barres, ainsi que leurs allongements, ou de manière équivalente, le déplacement du point d'application de la charge P.

On commence par écrire les équations d'équilibre au niveau du nœud où s'applique la charge (figure 1.2b). L'équilibre suivant la direction (X) conduit à la relation $(T_2 = T_3)$. En tenant compte de cette relation et en exprimant l'équilibre suivant la direction (Y), on obtient alors l'unique équation d'équilibre du système :

$$T_1 + \sqrt{2} \times T_3 = P \tag{1.1}$$

Il s'agit d'une équation comportant deux (02) inconnues, ce qui la rend insuffisante pour résoudre le problème. Il est donc nécessaire de formuler une relation supplémentaire reliant ces deux inconnues. Cette relation est obtenue en exprimant la condition de compatibilité des allongements des trois (03) barres, laquelle garantit la continuité géométrique de la structure après déformation.

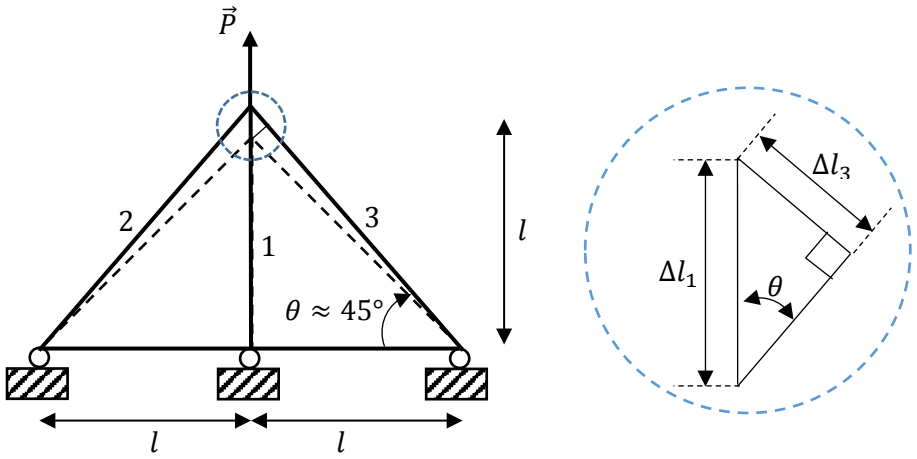


Figure 1.3. *Condition de compatibilité des allongements des barres du système treillis*

En se référant à la figure 1.3 et en supposant que les déformations restent faibles, il est alors possible d'écrire l'équation de compatibilité suivante :

$$\Delta l_1 = \sqrt{2} \times \Delta l_3 \tag{1.2}$$

Pour des matériaux au comportement élastique linéaire, les allongements sont reliés aux tensions correspondantes par la loi de Hooke, qui s'exprime au moyen des relations suivantes entre contraintes et déformations.

$$\sigma = E.\varepsilon \Longrightarrow \frac{T_i}{A} = E\frac{\Delta l_i}{l_i} \Longrightarrow \Delta l_i = \frac{T_i l_i}{EA} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta l_1 = \frac{T_1 l}{EA} \\ \Delta l_3 = \frac{T_3\sqrt{2}l}{EA} \end{cases} \tag{1.3}$$

Ces équations sont couramment désignées sous le nom d'équations constitutives.

La formulation du problème repose alors sur la mise en place d'un système comprenant trois familles d'équations :

- Les équations d'équilibre qui traduisent l'équilibre des forces au sein de la structure ;
- Les équations de compatibilité qui assurent la cohérence géométrique des déplacements et des déformations ;
- Les équations constitutives qui établissent la relation entre contraintes et déformations en fonction du comportement du matériau.

La résolution conjointe de ces trois ensembles d'équations permet de déterminer les tensions internes dans les barres ainsi que les allongements correspondants, fournissant ainsi une description complète de la réponse mécanique de la structure étudiée.

Chapitre 2. Notations tensorielles

2.1. Les tenseurs

2.1.1. Définition

Un tenseur est un objet mathématique défini sur l'espace considéré, par exemple $\mathbb{R}^3$, qui généralise les notions de scalaire, de vecteur et de matrice. Il représente une grandeur physique dont les composantes dépendent du système de coordonnées choisi, mais de telle sorte que, lorsqu'on change de repère, ces composantes se transforment suivant des lois de transformation bien déterminées, garantissant que l'objet géométrique lui-même reste invariant.

Autrement dit, l'expression du tenseur dans un nouveau système de coordonnées est obtenue à partir de son expression dans l'ancien repère par une transformation spécifique, ce qui permet de décrire de manière cohérente les phénomènes physiques indépendamment du choix des coordonnées.

Soit un tenseur cartésien d'ordre n définie dans $\mathbb{R}$ et qui associe à un repère (x_i) un groupe de 3^n composantes réelles $V_{ijk\ldots\ldots}$ se transforme dans un repère (x_i') selon la relation suivante :

$$V'_{lmn\ldots\ldots} = a_{li}a_{mj}a_{nk} \ldots\ldots V_{ijk\ldots\ldots}$$

Les a_{li} représente les éléments de la matrice de transformation (cosinus directeurs des axes du nouveau repère par rapport à l'initial).

- Exemples de transformation tensorielle

- Pour $n = 0$: $V_i' = \mathrm{V}_i$;
- Pour $n = 1$: $V_i' = a_{ij}\mathrm{V}_j$;
- Pour $n = 2$: $V_{ij}' = a_{ip}a_{jq}\mathrm{V}_{pq}$;
- Pour $n = 3$: $V_{ijk}' = a_{ip}a_{jq}a_{kr}\mathrm{V}_{pqr}$.

L'ordre d'un tenseur est indiqué par le nombre d'indices, ainsi :

- Tenseur d'ordre zéro $(n = 0)$: scalaire (masse, température, énergie…etc.) ;
- Tenseur d'ordre un $(n = 1)$: vecteur (force, déplacement, accélération…etc.) ;
- Tenseur d'ordre deux $(n = 2)$: matriciel (contraintes, déformations…etc.).

2.1.2. Propriétés des tenseurs

- Symétrie

Un tenseur d'ordre $n > 2$ est dit symétrique par rapport à une paire d'indices si ses composantes restent inchangées sous l'effet d'une permutation de ces indices :

$V_{ijk} = V_{jik}$ (symétrie par rapport à i et j)
$V_{ijk} = V_{kji}$ (symétrie par rapport à j et k)

- Antisymétrie

Un tenseur d'ordre $n > 2$ est dit antisymétrique par rapport à une paire d'indices si ses composantes changent de signe sous l'effet d'une permutation de ces indices :

$V_{ijk} = -V_{jik}$ (antisymétrie par rapport à i et j).
$V_{ijk} = -V_{kji}$ (antisymétrie par rapport à j et k).

- L'isotropie

Un tenseur est dit isotrope si ses composantes restent inchangées sous l'effet d'une rotation de repère.

Pour $n = 2 \longrightarrow V'_{ij} = V_{ij}$.
Exemple : $\delta_{ij} = a_{ip}a_{jq}\delta_{pq} = a_{ip}a_{jq} = \delta_{ij}$ alors δ_{ij}est un tenseur isotrope.

2.1.3. Opérations sur les tenseurs d'ordre 1 (vecteurs)

- Repère cartésien orthonormé direct

Dans ce cours, l'étude sera principalement menée dans des repères cartésiens orthonormés et directs. Un repère orthonormé est caractérisé par des axes orthogonaux deux à deux et par des vecteurs unités associés normalisés, c'est-à-dire de même norme, égale à l'unité, pour les trois axes.

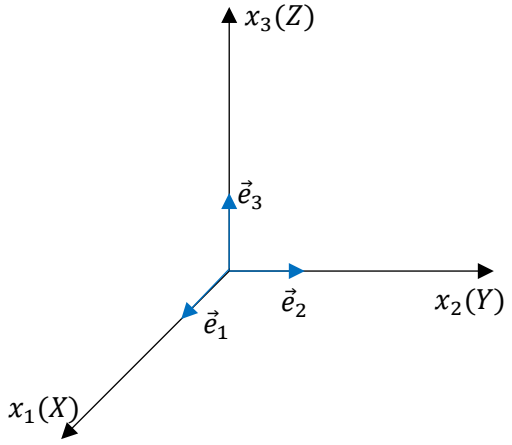


Figure 2.1. *Repère Cartésien orthonormé direct*

Pour un repère direct, on a les relations suivantes :

- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$
- $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$
- $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

où $(\times)$ désigne le produit vectoriel.

Soit dans l'espace Euclidien le scalaire A et les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Un vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_1)$ sous la forme :

$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$ où u_1, u_2, u_3 sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans cette base.

Le vecteur peut être également représenté sous forme matricielle par :

- Le vecteur ligne sous l'écriture $(u_1 \quad u_2 \quad u_3)$ ou sous forme de vecteur colonne par $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$.

- Opérations de base sur les vecteurs

- Produit scalaire

$A = \vec{u} \cdot \vec{v}$, la valeur de A s'obtient par :

$A = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

- Somme de vecteurs

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, les composantes du vecteur $\vec{w}$ sont :

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{Bmatrix}$$

- Produit vectoriel

Soit le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ s'obtient par le calcul du déterminant suivant :

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

- Propriétés d'opérations sur les vecteurs

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (La somme des vecteurs est commutative) ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Le produit scalaire est commutatif) ;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Le produit scalaire est distributif) ;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) \neq (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (Le produit scalaire est non associatif) ;
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (Le produit vectoriel est non commutatif).

2.1.4. Opérations sur les tenseurs d'ordre 2 (matrices)

Soit dans l'espace Euclidien les trois matrices $[A]$, $[B]$ et $[C]$, de composantes a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} respectivement et de dimensions (3×3).

- Addition de matrices

Soit $[C] = [A] + [B]$, toute composante c_{ij} de la matrice $[C]$ s'obtient par :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- Multiplication de matrices

Soit $[C] = [A][B]$, toute composante c_{ij} de la matrice $[C]$ s'obtient par :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

- Propriétés d'opérations sur les matrices

- $[A] + [B] = [B] + [A]$ (La somme des matrices est commutative) ;
- $[A][B] = ([B]^T[A]^T)^T$ (Le produit matriciel est non commutatif) ;
- $[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C]$ (Le produit matriciel est distributif) ;
- $[A]([B][C]) = ([A][B])[C]$ (Le produit matriciel est associatif).

2.1.5. Analyse tensorielle

En Mécanique des Milieux Continus (MMC), les tenseurs sont des grandeurs physiques qui sont susceptibles de varier en fonction des trois dimensions de l'espace et du temps. Décrire et quantifier ces variations est essentiel si l'on veut comprendre les mouvements et les équilibres d'un système mécanique. Dans un champ de tenseurs différenciables par rapport aux variables de l'espace, on peut définir les opérateurs suivants :

- Gradient d'un champ scalaire

Soit un champ à valeurs scalaires exprimé par la fonction $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, la variation du scalaire φ entre deux points M et N est donnée par l'expression :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = \overrightarrow{grad}\phi \cdot \overrightarrow{dr}$$

Le vecteur $\overrightarrow{grad}\phi$ est le gradient de la fonction scalaire φ qui a pour composantes :

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ qui peut être écrit par le produit : $\vec{\nabla}.\phi = \overrightarrow{grad}\varphi$.

$\vec{\nabla}$ est l'opérateur vectoriel nabla ∇ de composantes fictifs : $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$

- Gradient d'un champ vectoriel

Soit un champ vectoriel donné par $\vec{U}(x_1, x_2, x_3)$, la variation entre deux points M et N est :

$$d\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_3} dx_3 = [\overline{\overline{\text{grad}}}\vec{U}] \cdot \overrightarrow{dr}$$

Avec $[\overline{\overline{\text{grad}}}\vec{U}]$ est un tenseur d'ordre deux ce qui conduit à:

$$\{\overline{\overline{\text{grad}}}\vec{U}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix}$$

Remarque :

- L'application de l'opérateur gradient à un champ tensoriel augmente son ordre d'une unité.

- Divergence d'un champ vectoriel

La divergence d'un champ vectoriel $\vec{U}$ est un scalaire définie par :

$$div\vec{U} = \vec{\nabla}.\vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = tr\left[\overline{\overline{\text{grad}}}\vec{U}\right] = \text{a}$$

- Divergence d'un champ tensoriel d'ordre deux (02)

Soit A un tenseur d'ordre 02 de composantes a_{ij}, on définit le vecteur divergence du tenseur A par :

$$(\overrightarrow{div}A)_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i = \begin{cases} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} \end{cases}$$

Remarque :

- L'application de l'opérateur divergence à un champ tensoriel réduit son ordre tensoriel d'une unité.

- Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{U}$ est définie par :

$$rot\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix}; \begin{cases} (rot\vec{U})_{x_1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ (rot\vec{U})_{x_2} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ (rot\vec{U})_{x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

$$= \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3$$

$$rot\vec{U} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \nabla_j U_k = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} U_k$$

- Le Laplacien d'un champ scalaire

Le Laplacien d'un champ scalaire f est défini comme la divergence de son gradient.

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \rightarrow \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ est l'opérateur Laplacien.

- Le Laplacien d'un champ vectoriel

Le Laplacien d'un champ vectoriel $\vec{U}$ est défini comme la divergence de son gradient.

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\text{grad}}\vec{U}) = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_p}\right) = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_p \partial x_p} = \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial^2 U_i}{\partial^2 x_p}$$

Composantes :

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{U})_x = \frac{\partial^2 U_{\text{x}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_{\text{x}}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_{\text{x}}}{\partial x_3^2}$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{U})_y = \frac{\partial^2 U_{\text{y}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_{\text{y}}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_{\text{y}}}{\partial x_3^2}$$

- Théorème de la divergence (Formule d'Ostrogradski)

Soit D un domaine borné de l'espace, de frontière S supposée régulière et orientée vers l'extérieur. On note $\vec{n}$ le champ de vecteurs normaux unitaires sortants à la surface S.

Soient f un champ scalaire et $\vec{U}$ un champ vectoriel définis et suffisamment réguliers sur D.

$$\int_D \vec{\nabla} f \, dV = \int_S \overrightarrow{grad} f dv = \int_S f \cdot \vec{n} \, dA$$

$$\int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \, dv = \int_D div \cdot \vec{U} \, dv = \int_S \vec{U} \cdot \vec{n} \, dA$$

Formule d'Ostrogradski

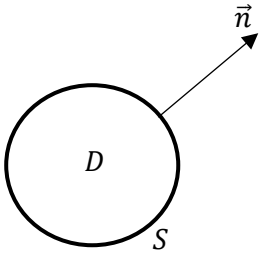


Figure 2.2. *Théorème de la divergence*

2.1.6. Propriétés complémentaires des tenseurs d'ordre 2

Étant donné leur rôle fondamental en mécanique des milieux continus, les propriétés suivantes sont présentées ci-après :

- Tenseur identité

Noté $[I]$, il s'agit d'un tenseur isotrope.

- Transposée d'un tenseur

Si $u_i = A_{ij}v_j$ et $u_i = B_{ji}v_j$, alors B est transposé du tenseur A.

- Tenseur symétrique et antisymétrique

Si $A_{ij} = A_{ji}$, alors A est symétrique.

Si $A_{ij} = -A_{ji}$, alors A est antisymétrie. Il en résulte que : $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$ (la trace d'un tenseur antisymétrique est nulle).

Remarque :

- La symétrie et l'antisymétrie sont des propriétés intrinsèques d'un tenseur, indépendantes du choix de la base. Ainsi, si un tenseur A_{ij} est antisymétrique dans une base donnée, il le restera dans toute autre base obtenue par changement de repère.
- Tout tenseur d'ordre 2 peut être décomposé de manière unique en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$

Si $A_{ij}B_{ij} = 0$; alors A_{ij} est symétrique et B_{ij} est antisymétrique.

- Les invariants et les valeurs propres d'un tenseur

Tout tenseur d'ordre 2 A_{ij} possède trois invariants, qui peuvent être déduits de ses valeurs propres, solutions de l'équation caractéristique : $|A_{ij} - \lambda I| = 0$.

Lorsque le tenseur A_{ij} est symétrique, ses valeurs propres sont réelles et correspondent aux valeurs principales. Les trois vecteurs propres associés sont orthogonaux entre eux et définissent les directions principales du tenseur.

2.2. Notation indicielle

2.2.1. Introduction

La notation indicielle est largement utilisée en mécanique des solides et des milieux continus, car elle permet d'écrire de manière condensée, claire et pratique les expressions et formules mathématiques.

Dans cette notation :

- Les axes cartésiens x, y, z sont remplacés par x_1, x_2, x_3.
- Un système de repère (x, y, z) devient ainsi (x_1, x_2, x_3).

- Les coordonnées d'un point M dans ce repère s'écrivent x_i avec $i = 1,2,3$. Notées $\begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}$
- Les composantes d'un vecteur $\vec{v}$ sont (v_x, v_y, v_z) notées v_i $(i = 1,2,3)$. Alors v_i représente 03 éléments :

$$\begin{cases} v_1 = v_x \\ v_2 = v_y \\ v_3 = v_z \end{cases}$$

On écrit $v = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$

Ainsi v_{ij} représente 09 éléments :

$$v_{ij} = [v] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}$$

et v_{ijk} représente $3^3 = 27$ éléments $[v]$.

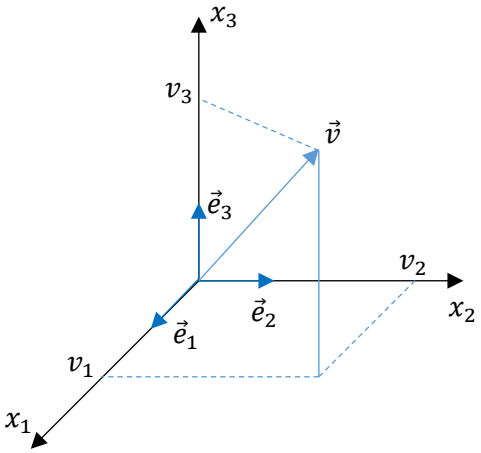


Figure 2.3. *Projection d'un vecteur*

2.2.2. Règles relatives à l'écriture indicielle

- Convention de sommation d'Einstein

Chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans un même monôme, ce monôme implique une somme sur cet indice**.** Concrètement, il correspond à la somme de trois termes, obtenue en attribuant successivement aux indices les valeurs 1, 2 et 3.

Exemple :

- $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$; i est l'indice de sommation (indice muet).
- Soit deux vecteurs $\vec{u}$ avec composantes $\vec{u} = \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}$ et $\vec{v}$ avec composantes $\vec{v} = \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{cases}$, le produit scalaire de $\vec{u}.\vec{v}$ s'écrit : $\vec{u}.\vec{v} = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$
- Si A_{ij} est une matrice, alors $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ est la trace de A_{ij}, tandis que :

$a_{ii} = \text{tr}(A_{ij})$.

- $a_{km}b_m = a_{k1}b_1 + a_{k2}b_2 + a_{k3}b_3 = \sum_{m=1}^{3} a_{km}b_m$.

N.B : Un même indice de sommation ne peut apparaître que deux fois dans un même monôme.

Exemple :

- $C_{ij}C_{ik}x_j$ il y a une double somme sur les indices de sommation i et k.
- $C_{mj}C_{mm}x_k$ Écriture incorrecte.

Un indice qui n'apparait qu'une fois dans un monôme, doit aussi apparaitre une fois dans tous les monômes d'une expression. Cet indice s'appelle indice d'identification ou libre.

Exemple :

- $a_{ij}b_i + d_j = x_j$ Écriture correct.
- $a_{ij}b_i + d_k = x_j$ Écriture incorrect.
- $a_{ij}b_j = x_i$ Est matrice x vecteur = vecteur (correct)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}.$$

- $a_{ij}b_j = c_k$ Ecriture incorrect.

2.2.3. Symbole de Kroneker

C'est une grandeur à deux indices notée δ_{ij}définie par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$

Propriétés :

- $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ Le symbole Kroneker est symétrique.
- $\left[\delta_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] = [I]^t$

Le symbole de Kroneker est l'image indicielle de la matrice identité.

- $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 = trace\ [I]$.
- $\delta_{1m}a_m = \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = a_1$ Par substitution d'indice.
- $\delta_{im}a_m = a_i$.
- $\delta_{1m}\sigma_{mj} = \delta_{11}\sigma_{1j} + \delta_{12}\sigma_{2j} + \delta_{13}\sigma_{3j} = \sigma_{1j}$.
- $\delta_{im}\sigma_{mj} = \sigma_{ij}$.
- $\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij}$.

Exemple :

- $\delta_{ij}v_{jk} = \delta_{i1}v_{1k} + \delta_{i2}v_{2k} + \delta_{i3}v_{3k} = \delta_{11}v_{ik} + \delta_{22}v_{ik} + \delta_{33}v_{ik} = v_{ik}$.

- $\left.\begin{matrix} A_{im}\delta_{mj} = A_{ij} \\ \delta_{im}A_{mj} = A_{ij} \end{matrix}\right\} AI = A \; et \; IA = A$
- $\delta_{ij}v_{ij} = \delta_{i1}v_{i1} + \delta_{i2}v_{i2} + \delta_{i3}v_{i3} = v_{11} + v_{22} + v_{33} = v_{ii} = v_{jj} = v_{kk}.$
- $\vec{U}.\vec{V} = U_i\vec{e}_i.V_j\vec{e}_j = U_iV_j\vec{e}_i\vec{e}_j = U_iV_j\delta_{ij} = U_iV_j.$

2.2.4. Symbole de permutation :

Tenseur d'ordre 3 (grandeur à 3 indices) noté ε_{ijk} défini par :

$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$; alors :

$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = +1 \; si \; (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3). \\ \varepsilon_{ijk} = -1 \; si \; (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3). \\ \varepsilon_{ijk} = 0 \; si \; deux \; indices \; ou \; plus \; sont \; égaux. \end{cases}$

Toute permutation inter indices entraine un changement de signe du symbole :

$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$

Le produit vectoriel des vecteurs unitaires s'écrit : $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$

Le produit scalaire des vecteurs unitaires est : $\vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{ij}$ car $\vec{e}_i.\vec{e}_j = \begin{cases} 0 \; si \; i \neq j \\ 1 \; si \; i = j \end{cases}$

Exemple :

- $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2).\vec{e}_3 = \vec{e}_3.\vec{e}_3 = 1$
- Application sur le produit vectoriel et mixte :

Soit 03 vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\overrightarrow{W}$, le produit vectoriel est

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & U_1 & V_1 \\ \vec{e}_2 & U_2 & V_2 \\ \vec{e}_3 & U_3 & V_3 \end{vmatrix}$$

$= \vec{e}_1(U_2V_3 - U_3V_2) - \vec{e}_2(U_1V_3 - U_3V_1) + \vec{e}_3(U_1V_2 - U_2V_1)$, ou bien :

$\vec{U} \wedge \vec{V} = \; \varepsilon_{ijk}\vec{e}_iU_jV_k$ avec $\vec{e}_i$ vecteurs unitaires.

- Calculer $(\vec{U} \wedge \vec{V}).\overrightarrow{W}$

Un vecteur $\vec{U} = U_i.\vec{e}_i$; alors $\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right).\overrightarrow{W} = \left(\varepsilon_{ijk}\vec{e}_iU_jV_k\right)W_p\vec{e}_p = \varepsilon_{ijk}U_jV_k\vec{e}_i\vec{e}_pW_p$

$= \varepsilon_{ijk}U_jV_k\delta_{ip}W_p = \varepsilon_{ijk}U_jV_kW_i.$

- Montrer que $\varepsilon_{ijk}A_jA_k = 0$

$\varepsilon_{ijk}A_jA_k = \varepsilon_{123}A_2A_3 + \varepsilon_{132}A_3A_2 + \varepsilon_{231}A_3A_1 + \varepsilon_{213}A_1A_3 + \varepsilon_{312}A_1A_2 + \varepsilon_{321}A_2A_1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

- Calculer $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji}$.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{123}\varepsilon_{213}\varepsilon_{312} = -6$$

Propriétés :

Le produit de deux (02) symboles de permutation peut s'écrire en fonction des symboles de Kroneker :

- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$
- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$
- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$
- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{il}\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \delta_{im}(-1)\begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \delta_{in}\begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} =$

$\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}$.

2.3. Rotation des axes

Soit x_i et x_i' deux systèmes d'axes cartésiens partageant la même origine O et soient $\vec{e}_i$ et $\vec{e}_i'$ les vecteurs unitaires associés. On cherche la relation liant les composantes d'un vecteur $\vec{v}$ dans les deux repères, notées $v_i$et v_i' respectivement.

Soit le vecteur $\vec{v}$ tel que :

$$\vec{v} = v_i\vec{e}_i = v_p'\vec{e}_p' \tag{2.1}$$

Soit la matrice des cosinus directeurs des vecteurs unités du repère X' par rapport au repère X :

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos(\vec{e}_1', \vec{e}_1) & \cos(\vec{e}_1', \vec{e}_2) & \cos(\vec{e}_1', \vec{e}_3) \\ \cos(\vec{e}_2', \vec{e}_1) & \cos(\vec{e}_2', \vec{e}_2) & \cos(\vec{e}_2', \vec{e}_3) \\ \cos(\vec{e}_3', \vec{e}_1) & \cos(\vec{e}_3', \vec{e}_2) & \cos(\vec{e}_3', \vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1', \vec{e}_1 & \vec{e}_1', \vec{e}_2 & \vec{e}_1', \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2', \vec{e}_1 & \vec{e}_2', \vec{e}_1 & \vec{e}_2', \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3', \vec{e}_1 & \vec{e}_3', \vec{e}_2 & \vec{e}_3', \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Avec $\vec{e}_i'.\vec{e}_j = \cos(\vec{e}_i'.\vec{e}_j) = a_{ij}$ et $\begin{cases} \vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{e}_p.\vec{e}_q = \delta_{pq} \end{cases}$ (2.3)

Multiplions à droite l'équation (2.1) par $\vec{e}_j'$, on obtient :

$$v_i\vec{e}_i\vec{e}_j' = v_p'\vec{e}_p'\vec{e}_j'$$

Tenons compte que : $\vec{e}_i\vec{e}_j' = a_{ji}$, $\vec{e}_i'\vec{e}_j' = \delta_{ij}$ et $v_i'\delta_{ij} = v_j'$(substitution des indices).

Il en résulte donc :

$$v_i a_{ji} = v_p'\delta_{pj} = v_j'$$

Alors : $$v_j' = a_{ji}v_i \Leftrightarrow v_i' = a_{ip}v_p \tag{2.4}$$

Multiplions à droite l'équation (2.1) par $\vec{e}_j$, on obtient :

$$v_i\vec{e}_i\vec{e}_j = v_p'\vec{e}_p'\vec{e}_j$$

$$v_i\delta_{ij} = a_{pj}v_p' = v_j$$

Alors : $$v_j = a_{pj}v'_p \Leftrightarrow v_i = a_{pi}v'_p \quad (2.5)$$

Application pour les problèmes bidimensionnels

Nous avons : $v'_i = a_{ip}v_p$

$a_{ip} = \vec{e}'_i\vec{e}_p$ avec $\vec{e}_3 \cong \vec{e}'_3$

$$\{v'\} = [a]\{v\} \rightarrow \begin{cases} v'_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ v'_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \\ v'_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 \end{cases}$$

u $a_{ip} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

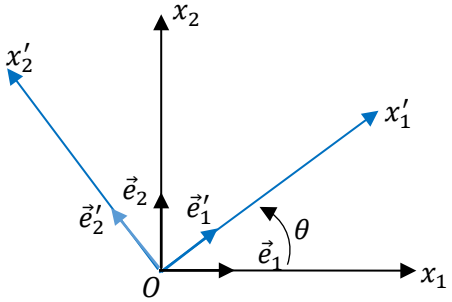


Figure 2.4. *Rotation des axes en 2D*

a_{11}, a_{12}, a_{13} cosinus directeurs de $\vec{e}'_1$: $a_{11} = \cos\theta$; $a_{12} = \sin\theta$; $a_{13} = 0$

a_{21}, a_{22}, a_{23} cosinus directeurs de $\vec{e}'_2$: $a_{21} = -\sin\theta$; $a_{22} = \cos\theta$; $a_{23} = 0$

a_{31}, a_{32}, a_{33} cosinus directeurs de $\vec{e}'_3$: $a_{31} = 0$; $a_{32} = 0$; $a_{33} = 1$.

D'où : $a_{ip} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Soit en notation matricielle :

$$\{v'\} = [A]\{v\} \text{ Ou bien } \{v\} = [A]^T\{v'\} \quad (2.6)$$

Avec $[A] = [a_{ip}]$ matrice de rotation (transformation).

La matrice de rotation est orthogonale car : $A.A^T = [I]$

Application

Soit dans l'espace Euclidien deux repères orthonormés direct $X\ (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $X'\ (O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. Les cosinus directeurs des vecteurs $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\ et\ \vec{e}'_3$ dans le repère X sont donnés par : $\vec{e}'_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{e}'_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\ et\ \vec{e}'_3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Déterminer les composantes (v_1', v_2', v_3') du vecteur $\vec{v}$ ayant les composantes $(2, 3, 0)$ dans le repère X.

Réponse :

La Matrice de transformation est donnée par :

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

Les composantes du vecteur v' sont données par :

$$\{v'\} = [A]\{v\}$$

$$\text{D'où : } \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{6}} \end{Bmatrix}$$

Exercices

Exercice 1 :

Soit deux vecteurs $\{\vec{A}\}\ et\ \{\vec{B}\}$ telque :

$\{\vec{A}\} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$

$\{\vec{B}\} = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

- Déterminer le produit scalaire et tensoriel des deux vecteurs.
- Trouver les composantes du vecteur $\{\vec{A}'\}$ dans un nouveau repère d'axe $(o, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ défini par la matrice de passage $[c] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 2 :

Soit deux vecteurs $\{u\} = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \\ 0 \end{Bmatrix}\ et\ \{v\} = \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{Bmatrix}$

- Calculer $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, quelle est la signification physique du module $\|\vec{w}\|$?
- Dessiner $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans (o, x_1, x_2, x_3).
- Déterminer l'angle situé entre $\vec{v}\ et\ \vec{e}_2$.
- Etablir la matrice de passage $[p]$ de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vers $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)$ puis déterminer $\vec{w}$ par rapport à la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)$.

Exercice 3 :

Soit $X\ et\ A$ deux tenseurs d'ordre 1 et 2 respectivement donnée par :

$X = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}; [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Calculer :

1) A_{ii} 2) $A_{ij}A_{ij}$ 3) $X_m X_m$ 4) $A_{mn}X_n$ 5) $\delta_{kl}A_{lk}$ 6) $\varepsilon_{ijk}A_{jk}$.

Exercice 4 :

- Soit une fonction scalaire :

$u(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 - x_2^3 x_3^2$. Calculer $\overrightarrow{grad}\ (u)$ ou bien $(\vec{\nabla} u)$ au point $(1, -2, -1)$.

- Soit le vecteur $\vec{v} = x_1^2 x_3 \vec{e}_1 - 2x_2^3 x_3^2 \vec{e}_2 + x_1 x_3 x_2^2 \vec{e}_3$

Trouver $div\ (\vec{v})$ ou bien $\vec{\nabla}.\vec{v}$ au point $(1, -1, 1)$.

- Soit le vecteur $\vec{A} = x_1^2 x_2 x_3 \vec{e}_1 - 2x_1 x_2^3 \vec{e}_2 + x_1 x_3^2 \vec{e}_3$ et $\vec{B} = 2x_3 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 - x_1^2 \vec{e}_3$

Trouver $\frac{\partial^2 (A \wedge B)}{\partial x_1 \partial x_2}$ au point $(1, 0, -2)$.

- Soit le vecteur $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3$ et $\vec{A} = x_1 x_3 \vec{e}_1 - x_1 x_2^2 \vec{e}_2 + x_2 x_3^2 \vec{e}_3$

Trouver $\frac{\partial^3 (u.A)}{\partial x_1^2 \partial x_3}$ au point $(2, -1, 1)$.

Exercice 5 :

Pour les expressions suivantes :

a) $a_{ij}.a_{ik}x_k$; b) $a_{mj}.a_{mm}.x_m$; c) $x_i = a_{ij}.b_j + d_i$; d) $x_i = a_{ij}.b_j + d_k$

1. Désigner les indices muets et libres.
2. Déduire si elles sont correctes, puis les écrire sous forme classique.

Exercice 6 :

a) Evaluer les écritures suivantes :

1. δ_{kk} ;
2. $\delta_{ij}.\delta_{ij}$;
3. $\varepsilon_{ijk}.\varepsilon_{ijk}$;
4. $B_i.B_j.\delta_{ij} - B_m.B_m.$
5. $\delta_{ii}.\delta_{pq}$

b) Simplifier les écritures suivantes :

1. $u_r.\delta_{r\alpha}$;
2. $u_\beta.v_\alpha\delta_{\alpha\beta}$;
3. $\delta_{\alpha\beta}.u_p v_\gamma \delta_{\sigma\tau} w_\theta \delta_{\alpha\theta}$;
4. $\delta_{ij}.\delta_{pq}\delta_{rs}\,A_{ipr}.$

c) Montrer l'expression :

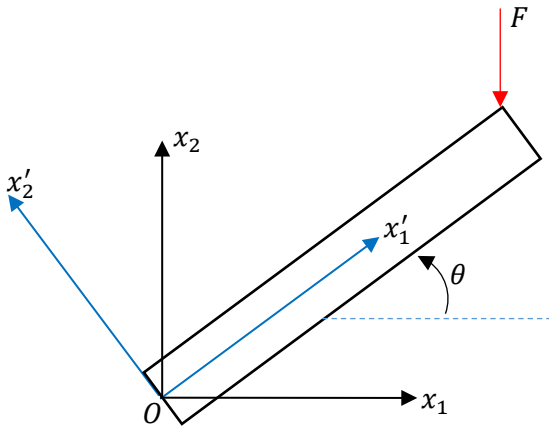
$C_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k \Rightarrow \vec{C} = \vec{a} \wedge \vec{b}.$

Exercice 7 :

Une poutre inclinée de 30° par rapport à l'horizontal, chargée à son extrémité par une force F verticale de $500\ KN$. La force est une quantité physique représentée par un tenseur d'ordre 1 dans un repère $2D$. Son expression par rapport au repère (O, x_1, x_2) est :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 = 0 \\ F_2 = -500\ KN \end{Bmatrix}.$$

Déterminer le vecteur force dans le repère local de la poutre.



Chapitre 3. Théorie de l'état de contrainte

3.1. Introduction

En mécanique des milieux continus, les actions extérieures exercées sur un milieu matériel se distinguent classiquement en deux catégories fondamentales : les forces surfaciques et les forces volumiques.

- Les forces de surface (ou tractions surfaciques) représentent les actions mécaniques appliquées par contact direct sur la frontière du domaine matériel. Elles s'exercent sur la surface extérieure du milieu et se traduisent, localement, par une densité de force par unité de surface.
- Les forces de volume (ou forces à distance) sont des actions distribuées dans l'ensemble du domaine, agissant sur chaque élément volumique sans contact avec l'extérieur. Elles se modélisent par une densité de force par unité de volume. Les cas usuels incluent notamment la pesanteur, les forces d'inertie (telles que la force centrifuge), ainsi que certaines forces d'origine électromagnétique.

Sous l'effet de ces sollicitations extérieures, le milieu développe des efforts internes résultant de l'interaction entre ses particules. Ces efforts se manifestent sous forme de contraintes mécaniques au sein du matériau, dont les résultantes conduisent à des grandeurs macroscopiques telles que l'effort normal, l'effort tranchant, ou le moment fléchissant, selon la nature du chargement et la configuration considérée.

3.2. Contraintes autour d'un point

Afin de déterminer les forces intérieures qui se développent au sein d'un corps soumis à diverses sollicitations extérieures, il est nécessaire d'introduire la notion de contrainte.

Considérons un milieu continu et une surface de coupe S qui sépare le corps en deux parties, dont l'une est notée A. La partie B est en équilibre sous l'action :

- Des forces extérieures directement appliquées sur son domaine.
- Des forces intérieures exercées par la partie complémentaire sur la surface de séparation S.

Soit M un point appartenant à la surface S, et considérons autour de ce point une surface élémentaire dS, de normale extérieure $\vec{n}$ orientée par rapport à la partie A.
La force élémentaire exercée sur cette facette peut être représentée sous la forme :

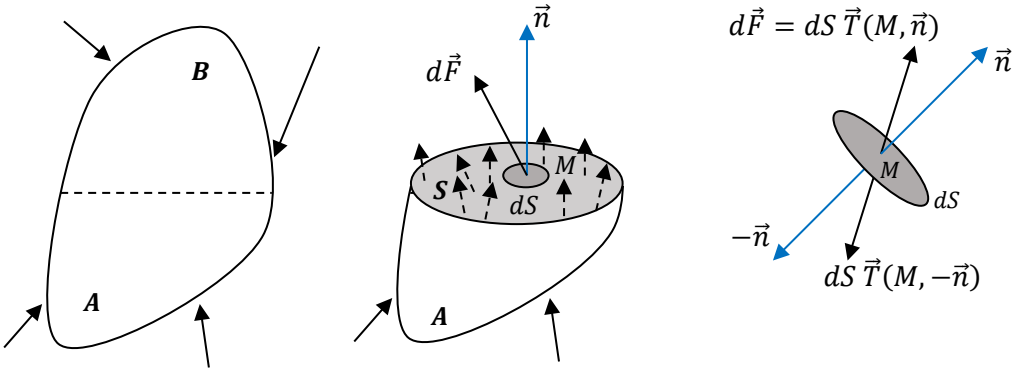
$$d\vec{F} = \vec{T}.dS \tag{1}$$

où $\vec{T}(M,\vec{n})$ désigne une densité de force par unité de surface appliquée au point M sur la facette de normale $\vec{n}$. Ce vecteur, appelé vecteur contrainte au point M, caractérise l'intensité et la direction des actions internes transmises à travers la surface de coupe.

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \lim_{dS\to 0} \frac{d\vec{F}}{dS} \tag{3.2}$$

Remarque : l'action de la parie A sur B et la réaction de B sur A impose que :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = -\vec{T}(M,-\vec{n}) \leftrightarrow \vec{T}(M,-\vec{n}) = -\vec{T}(M,\vec{n}) \tag{3.3}$$



(a) (b) (c)

Figure 3.1. *Force élémentaire sur une facette.*

3.3. Contrainte normale et contrainte tangentielle :

Sur toute facette de normale $\vec{n}$, le vecteur contrainte agissant $\vec{T}(M,\vec{n})$ peut-être décomposé en deux composantes ; normale et tangentielle :

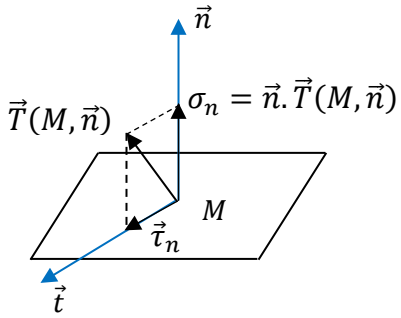


Figure 3.2. *Décomposition du vecteur contrainte en un point M*

$\vec{T}(M,\vec{n})$ Se décompose à : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n.\vec{n} + \vec{\tau}_n$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n}.\vec{T}(M,\vec{n}) & \text{composante suivant } \vec{n} \\ \vec{\tau}_n = \vec{T}(M,\vec{n}) - \sigma_n.\vec{n} & \text{projection sur la facette} \end{cases} \tag{3.4}$$

σ_n est la contrainte normale et $\vec{\tau}_n$ est le vecteur de cisaillement ou contrainte tangentielle.

σ_n est une valeur algébrique : $\sigma_n > 0$ dans le cas de la traction et $\sigma_n < 0$ en compression.

Remarque :

Ces deux composantes jouent un rôle très important pour le matériau, puisque les contraintes normales induisent des ruptures de type fragile, alors que les contraintes de cisaillement induisent de la plasticité.

L'espace est maintenant rapporté à un repère $x_i(x_1, x_2, x_3)$ de base $\vec{e}_i(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

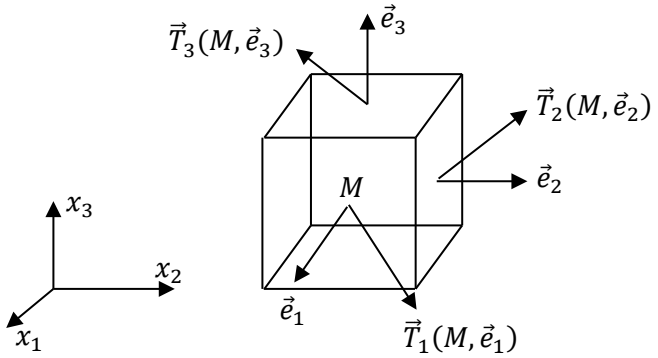


Figure 3.3. *Parallélépipède élémentaire construit sur les axes* (x_i)

Sur chacune des six (06) facettes il agit un vecteur contrainte, lequel peut être décomposé en trois composantes. Les composantes normales aux facettes sont notées $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$ et les composantes tangentes aux facettes sont notées $(\sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{12}, \sigma_{32}, \sigma_{13}, \sigma_{23})$.

A chacune des composantes on attribue deux indices ; le premier indique la facette sur laquelle elle agit et le deuxième indique sa direction.

$\vec{T}_1(M, \vec{e}_1), \vec{T}_2(M, \vec{e}_2), \vec{T}_3(M, \vec{e}_3)$ sont les composantes de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur les trois faces avec :

$$\vec{T}_1(M, \vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}_2(M, \vec{e}_2) = \sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}_3(M, \vec{e}_3) = \sigma_{13}\vec{e}_1 + \sigma_{23}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}_j(M, \vec{e}_j) = \sigma_{ij}\vec{e}_i$$

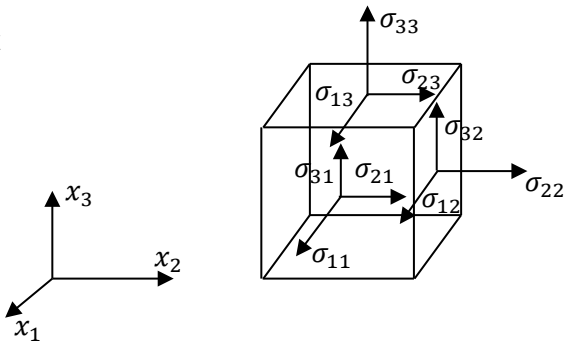
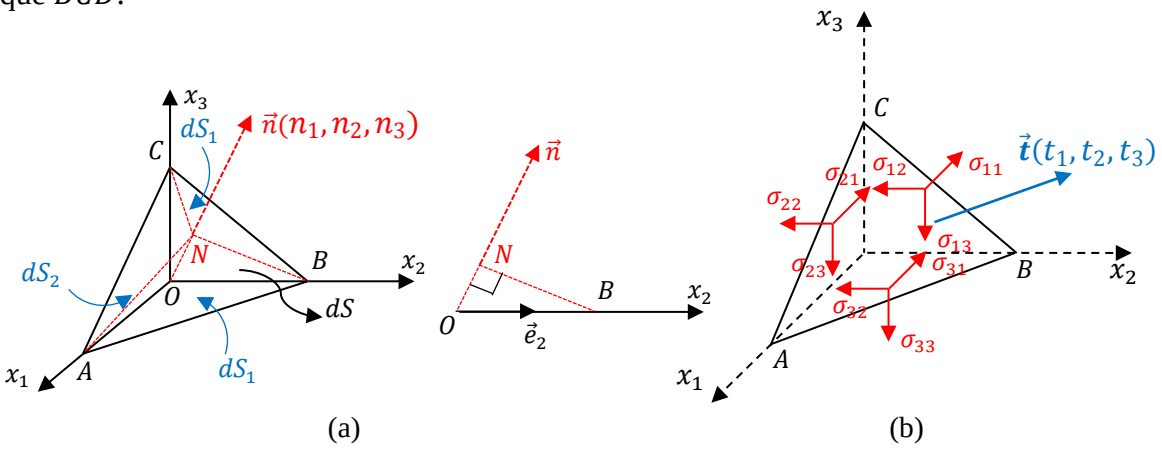


Figure 3.4. *Composantes des contraintes sur faces positives*

3.4. Vecteur contrainte sur un plan quelconque

Soit un tétraèdre élémentaire $OABC$ construit sur les axes (x_i). La face oblique ABC de normale unitaire extérieure $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ et d'aire dS. Soit $\vec{t}$ un vecteur contrainte agissant sur le plan oblique BCD.



(a) (b)

Figure 3.5. *Tétraèdre élémentaire autour du point O*

(n_1, n_2, n_3). $\Delta S_1, \Delta S_2$ *et* ΔS_3 sont les projections de ΔS sur les plans de normales $\vec{e}_1, \vec{e}_1$ *et* $\vec{e}_1$ respectivement (c.-à-d. les projections sur les plans x_2x_3, x_1x_3 *et* x_1x_2 respectivement).

Soit N un point de ΔS tel que $ON \perp \Delta S. cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = \frac{ON}{OB} \Rightarrow ON = OB. cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = n_2. OB$

De façon similaire on peut démontrer que :

$$ON = n_1. OA = n_2. OB = n_3. OC \tag{3.5}$$

Par ailleurs, le volume du tétraèdre peut être exprimé :

$V = \frac{1}{3}\Delta S. ON = \frac{1}{3}\Delta S_1. OA = \frac{1}{3}\Delta S_2. OB = \frac{1}{3}\Delta S_3. OC$ D'où :

$$\begin{cases} \Delta S. ON = \Delta S_1. OA \\ \Delta S. ON = \Delta S_2. OB \\ \Delta S. ON = \Delta S_3. OC \end{cases} \tag{3.6}$$

En combinant les équations (3.5) et (3.6) on obtient :

$$\Delta S_1 = n_1. \Delta S, \Delta S_2 = n_2. \Delta S, \Delta S_3 = n_3. \Delta S \tag{3.7}$$

Soit $[\sigma]$ le tenseur de contraintes au point O par référence à un repère (O, x_1, x_2, x_3).

Les contraintes agissantes sur les facettes du tétraèdre $\Delta S_1, \Delta S_2$ *et* ΔS_3 sont donc connues, elles sont montrées sur la figure 3.5b. Pour déterminer les composantes du vecteur contrainte $\vec{t}(t_1, t_2, t_3)$, écrivons alors l'équilibre des forces agissantes sur le tétraèdre :

Equilibre dans la direction x_1 : $t_1. \Delta S = \sigma_{11}. \Delta S_1 + \sigma_{21}. \Delta S_2 + \sigma_{31}. \Delta S_3$

En prenant en compte les relations 3.7 on obtient :

$$t_1 = \sigma_{11}. n_1 + \sigma_{21}. n_2 + \sigma_{31}. n_3 \tag{3.8}$$

De la même façon on obtient les équations correspondantes aux directions x_2 *et* x_3.

Equilibre dans la direction x_2 :

$$t_2 = \sigma_{12}.n_1 + \sigma_{22}.n_2 + \sigma_{32}.n_3 \tag{3.9}$$

Equilibre dans la direction x_3 :

$$t_3 = \sigma_{11}.n_1 + \sigma_{21}.n_2 + \sigma_{31}.n_3 \tag{3.10}$$

Ces équations (3.8, 3.9 et 3.10) peuvent être regroupées dans une écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

Soit sous forme simplifiée :

$$\{t\} = [\sigma]^t \{n\} \tag{3.12}$$

Vectoriellement :

$$\vec{t} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2 + \vec{t}_3 = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \tag{3.13}$$

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = \sigma^2 + \tau^2 \tag{3.14}$$

3.4.1. Application

Soit en un point O le tenseur de contraintes par référence à un repère (O, X, Y, Z) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Calculer le vecteur contrainte ainsi que ses composantes normale et tangentielle sur la facette de normale parallèle au vecteur $\vec{u}(2 \quad 3 \quad 1)$.

Réponse

Normale unitaire du plan : $\{n\} = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \{n\} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Vecteur contrainte : $\{t\} = [\sigma]^t \{n\} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} 5 \\ 17 \\ 9 \end{Bmatrix}$

Contrainte normale : $\sigma_n = \vec{n}.\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{14}} \{2 \quad 3 \quad 1\} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} 5 \\ 17 \\ 9 \end{Bmatrix} = 5\ MPa$

Contrainte tangentielle : $\tau = \sqrt{\left\|\vec{t}\right\|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{1}{14}(25 + 289 + 81) - 25} \approx 1.79 MPa.$

3.5. Etat de contraintes : Formule de Cauchy

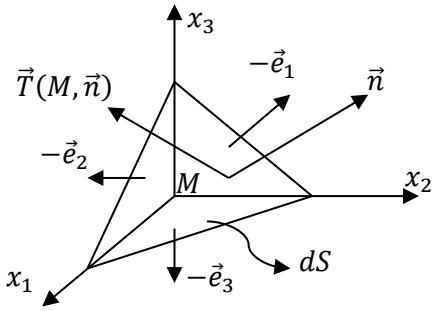


Figure 3.6. *Démonstration de la formule de Cauchy*

Sur les faces du tétraèdre agit les forces surfaciques suivantes :

Sur la facette (ABC) de normale $(\vec{n})$: $d\vec{F} = dS.\vec{T}(M,\vec{n})$

Sur la facette (MBC) de normale $(-\vec{e}_1)$: $d\vec{F}_1 = dS_1.\vec{T}_1(M,-\vec{e}_1)$

Sur la facette (MAC) de normale $(-\vec{e}_2)$: $d\vec{F}_2 = dS_2.\vec{T}_2(M,-\vec{e}_2)$

Sur la facette (MAB) de normale $(-\vec{e}_3)$: $d\vec{F}_3 = dS_3.\vec{T}_3(M,-\vec{e}_3)$

Exprimons la relation existant entre l'aire des facettes du tétraèdre en montrant que :

$dS_i = n_i dS$;

Nous avons :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2dS\vec{n} = 2dS(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3) \qquad (3.15)$$

$2dS\vec{n} = \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA}$

$2dS\vec{n} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \vec{0}$

$$2dS\vec{n} = 2dS_1\vec{e}_1 + 2dS_2\vec{e}_2 + 2dS_3\vec{e}_3 \qquad (3.16)$$

Par identification des équations (3.5) et (3.6), ce qui donne :

$2dSn_1 = 2dS_1 \rightarrow dS_1 = dSn_1$ *et de même* $dS_2 = dSn_2$; $dS_3 = dSn_3$

L'équilibre du tétraèdre se traduit par l'équation: $d\vec{F} + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_v = 0$

Avec :

$d\vec{F}_v = F.dV$ Représente la force de volume élémentaire infiniment petit d'ordre supérieur qui est négligeable.

$dS.\vec{T}(M,\vec{n}) + dSn_1.\vec{T}_1(M,-\vec{e}_1) + dSn_2.\vec{T}_2(M,-\vec{e}_2) + dSn_3.\vec{T}_3(M,-\vec{e}_3) = 0$

$\vec{T}(M,\vec{n}) = n_1.\vec{T}_1(M,\vec{e}_1) + n_2.\vec{T}_2(M,\vec{e}_2) + n_3.\vec{T}_3(M,\vec{e}_3)$

$\left\{\vec{T}(M,\vec{n})\right\} = \left[\left\{\vec{T}_1(M,\vec{e}_1)\right\},\left\{\vec{T}_2(M,\vec{e}_2)\right\},\left\{\vec{T}_3(M,\vec{e}_3)\right\}\right]\{\vec{n}\}$

$$\{\vec{T}(M,\vec{n})\} = [\sigma(M)]\{\vec{n}\} \quad \textit{Formule de Cauchy} \tag{3.17}$$

$[\sigma(M)]$ *:* représente le teneur de contraintes au point M de composantes dans le repère (x_i) :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

La matrice $[\sigma(M)]$ caracterise l'etat de contrainte au point M. elle permet désque l'on connait ces composantes σ_{11} de calculer le vecteur contraint $\vec{T}$ qui séexerce sur une facette quelconque de normale $\vec{n}$ et passant par M.

De plus, la contrainte normale sur la facette $\vec{n}$ en M est :

$\sigma_n = \vec{n}.\vec{T}(M,\vec{n}) = \{\vec{n}\}^t\,[\sigma(M)]\{\vec{n}\}$

Exemple :

Sur la facette $\vec{e}_1$, le vecteur contrainte s'écrit :

$\vec{T}_1(M,\vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3$,

Avec :

$\sigma_{11} = \vec{e}_1\vec{T}_1(M,\vec{e}_1)$ est la contrainte normale ;

$\sigma_{21}\vec{e}_2 + \sigma_{31}\vec{e}_3 = \vec{\tau}$ est le vecteur de cisaillement.

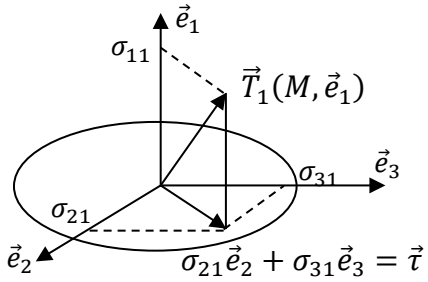


Figure 3.7. *Représentation des composantes du vecteur contraintes sur la facette de normale* $\vec{e}_1$

3.6. Changement de base

Soient deux repères (x_i) et (x_i') de bases unitaires $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{e}_i')$ respectivement, alors :

$$[\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \begin{bmatrix} \vec{e}_1'\vec{e}_1 & \vec{e}_2'\vec{e}_1 & \vec{e}_3'\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1'\vec{e}_2 & \vec{e}_2'\vec{e}_2 & \vec{e}_3'\vec{e}_2 \\ \vec{e}_1'\vec{e}_3 & \vec{e}_2'\vec{e}_3 & \vec{e}_3'\vec{e}_3 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3][C]$$

Inversement : $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = [\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'][C]^{-1}$

Avec : $[C]^{-1} = [C]^t$ propriété d'orthogonalité.

Soit un vecteur $\vec{V}$ de composantes :

- $\{V\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_i)$

- $\{V'\} = \begin{Bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{Bmatrix}$ dans la base $(\vec{e}_i')$

Alors :

$$\vec{V} = V_1'\vec{e}_1' + V_2'\vec{e}_2' + V_3'\vec{e}_3' = [\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3']\{V'\} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3][C]\{V'\} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\{V\}$$

En déduit que : $\{V\} = [C]\{V'\}$ et $\{V'\} = [C]^{-1}\{V\} = [C]^t\{V\}$

Par analogie : $\{T\} = [C]\{T'\}$ et $\{n\} = [C]\{n'\}$

De la formule de Cauchy, on a :

$$\{T\} = [\sigma(M)]\{n\} \Longrightarrow [C]\{T'\} = [\sigma(M)][C]\{n'\}$$

Donc : $\{T'\} = [C]^t[\sigma(M)][C]\{n'\} \Leftrightarrow [\sigma'(M)]\{n'\} = [C]^t[\sigma(M)][C]\{n'\}$

$[\sigma'(M)] = [C]^t[\sigma(M)][C]$ est la formule de transformation de base du tenseur des contraintes [σ(M)].

3.7. Equations d'équilibre en coordonnées cartésiennes et principe de réciprocité :

Soit un volume élémentaire parallélépipédique de côtés dx_1, dx_2, dx_3 isolé à l'intérieur d'un corps solide soumis à diverses sollicitations extérieures.

Sur le volume agissent des tractions de surface sur les six faces et deux effets de volume. La figure ne montre que les composantes parallèles à l'axe x_1.
Par simplicité, on remarque que, sur deux faces parallèles, les composantes des contraintes diffèrent de l'accroissement correspondant. Prenons la composante σ_{11}; en x_1, n_2, n_3 et indépendamment du temps, on a $\sigma_{11}(x_1, n_2, n_3)$; Au voisinage immédiat du point considéré, le long de l'axe x_1, au point $x_1 + dx_1, x_2, x_3$, la contrainte vaut au $\sigma_{11}(x_1 + dx_1, n_2, n_3)$ (Figure 3.8).

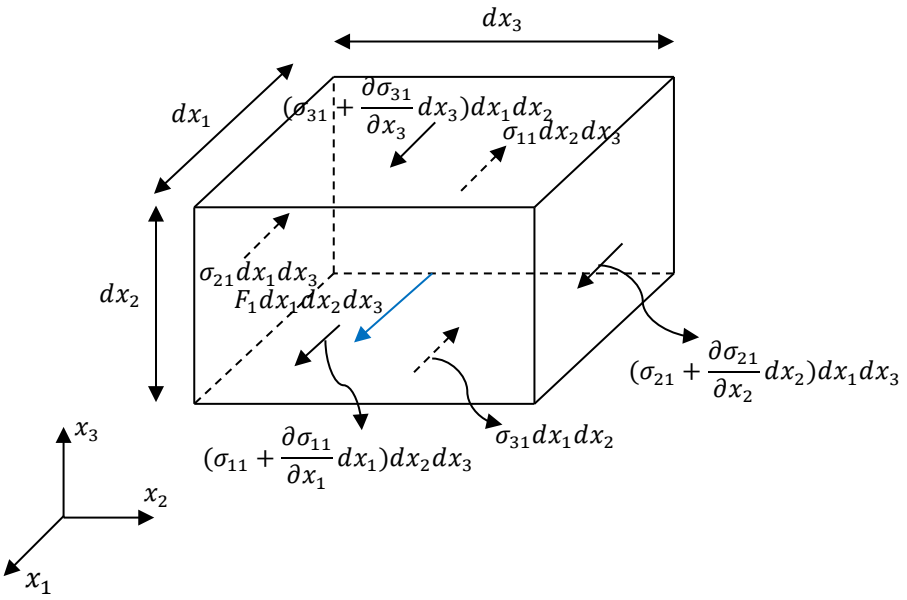


Figure 3.8. *Equilibre du parallélépipède translation selon* x_1

Les conditions d'équilibre statique de l'élément parallélépipédique sont exprimées par :

a. Equilibre de translation :

Il se traduit par : $\sum F_{/x_1} = 0\,;\quad \sum F_{/x_2} = 0\,;\quad \sum F_{/x_3} = 0$

Exprimons l'équilibre par rapport à x_1 :

$$\sum F_{/x_1} = -\sigma_{11}dx_2dx_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3 - \sigma_{12}dx_1dx_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3 - \sigma_{13}dx_1dx_2 + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2 + F_1dx_1dx_2dx_2 = 0$$

Après simplification, il reste : $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0$

On trouve deux équations semblables selon $x_2\ et\ x_3$; l'ensemble de ces trois équations aux dérivées partielles s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0 \tag{3.19}$$

Et constitue les équations du mouvement de Cauchy.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Les équations d'équilibre doivent être vérifiées en tout point à l'intérieur du corps solide. Toutefois, ces équations sont insuffisantes pour déterminer l'ensemble des composantes du tenseur des contraintes σ_{ij}. Il est donc nécessaire d'introduire des équations supplémentaires, issues de l'analyse des déformations (équations géométriques) ainsi que des lois de comportement du matériau (équations constitutives). Enfin, la détermination complète du champ de contraintes nécessite la prise en compte des conditions aux limites du problème.

b. Equilibre de rotation :

L'équilibre en rotation de l'élément s'exprime par :

$\sum M_{/x_1} = 0\,;\quad \sum M_{/x_2} = 0\,;\quad \sum M_{/x_3} = 0$

Pour exprimer la loi du moment cinétique, il est avantageux de prendre les axes par le centre du parallélépipédique élémentaire. La figure 3.9 montre les seules forces qui interviennent quand on considère l'axe x_1. En effet, les couples des forces de surface sont $\sigma_{23}dx_1dx_3$ et $\sigma_{32}dx_1dx_3$ donnent autour de x_1.

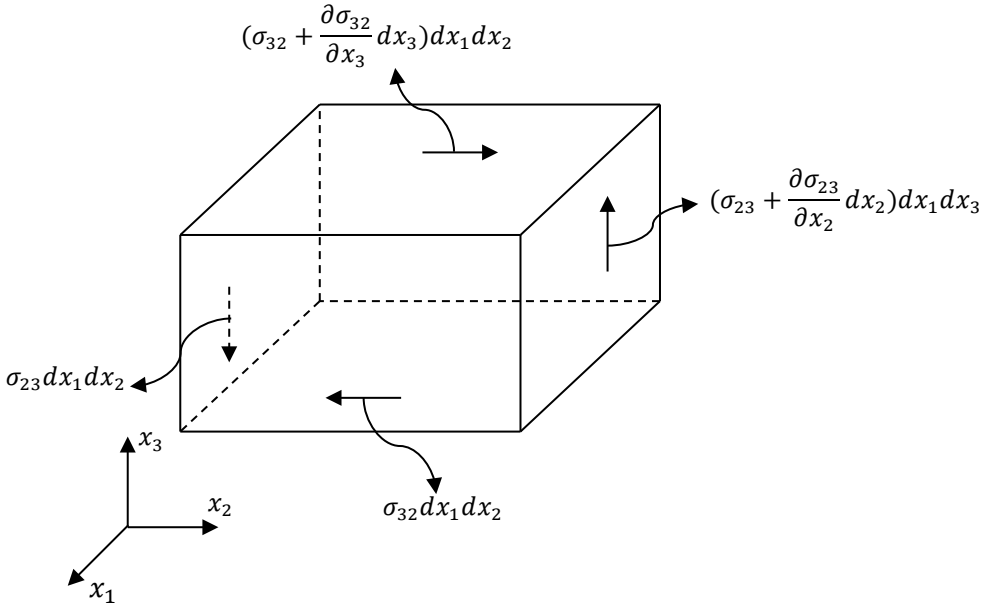


Figure 3.9. *Equilibre du parallélépipède rotation autour de* x_1

$$\sum M_{/x_3} = (\sigma_{23} dx_1 dx_3) \frac{dx_2}{2} - \left[\left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2\right] \frac{dx_3}{2} - (\sigma_{23} dx_1 dx_3) \frac{dx_2}{2} - \left[\left(\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3\right] \frac{dx_2}{2} = 0$$

Après simplification :

$$2\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_1 = 2\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2$$

On néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, on obtient :

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} \tag{3.21}$$

On procède de la même façon pour l'équilibre par rapport aux deux autres axes.

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \quad ; \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} \; ; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \; (i \neq j) \tag{3.22}$$

Ces trois égalités constituent le principe de réciprocité des contraintes tangentielles ou « loi de Parité ».

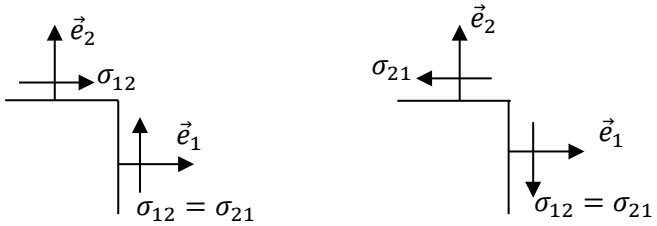


Figure 3.10. *Illustration du principe de réciprocité*

Conclusion : cette loi montre que le tenseur des contraintes est symétrique :

$[\sigma] = [\sigma]^t$

Remarque :

Si $\vec{n}$ *et* $\vec{n}'$ sont deux facettes en M ; on déduit de l'équation précédente que :

$\vec{n}.\vec{T}(M,\vec{n}') = \{n\}^t\big[[\sigma(M)]\big]\{n'\} = \{n'\}^t\big[[\sigma(M)]\big]\{n\} = \vec{n}'\vec{T}(M,\vec{n})\ \forall\ \vec{n}\ et\ \vec{n}'.$

3.8. Détermination des contraintes principales et des directions principales

3.8.1. Contraintes principales

Soit une facette $\vec{n}$ en M telque le vecteur de cisaillement $\vec{\tau}_n = 0$ et que le vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$ soit colineaire avec $\vec{n}$, alors : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n.\vec{n}$

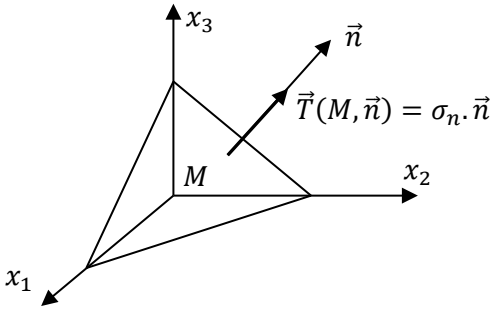


Figure 3.11. *Contraintes principales*

Dans ce cas : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \big[[\sigma(M)]\big]\{\vec{n}\} = \sigma_n.\vec{n}$

Ou σ_n représente la valeur propre du tenseur $[\sigma(M)]$ et $\vec{n}$ le vecteur propre associé.

Par projection on a : $\vec{T}_1 = \sigma_n.\vec{n}_1$; $\vec{T}_2 = \sigma_n.\vec{n}_2$; $\vec{T}_3 = \sigma_n.\vec{n}_3$ $\rightarrow T_j = \sigma_n.n_j$

Or : $T_j = \sigma_{ij}.n_i$; alors $\sigma_{ij}.n_i = \sigma_n.n_j$ $\rightarrow$ $\sigma_{ij}.n_i - \sigma_n.\delta_{ij}n_i = 0$

$$\big(\sigma_{ij} - \sigma_n.\delta_{ij}\big)n_i = 0 \tag{3.23}$$

Système linéaire et homogène en n_i , de solutions non triviales en annulant son déterminant ce qui donne :

$$det\big|\sigma_{ij} - \sigma_n.\delta_{ij}\big| = 0 \tag{3.24}$$

$$\det\begin{vmatrix}\sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_n\end{vmatrix} = 0$$

Les valeurs propres σ_n sont les racines de l'équation caractéristiques :

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0 \tag{3.35}$$

Avec :

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \sigma_{11}.\sigma_{22} + \sigma_{22}.\sigma_{33} + \sigma_{11}.\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \\ I_3 = |[\sigma(M)]| = \sigma_{11}.\sigma_{22}.\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \end{cases}$$

Les coefficients $I_1, I_2\ et\ I_3$ sont appelés invariants du tenseur de contraintes ;

I_1 : 1^{er} invariant ou invariant de 1^{er} espèce ;

I_2 : 2^e invariant ou invariant de 2^e espèce ;

I_3 : 3^e invariant ou invariant de 3^e espèce.

Remarque :

- Les trois contraintes principales notées σ_1 , σ_2 , σ_3 sont des quantités physique objectives ; cela implique que les coefficients de l'équation sont aussi objectifs appelés les invariants de l'équation.

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \sigma_{11}.\sigma_{22} + \sigma_{22}.\sigma_{33} + \sigma_{11}.\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 = \sigma_1.\sigma_2 + \sigma_2.\sigma_3 + \sigma_1.\sigma_3 \\ I_3 = |[\sigma(M)]| = \sigma_1.\sigma_2.\sigma_3 \end{cases}$$

- Par convention, les contraintes principales sont numérotées tel que : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

$$[\sigma_i] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

3.8.2. Directions principales

A chacune des contraintes principales σ_i correspond une direction principale définie par un vecteur unité $\vec{n}_i$ qui s'obtient en résolvant l'équation :

$$([\sigma] - \sigma_i\,[I\,])\,\{n\}_i\ =\ \{0\} \tag{3.36}$$

On remplace chacune des trois contraintes principales successivement dans le système d'équation et en utilisant la relation $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, on trouve les trois groupes de cosinus directeurs correspondants aux trois facettes principales.

Dans le repère principal, le tenseur de contraintes s'écrit : $[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

Avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \sigma_{ij}.n_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$$

Où n_1, n_1, n_1 sont les composantes de $\vec{n}$ et compte tenu de la relation $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ on ecrira : $\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1$

Cette équation permet la représentation graphique de $\vec{T}(M,\vec{n})$. Quand $\vec{n}$ l'extremite de $\vec{T}(M,\vec{n})$ se déplace sur l'ellipsoïde de demi-axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ appelé ellipsoïde de Lamé ou de contraintes.

Si $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$: les trois directions principales sont perpendiculaires entre eux.

Si $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$: la direction une est bien definie ; toutes les directions du plan perpendiculaires à la direction une sont des directions principales avec la même valeur principale. On dit que l'état de contraintes est de révolution autour de l'axe un. L'ellipsoïde est de révolution.

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$: toutes les directions sont principales, l'état de contraintes est dit isotrope. L'ellipsoïde est une sphère.

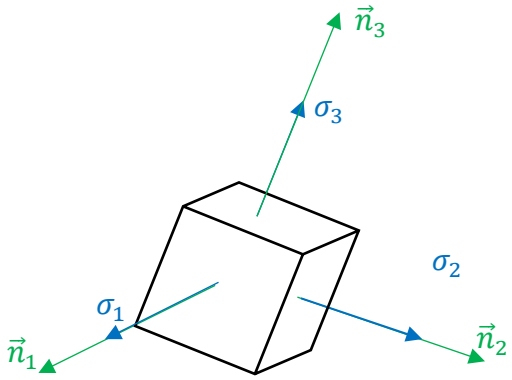


Figure 3.12. *Contraintes principales et directions principales*

3.8.3. Application

Soit en un point O le tenseur des contraintes défini par rapport au repère cartésien (O,X,Y,Z) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} MPa$$

Déterminer les contraintes et les directions principales au point O.

Réponse

- Contraintes principales :

D'après l'équation caractéristique : $\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0$

Avec :

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \sigma_{11}.\sigma_{22} + \sigma_{22}.\sigma_{33} + \sigma_{11}.\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \\ I_3 = |[\sigma(M)]| = \sigma_{11}.\sigma_{22}.\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \end{cases}$$

$I_1 = 5\ MPa$

$I_2 = 6\ MPa^2$

$I_3 = 0\ MPa^3$

Donc, l'équation caractéristique est : $\sigma_n^3 - 5\sigma_n^2 + 6\sigma_n = 0$

Les solutions de cette équation sont :

$\sigma_n = 0, \sigma_n = 3, \sigma_n = 2$

Les contraintes principales par ordre sont :

$\sigma_1 = 3\ MPa, \sigma_2 = 2\ MPa, \sigma_3 = 0$

- Directions principales :

A partir de l'équation caractéristique :

$([\sigma] - \sigma_i\ [I\ ])\ \{n\}_i\ =\ \{0\}$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_i & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_i & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Avec $l_i, m_i\ et\ n_i$ sont les composantes du vecteur unité $\vec{n}_i$.

La résolution du système d'équations pour les trois contraintes principales $\sigma_1,\ \sigma_2\ et\ \sigma_3$ donne les trois vecteurs unités définissant les directions principales respectivement :

$\{n\}_1^T = (0 \quad 0 \quad 1), \{n\}_2^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right), \{n\}_3^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0\right).$

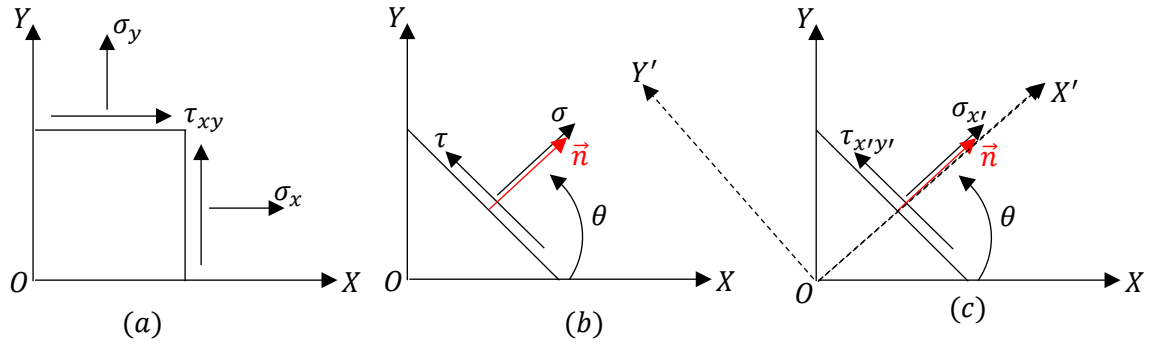


Figure 3. 13. *(a) Composantes du tenseur de contraintes dans un repère 2D. (b) Composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte sur une facette de normale faisant un angle θ avec l'axe x. (c) Analogie entre les contraintes recherchées (σ et τ) et les composantes du tenseur de contraintes dans un autre repère.*

3.9. Tenseur sphérique et tenseur déviatorique

Tout tenseur de contraintes peut être écrit sous la forme d'une superposition de deux tenseurs :

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij} \tag{3.37}$$

La somme des contraintes normales est toujours constante. On appelle contrainte normale moyenne la quantité : $\sigma_m = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3} = C^{te}$

Ce qui permet d'écrire le tenseur de contraintes par : $\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij}$

Ou bien : $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_m) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma_m) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma_m) \end{bmatrix}$

Le premier tenseur est dit tenseur sphérique (isotrope) ;

Le second tenseur est dit tenseur déviateur défini par : $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$

Le tenseur S_{ij} à pour trace nulle : $(\sigma_{11} - \sigma_m) + (\sigma_{22} - \sigma_m) + (\sigma_{33} - \sigma_m) = 0$

D'autre part, nous avons :

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_n \delta_{ij}\right) n_i = 0 \ \rightarrow \ \left[S_{ij} - (\sigma_n - \sigma_m)\delta_{ij}\right] n_i = 0 \ \rightarrow \ \left[S_{ij} - \sigma_{ns}\delta_{ij}\right] n_i = 0$$

Ou $\sigma_{ns} = (\sigma_n - \sigma_m)$

Cela veut dire que S_{ij} à les mêmes directions principales que σ_{ij} et de contraintes principales σ_{ns} qui s'obtiennent de l'équation :

$$\sigma_{ns}^3 - II_1 \sigma_{ns}^2 + II_2 \sigma_{ns} - II_3 = 0 \qquad (3.38)$$

$II_1 = 0$

$II_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \, (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)]$

$II_3 = \left|\left[S_{ij}\right]\right| = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)$

3.9.1. Application

Donner les tenseurs sphérique et déviateur associés au tenseur de contraintes suivant :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} MPa$$

Réponse

Contrainte normale moyenne :

$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = 2 \, MPa$

Tenseur de contraintes sphérique : $[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} MPa$

Tenseur de contraintes déviateur : $\left[S_{ij}\right] = [\sigma] - [\sigma]^s = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$

Remarque :

Pour un tenseur de contraintes sphérique toutes les directions sont principales. Les directions principales du tenseur de contraintes $[\sigma]$ et de son déviateur associé $\left[S_{ij}\right]$ sont les mêmes.

3.10. Représentation graphique des contraintes en un point

3.10.1. Vecteur contraintes et cercle de Mohr

Soit le repère $\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ en M, associé aux contraintes principale et $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

On considère deux vecteurs unitaires $\vec{n}$ et $\vec{t}$ définies en M orthogonaux entre eux tel que $(\vec{n}, \vec{t}) = \frac{\pi}{2}$ appartenant au plan $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$.

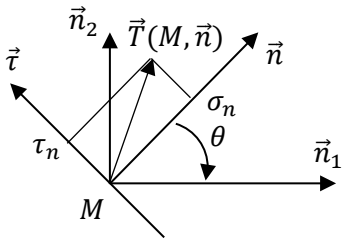


Figure 3.14. *Présentation graphique du vecteur contraintes en plan*

Dans ce cas, nous avons :

- Le tenseur en point M : $[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

- Le vecteur $\vec{n}$ à pour composantes : $\vec{n} = \{\cos\theta\,, \sin\theta\,, 0\}^t$

Alors le vecteur contrainte : $\vec{T}(M,\vec{n}) = [\sigma(M)]\{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos\theta \\ \sigma_2 \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$

- Le vecteur $\vec{t}$ à pour composantes : $\vec{t} = \{-\sin\theta\,, \cos\theta\,, 0\}^t$

Alors la projection du vecteur $\vec{T}(M,\vec{n})$ sur les axes $\vec{n}\ et\ \vec{t}$ donne :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n\vec{n} + \tau_n\vec{t}$$

Avec : $\sigma_n = \vec{n}.\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta$

$$\tau_n = \vec{t}.\vec{T}(M,\vec{n}) = -\sigma_1 \cos\theta \sin\theta + \sigma_2 \cos\theta \sin\theta$$

Soit : $\sigma_n = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta = d + r.\cos 2\theta$

$$\tau_n = -\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta = -r.\sin 2\theta$$

Ou : $d = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ et $r = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

Finalement : $\sigma_n = d + r.\cos(-2\theta)$

$$\tau_n = r.\sin(-2\theta)$$

$(\sigma_n - d)^2 + {\tau_n}^2 = r^2 \ \leftrightarrow \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + {\tau_n}^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$ Equation d'un cercle.

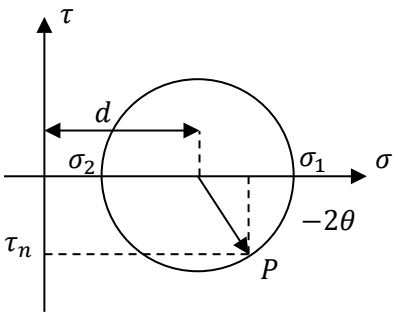


Figure 3.15. *Représentation graphique du cercle de Mohr*

A chaque facette $\vec{n}$, on peut donc associer un point P de coordonnées (σ_n, τ_n) dans le repère (σ, τ) orthonormé.

Lorsque θ varie, ce point décrit un cercle de centre : $(d, 0)$ et de rayon r.

Remarque :

Si la facette $\vec{n}$ fait un angle θ avec la facette $\vec{n}_1$, son point représentatif sur le cercle de Mohr fait un angle (-2θ) avec le point représentatif de la facette $\vec{n}_1$.

3.10.2. Tricercle de Mohr

Soit le repère principal $\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ et soit un plan $\vec{n}$ en M:

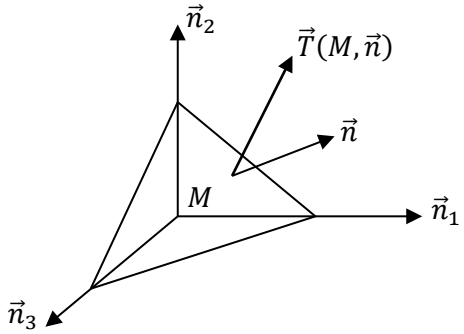


Figure 3.16. *Présentation du vecteur contraintes en 3D*

$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n . \vec{n} + \vec{\tau}$

$\sigma_n = \{n\}^t [\sigma(M)]\{n\}$

$T^2 = {\sigma_n}^2 + \tau^2$ et $\{n\}^t\{n\} = 1$

Dans le repère principal, ces relations s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ {\sigma_n}^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

Si les trois contraintes principales sont distinctes, la solution donne :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau^2+(\sigma_n-\sigma_2)(\sigma_n-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{\tau^2+(\sigma_n-\sigma_3)(\sigma_n-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)} \\ n_3^2 = \frac{\tau^2+(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)} \end{cases} \quad (3.40)$$

Conventionnellement : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$,

Donc, les inégalités $n_1^2 \geq 0$; $n_2^2 \geq 0$; $n_3^2 \geq 0$ deviennent :

$\sigma_n{}^2 + \tau^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma_n + \sigma_2\sigma_3 \geq 0$

$\sigma_n{}^2 + \tau^2 - (\sigma_3 + \sigma_1)\sigma_n + \sigma_3\sigma_1 \geq 0$

$\sigma_n{}^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_n + \sigma_1\sigma_2 \geq 0$

Soit :

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 \quad (3.41)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2 \quad (3.42)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \quad (3.43)$$

Donc, le point de coordonnées $(\sigma_n, \tau = |\vec{\tau}|)$ se trouve :

- A l'intérieur de demi-cercle de centre $O_1\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$ et de rayon $R_1 = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$;
- A l'extérieur de demi-cercle de centre $O_2\left(\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}, 0\right)$ et de rayon $R_2 = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}$;
- A l'intérieur de demi-cercle de centre $O_2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)$ et de rayon $R_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$.

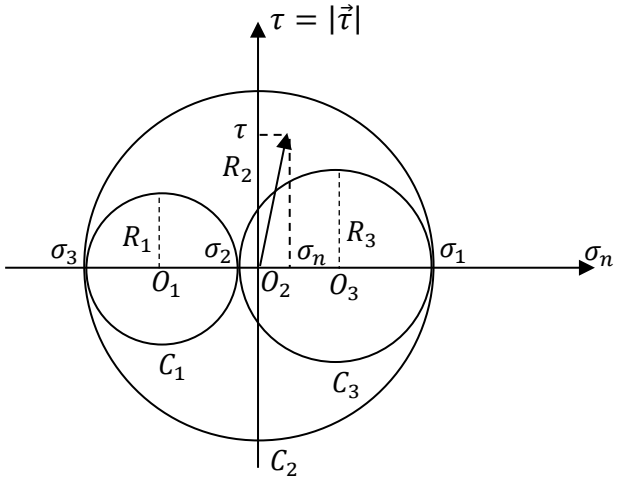


Figure 3.17. *Cercles principaux de Mohr*

La valeur maximale de la contrainte normale en M est : $\sigma_n = max(|\sigma_1|\ ;\ |\sigma_2|\ ;\ |\sigma_3|)$

La valeur maximale de la contrainte de cisaillement en M est :

$2\tau_{max} = max(\sigma_1\ ;\ \sigma_2\ ;\ \sigma_3) - min(\sigma_1\ ;\ \sigma_2\ ;\ \sigma_3)$

3.11. Etat plan de contraintes

Dans le cas de l'état plan de contraintes, le tenseur s'écrit :

$$[\sigma(M)]_{(x_1;x_2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

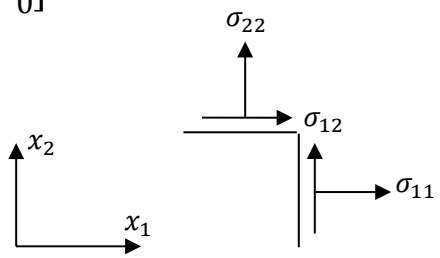


Figure 3.18. *Etat plan de contraintes*

$\vec{T}(M, \vec{e}_3) = \vec{0}$, la direction $\vec{e}_3$ est donc principale et la contrainte principale associée est nulle $\sigma_3 = 0$.

Les deux autres directions principales s'obtiennent :

$$|[\sigma(M)] - \sigma_n[I]| = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4{\sigma_{12}}^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4{\sigma_{12}}^2} \end{cases}$$

L'orientation des axes principaux est donnée par : $tg\ \theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{11}}{\sigma_{12}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_2}$

Ou $\theta = (\vec{n}_1, \vec{x}_1)$ est l'angle entre la direction principale $\vec{n}_1$ et l'axe horizontal $\vec{x}_1$.

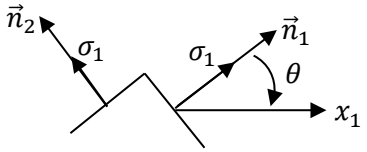


Figure 3.19. *Etat plan de contraintes*

3.12. Etats de contrainte particuliers

3.12.1. Etat de contrainte uni-axial : traction (compression) simple

Si le tenseur des contraintes se réduit à : $[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'état est dit de traction simple si σ est positif et appelé de compression simple si σ es négatif.

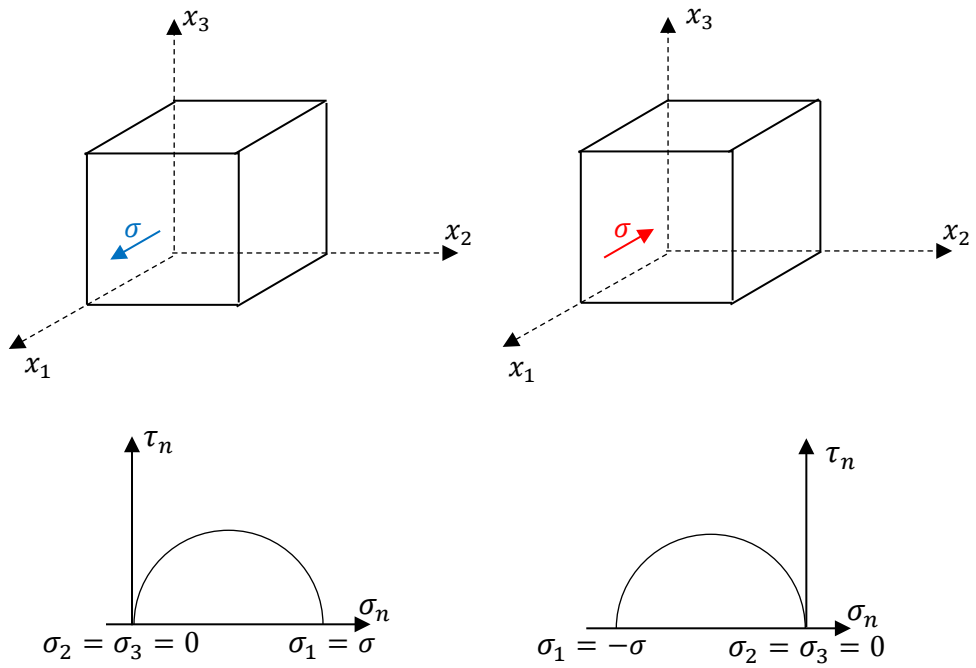


Figure 3.20. *Etat de contrainte uni-axial*

3.12.2. Etat de contrainte bi-axial

Si le tenseur des contraintes se réduit à : $[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'état est dit de traction simple biaxial si σ est positif et appelé de compression simple bi-axial si σ est négatif.

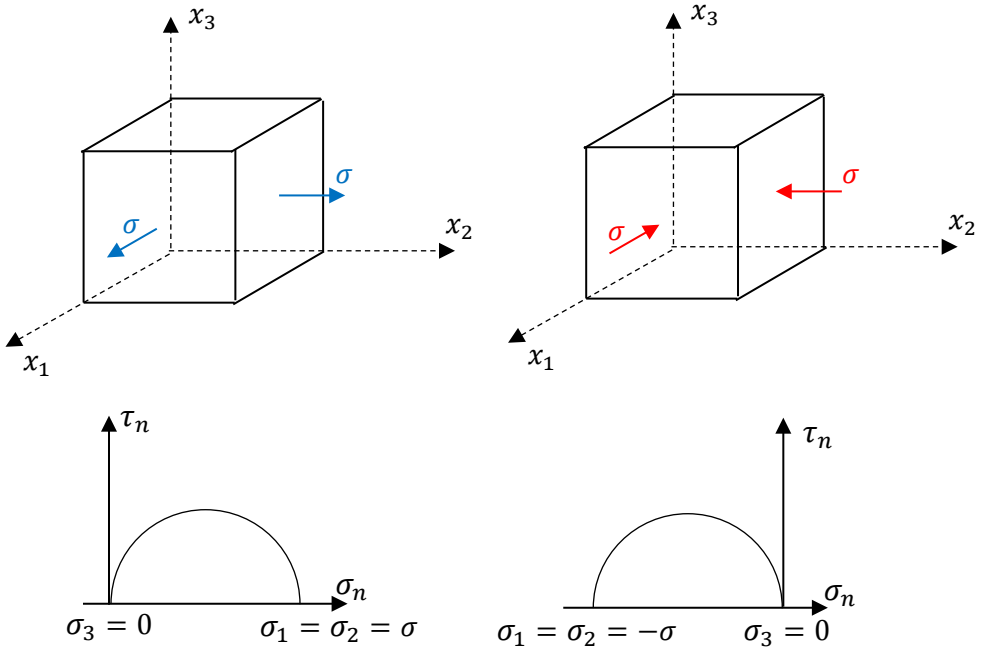


Figure 3.21. *Etat de contrainte bi-axial*

3.12.3. Etat de contrainte isotrope

Si le tenseur des contraintes se réduit à : $[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$ ($\forall$ le repère)

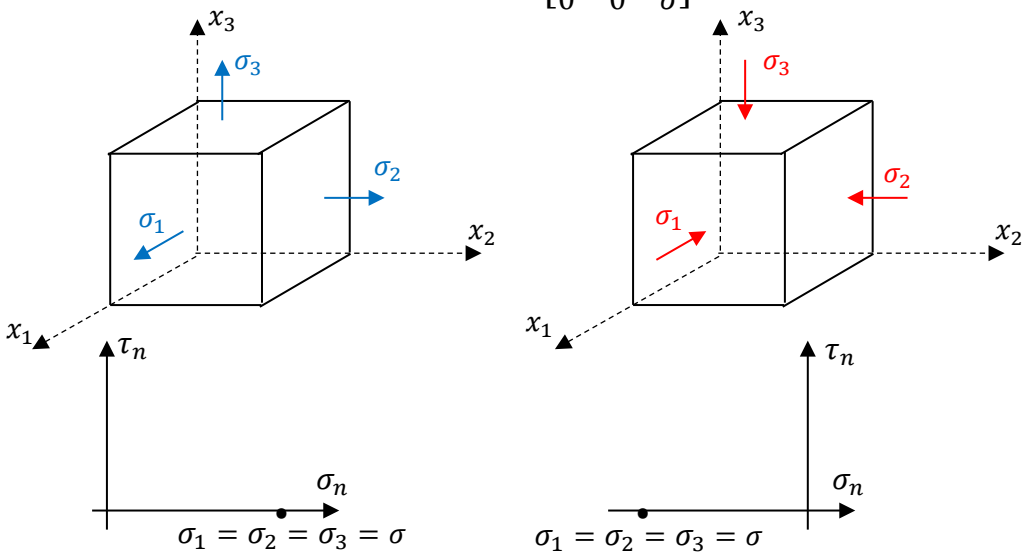


Figure 3.22. *Etat de contrainte isotrope*

3.12.4. Etat de cisaillement simple :

Si le tenseur des contraintes se réduit à :

$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ où l'état principal est donné par $[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $\sigma = \tau$

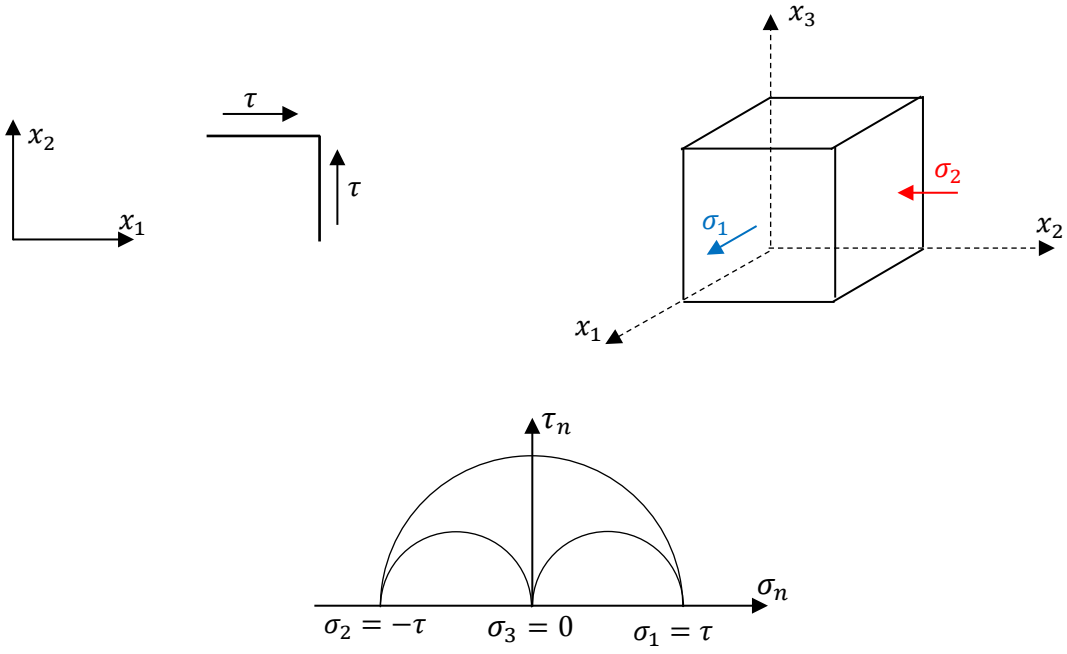
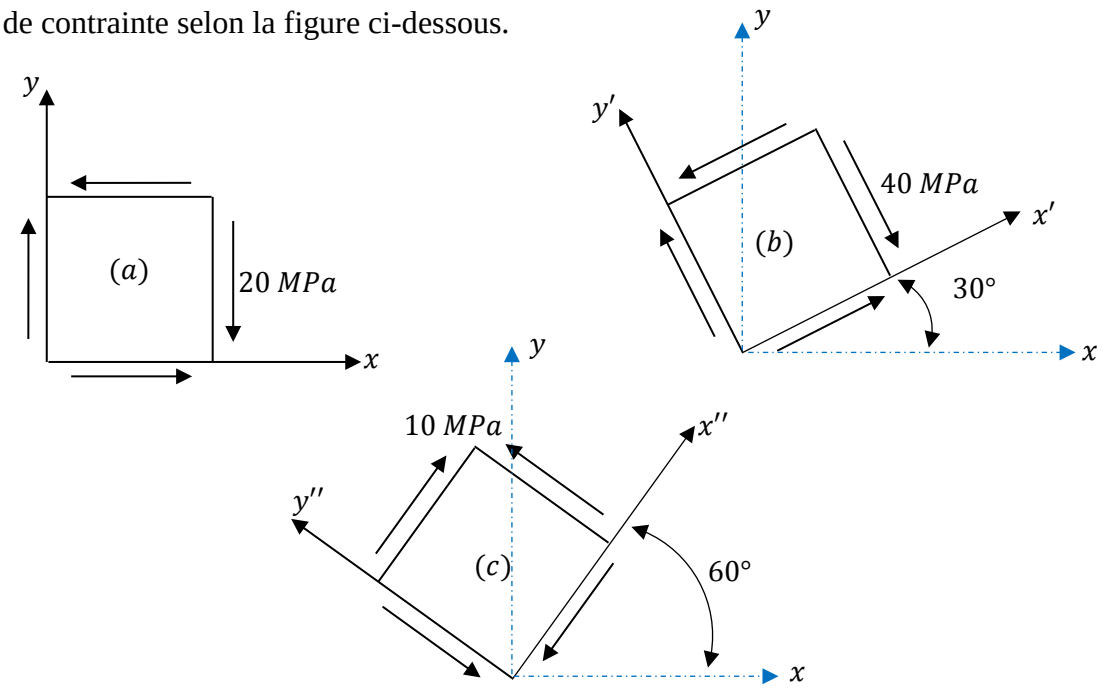


Figure 3.23. *Etat de cisaillement simple*

Exercices

Exercice 1 :

Un élément structural est soumis à un système de force, chacune produit au même point p un état de contrainte selon la figure ci-dessous.



a) Déterminer le tenseur de contraintes résultant au même point dans le repère indiqué dans le figure (a).

b) Déterminer les contraintes et directions principales par rapport au même repère.

Exercice 2 :

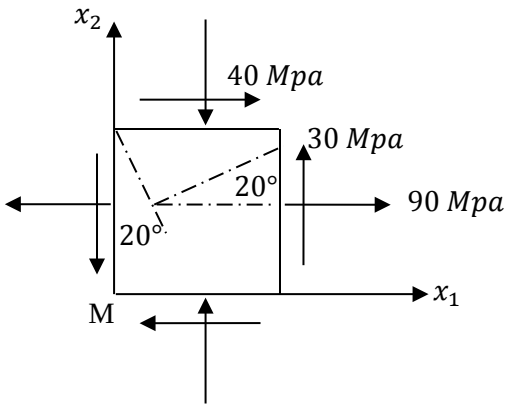
En un point M, l'état de contrainte sur deux plans perpendiculaires de normal $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ est défini comme suit : $\vec{T}(M,\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} 100 \\ -40 \end{pmatrix} Mpa$ et $\vec{T}(M,\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} -40 \\ 80 \end{pmatrix} Mpa.$

1) Faire un dessin qui montre la signification physique de cet état de contrainte;
2) Calculer le vecteur total $\vec{T}$ agissant sur le plan oblique connu par son vecteur unitaire $\vec{n}$ de composantes : $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;
3) Sur la facette $\vec{n}$, calculer la contrainte normale σ_n ainsi que la contrainte tangentielle τ_n , puis faire un dessin de votre résultat;
4) Calculer les contraintes et les directions principales et présenter les résultats graphiquement.
5) Calculer les contraintes équivalentes de Von Mises et Tresca.

Exercice 3 :

L'état de contrainte en un point d'un corps chargé est représenté comme suit :

- Déterminer les contraintes agissants sur un plan orienter à $\theta = 20°$?



Exercice 4 :

En un point M d'un solide, l'état des contraintes est défini par :

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les contraintes principales et les directions principales ?
- Tracer les tricercles de Mohr ?
- Déterminer les trois invariants des contraintes ?

Exercice 5 :

Dans un repère orthonormé de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ l'état de contrainte en un point est donné par :

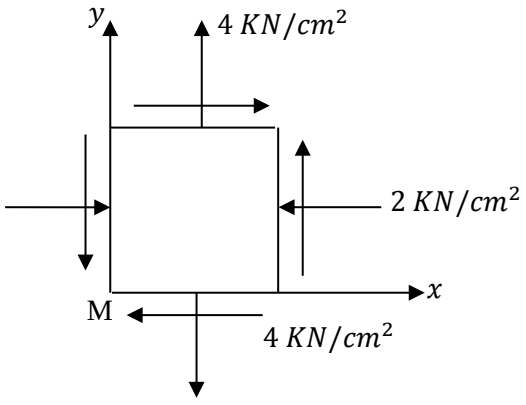
$$|T| = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & d \\ c & d & b \end{bmatrix}$$

- Déterminer la normale unitaire à un plan parallèle à x_3 et pour lequel le vecteur contrainte est tangent au plan ?

Exercice 6 :

Un état plan de contrainte en un point « M » d'un solide est défini par la valeur des contraintes $\sigma_x, \sigma_y \; et \; \tau_{xy}$ agissant sur les facettes d'un petit élément carré. En procédant analytiquement puis graphiquement ; transformer cet état à un état de contrainte :

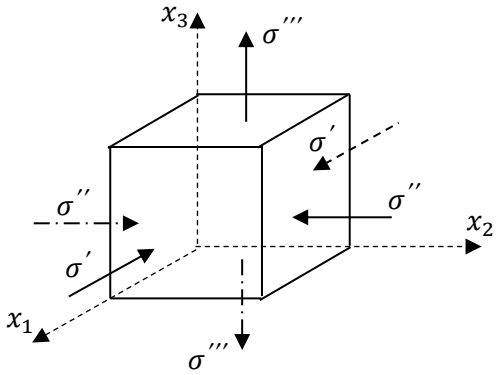
- Principale ;
- Selon les diagonales du carré.



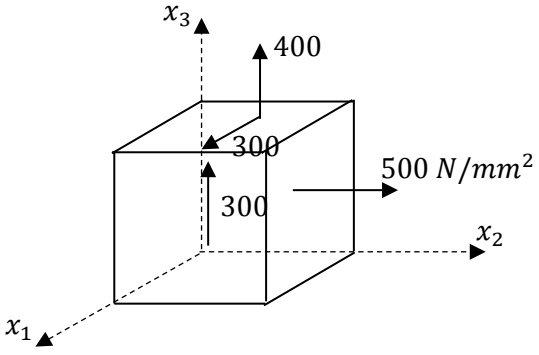
Exercice 7 :
L'état de contrainte en un point d'un solide est défini par :

$\sigma' = 400\ N/mm^2$
$\sigma'' = 800\ N/mm^2$
$\sigma''' = 200\ N/mm^2$

En procédant analytiquement puis graphiquement pour :
- Déterminer les contraintes tangentielles maximales ;
- Déterminer les composantes contrainte agissant sur un plan parallèle à la contrainte σ'' et fait un angle de 30° avec σ'.



Exercice 8 :
Soit l'état de contrainte représenté ci-après :
- Déterminer les contraintes et les directions principales ?



Exercice 9 :
Soit la matrice associée au tenseur des contraintes en un point « M » ;

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} -120 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 30 \\ 0 & 30 & 40 \end{pmatrix} N/mm^2$$

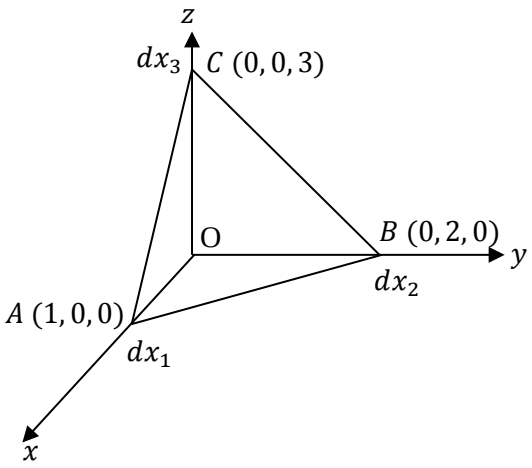
- Quelle est la particularité de ce tenseur ?
- Déterminer les contraintes et les directions principales ?

Exercice 10 :

La matrice représentant le tenseur de contraintes en un point « O » d'un corps solide est :

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Mpa$$

- Trouver les composantes du vecteur contrainte agissant en « O » sur plan parallèle au plan ABC ?



Chapitre 4. Théorie de l'état de déformation

4.1. Introduction

Considérons un corps solide soumis à des forces extérieures, entraînant le déplacement de ses particules constitutives vers de nouvelles positions.

On dit que le corps subit une déformation lorsque les positions relatives de ses particules sont modifiées c'est-à-dire lorsque les distances ou les angles entre ces particules changent.

En revanche, si les positions relatives restent invariantes, le mouvement du corps correspond à un déplacement de corps rigide, se traduisant par une translation ou une rotation sans déformation (Fig.4.1).

4.2. Notion de la déformation

4.2.1. Cas unidimensionnel

Soit une barre soumise à une force axiale P. Considère $u(x)$ le déplacement axial d'un point de position x (Fig. 3.2).

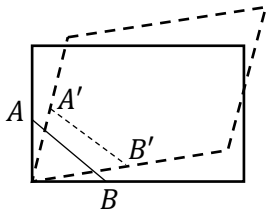
La partie $[AB]$ de longueur initiale Δx devient $[A'B']$ de longueur $(\Delta x + \Delta u)$ après l'application de la charge P.

La déformation longitudinale moyenne de la partie $[AB]$ est définie à partir de la variation unitaire de la longueur, elle s'exprime:

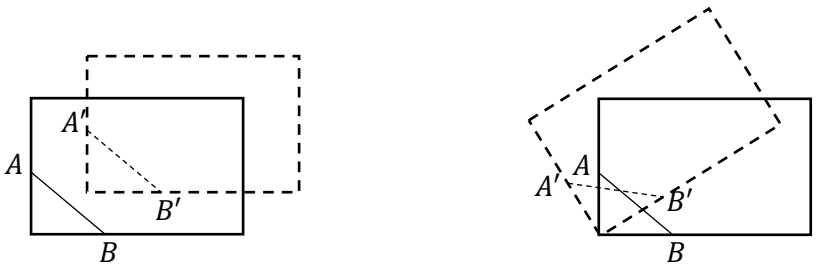
$$\varepsilon_0 = \frac{(\Delta x+\Delta u)-\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{4.1}$$

La déformation longitudinale ponctuelle en un point de position x est définie par :

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \tag{4.2}$$



$A\ et\ B$ ayant les images $A'\ et\ B'$ après déplacements
tel que : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \neq \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| \Longrightarrow Déformation$



$A\ et\ B$ ayant les images $A'\ et\ B'$ après déplacements

tel que : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \Longrightarrow Déplacement\ de\ corps\ rigide$

Figure 4.1. *Déformation et déplacement de corps rigide*

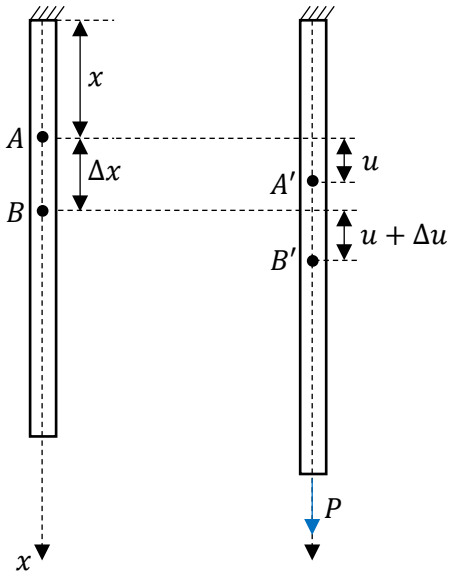


Figure 4.2. *Définition de la déformation - Cas 1D*

4.2.2. Cas bidimensionnel

On considère un élément bidimensionnel rectangulaire de dimensions initiales $dx \times dy$, défini dans un repère cartésien (x, y). Soit $u\ et\ v$ les champs de déplacements suivant respectivement les directions $x\ et\ y$.

Sous l'action d'un chargement extérieur, l'élément subit une déformation géométrique qui peut être décomposée en une superposition de trois composantes élémentaires (Figure 4.3) :

a. Un déplacement de corps rigide ;
b. Des variations des longueurs des faces sans rotation (déformations normales) ;
c. Des rotations des faces sans variation des longueurs (distorsion).

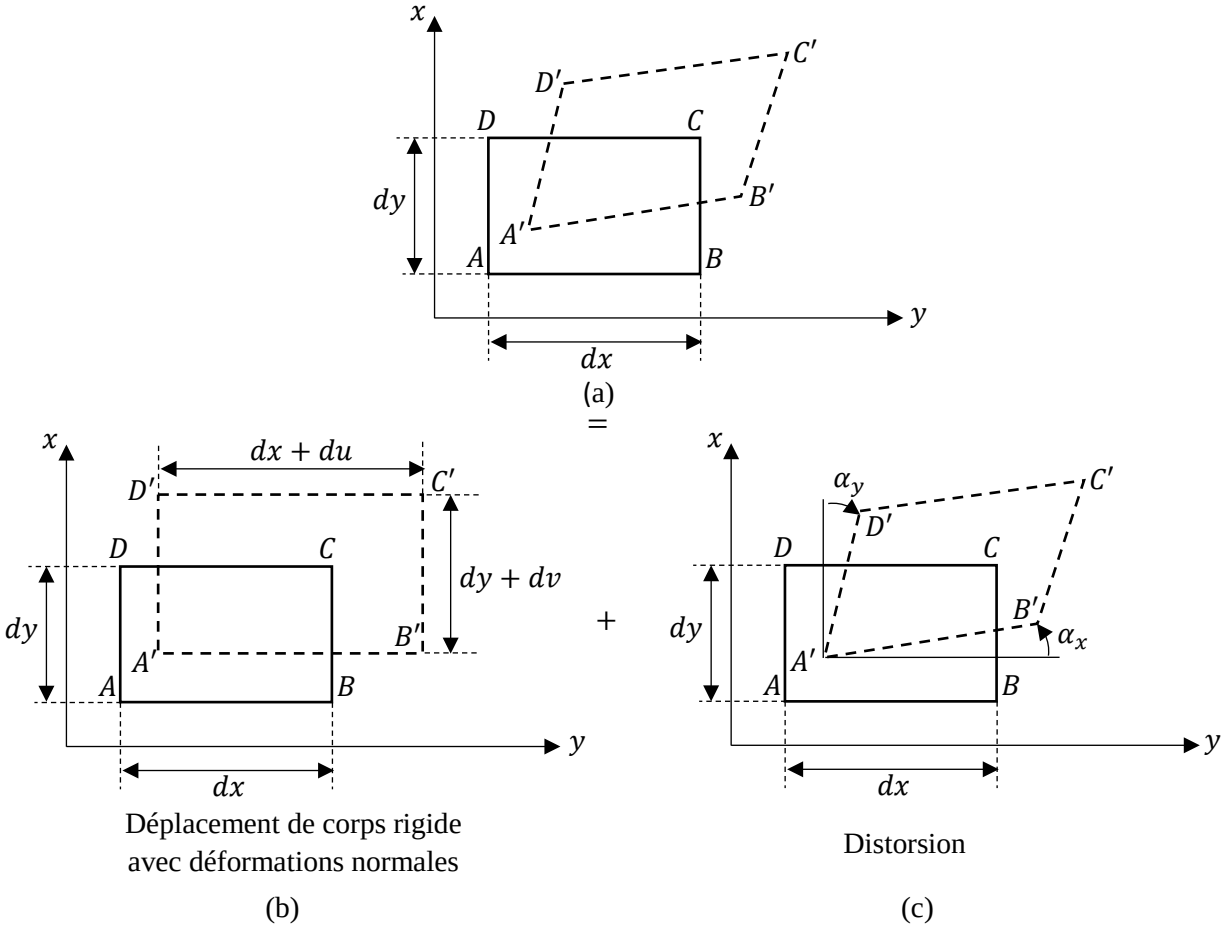


Figure 4.3. *Définition de la déformation - Cas 2D*

4.3. Déformation normale

D'une façon similaire au cas unidimensionnel, les déformations normales correspondent à une variation de longueur d'un élément selon les deux directions considérées. A partir de la figure 4.3b, elles sont définies comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \; et \; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.3}$$

Par convention de signe, $\varepsilon_x > 0 \Longrightarrow allongement$, $\varepsilon_x < 0 \Longrightarrow raccourcissement$.

4.4. Distorsion ou déformation de cisaillement

La distorsion, ou déformation de cisaillement, correspond à la variation de l'angle formé entre deux directions initialement orthogonales. Elle traduise une modification de la forme de l'élément, indépendamment d'une éventuelle variation de volume. D'après le figure 4.3c, la variation de l'angle droite $\widehat{DAB}$ s'écrit :

$\gamma_{xy} = \alpha_x + \alpha_y$.

Dans le cas des petites déformations, on peut écrire :

$\alpha_x \approx \tan \alpha_x = \frac{\partial v}{\partial x} \; et \; \alpha_y \approx \tan \alpha_x = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Par conséquence, la distorsion dans le plan xy s'écrit :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.4}$$

Remarques :

1. Une autre définition de la déformation de cisaillement est souvent utilisée :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4.5}$$

2. La grandeur γ_{xy} (ou ε_{xy}) mesure la variation de l'angle entre deux axes orthogonaux, par symétrie, on a : $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ (et $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$).
3. Pour être cohérente avec la convention de signe des contraintes, la déformation de cisaillement est considérée positive γ_{xy} $(\varepsilon_{xy}) > 0$ si l'angle droit du premier quadrant $\widehat{DAB}$ diminue. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque cet angle augmente, on a : γ_{xy} $(\varepsilon_{xy}) < 0$.

4.5. Cas tridimensionnel

Après avoir établi les expressions des déformations dans le cas bidimensionnel, il est naturel d'étendre cette analyse au cas tridimensionnel.

Dans le cas général 3D, un élément peut subir des variations de longueur selon les trois directions de l'espace ainsi que des variations d'angle entre chacune des paires de directions orthogonales. On distingue ainsi trois déformations normales $\varepsilon_x, \varepsilon_y \; et \; \varepsilon_z$, et trois déformation de cisaillement $\gamma_{xy}, \gamma_{xz} \; et \; \gamma_{yz}$, définies par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \tag{4.6}$$

Un tenseur de déformations peut ainsi être définit par :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Remarque :

Le tenseur gradient de déplacement (tenseur d'ordre deux), noté $[L]$, et définie par :

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Ce tenseur peut être décomposé d'une façon unique en la somme :
- d'un tenseur symétrique noté $[\varepsilon]$, appelé tenseur des déformation ;
- et un tenseur antisymétrique $[\omega]$, appelé tenseur des rotations.

On a ainsi :

$$[L] = [\varepsilon] + [\omega] \tag{4.9}$$

Avec :

$[\varepsilon] = \frac{1}{2}([L] + [L]^t)\ et\ [\varepsilon] = [\varepsilon]^t$

$[\omega] = \frac{1}{2}([L] - [L]^t)\ et\ [\omega] = -[\omega]^t$

Les deux matrices ont pour composantes :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ et $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Les composantes déformations sont sans dimension.

4.6. Tenseur des déformations de Green-Lagrange

La mesure de la déformation consiste à analyser la variation de l'élément de longueur au cour de mouvement exprimer par la différence : $ds^2 - ds_0^2$

avec : ds_0 est la longueur du vecteur $d\vec{x}$ dans la configuration de référence.

ds est la longueur du vecteur $d\vec{X}$ dans la configuration déformée.

$ds^2 - ds_0^2 = d\vec{X}.d\vec{X} - d\vec{x}.d\vec{x} = \{dX\}^t.\{dX\} - \{dx\}^t.\{dx\}$

$ds^2 - ds_0^2 = \{F\}^t\{dx\}^t.\{F\}\{dx\} - \{dx\}^t\{dx\}$

$ds^2 - ds_0^2 = \{dx\}^t[C]\{dx\} - \{dx\}^t.\{dx\} = \{dx\}^t([C] - [I])\{dx\}$

$ds^2 - ds_0^2 = 2\{dx\}^t[E]\{dx\}$

Avec :

$$E = \frac{1}{2}([C] - [I]) = \underbrace{\frac{1}{2}([L]^t + [L])}_{\text{termes linéaires}} + \underbrace{\frac{1}{2}[L]^t[L]}_{\text{termes non-linéaires.}} \quad (4.7)$$

$[E]$ est le tenseur des déformations de **Green-Lagrange**.

Remarque :
Si $[E] = 0$ alors on a $ds^2 = ds_0^2$ quelque soit $d\vec{x}$;
Cela signifie que le voisinage du point matériel M_0 subit un mouvement de corps rigide (translation et /ou rotation) entre la configuration de référence D_0 et la configuration actuelle D_t, sans aucune déformation.
De plus la condition $[E] = 0$ implique :
$[C] = [F]^T[F] = [I]$ d'où l'on déduit que le gradient de déformation $[F]$ est orthogonale, et vérifie : $[F]^t = [F]^{-1}$.

Cas où le corps subira une rotation rigide :

$$\overrightarrow{NN'} = [\omega]\overrightarrow{dr} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \vec{\omega} \wedge \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

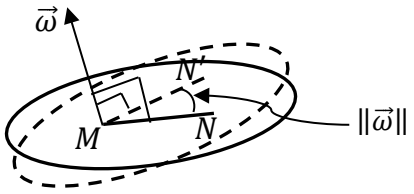


Figure 4.4. *Rotation d'un corps*

Dans un repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, les composantes des déformations de Green-Lagrange sont :

$$[E] = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}\right\} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \text{ Tenseur symétrique} \quad (4.8)$$

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right]$$

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

Avec la notation de Voigt, les 06 équations cinématiques sont donnée par :

$$\begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \end{Bmatrix}}_{\text{termes linéaires}} + \underbrace{\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix}}_{\text{termes non linéaires}} \tag{4.9}$$

Les composantes déformations sont des fonctions quadratiques, leur utilisation conduit à une analyse géométrique non linéaire des structures qui est assez complexe.

4.7. Déformation volumique

Elle est définie comme la variation relative (ou unitaire) du volume :

$$e = \frac{\Delta V}{V} \tag{4.10}$$

Avec :

V : le volume initial ;
ΔV : la variation de volume.

La déformation volumique peut être exprimée en fonction des déformations normales de la façon suivante. Considérons un élément volumique de dimensions initiales $dx \times dy \times dz$. Sous l'effet de la déformation, ces dimensions deviennent $(dx + \varepsilon_x dx) \times (dy + \varepsilon_y dy) \times (dz + \varepsilon_z dz)$ (Figure. 4.5).

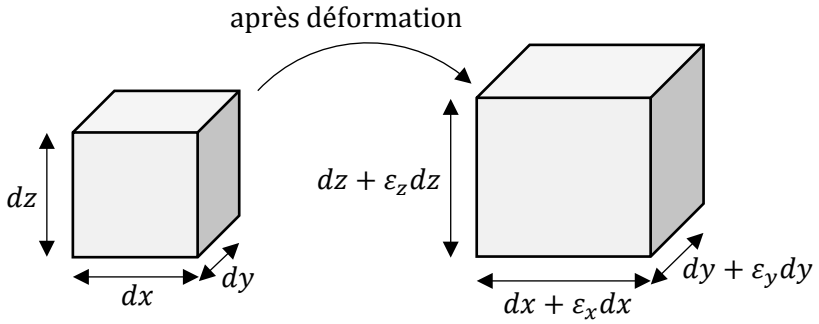


Figure 4.4. *Elément volumique soumis à des déformations normales*

Le volume initial est donné par : $V = dx \times dy \times dz$,

Après déformation, le volume sera : $V + dV = (dx + \varepsilon_x dx) \times (dy + \varepsilon_y dy) \times (dz + \varepsilon_z dz)$

$$= dx \times dy \times dz(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

La déformation volumique est : $e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(V+\Delta V)-V}{V} = \frac{dx \times dy \times dz((1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)-1)}{dx \times dy \times dz}$

$e = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1$

$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$

Les termes d'ordre élevé peuvent être négligés, c'est-à-dire :

$\varepsilon_x\varepsilon_y \approx 0, \varepsilon_x\varepsilon_z \approx 0, \varepsilon_y\varepsilon_z = 0, \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z \approx 0.$

Donc :

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{4.11}$$

4.8. Application

Sous l'effet d'un chargement extérieur, les particules d'un corps solide subissent un champ de déplacement, défini dans un repère $Oxyz$ par les composantes suivantes :

$u = (x^2 + 10)10^{-2}, v = (2yz)10^{-2}\ et\ w = (z^2 - xy)10^{-2}.$

Déterminer le tenseur de déformation ainsi que la déformation volumique en un point de coordonnées $(0, 2, 1)$.

Solution

- Calcul du tenseur de déformation en fonction de $x, y\ et\ z$:

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \times 10^{-2}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 2z \times 10^{-2}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 2z \times 10^{-2}$

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}y \times 10^{-2},$

$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}(2y - x) \times 10^{-2}$

Donc : $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2x & 0 & -\frac{1}{2}y \\ 0 & 2z & \frac{1}{2}(2y-x) \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}(2y-x) & 2z \end{bmatrix} \times 10^{-2}$

- Tenseur de déformation au point $(0,2,1)$: $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$

- Déformation volumique au point $(0,2,1)$: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 4 \times 10^{-2}$

4.9.Allongement d'une direction quelconque

Soit M un point au voisinage de 0 tel que : $0M = dl.\vec{n}$
($\vec{n}$- vecteur unitaire de la direction quelconque et $dl > 0$).
Après transformation :

$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0 \text{ tel que } \vec{u}(0) = \vec{0} \\ M \rightarrow M' \text{ tel que } \vec{u}(M) = \overrightarrow{MM'} = [\varepsilon](dl\vec{n}) \end{cases}$$

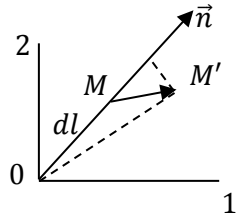


Figure 4.5. *Allongement d'une direction quelconque*

L'allongement de $0M$ est $\overrightarrow{MM'}.\vec{n}$ et l'allongement unitaire suivant $\vec{n}$ est :

$$\varepsilon_n = \frac{allongement}{longueur\ initiale} = \frac{\overrightarrow{MM'}.\vec{n}}{dl} = \frac{[\varepsilon](dl\vec{n})\vec{n}}{dl} = \vec{n}([\varepsilon]\vec{n}) = \vec{n}^t[\varepsilon]\vec{n}$$

4.10. Variation d'un angle droit quelconque :

Soit M et N deux points du voisinage 0 tel que :

$$\begin{cases} 0M = dl_1\vec{n} \\ 0N = dl_2\vec{t} \end{cases}$$

Après transformation :

$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ M \rightarrow M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}(M) = [\varepsilon]dl_1\vec{n} \\ N \rightarrow N' \text{ tel que } \overrightarrow{NN'} = \vec{u}(N) = [\varepsilon]dl_2\vec{t} \end{cases}$$

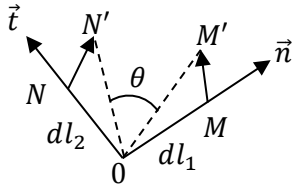


Figure 4.6. *Variation d'un angle droit quelconque*

Alors, l'angle droit $(\vec{n},\vec{t})$devient l'angle $\theta = M'0N'$ défini par :

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{0M'}.\overrightarrow{0N'}}{\|\overrightarrow{0M'}\|.\|\overrightarrow{0N'}\|} = \frac{(dl_1\vec{n}+\overrightarrow{MM'})(dl_2\vec{t}+\overrightarrow{NN'})}{dl_1dl_2} = \frac{(dl_1\vec{n}+[\varepsilon]dl_1\vec{n}).(dl_2\vec{t}+[\varepsilon]dl_2\vec{t})}{dl_1dl_2}$

$\cos\theta = \vec{t}([\varepsilon]\vec{n}) + \vec{n}([\varepsilon]\vec{t})$ avec $\vec{t}([\varepsilon]\vec{n}) = \vec{n}([\varepsilon]\vec{t})$ car $[\varepsilon]$ est symétrique

$\cos\theta = sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \cong \frac{\pi}{2}-\theta$

Donc la distorsion $(\vec{n},\vec{t})$ notée $2\varepsilon_{nt}$ est : $2\varepsilon_{nt} = \frac{\pi}{2}-\theta = 2\vec{t}^t[\varepsilon]\vec{n}$.

4.10. Déformations et directions principales

Le tenseur ε_{ij} est un tenseur d'ordre deux symétrique qui ressemble au tenseur σ_{ij} ; alors une étude identique de ε_{ij} à celle de σ_{ij} est possible.

4.10.1. Les déformations principales

Sont obtenues par :

$$det(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_n\delta_{ij}) = |[\varepsilon]-\varepsilon_n[I]| = 0 \qquad (4.12)$$

L'équation caractéristique est : $\varepsilon_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0$

Les invariants sont :

$I_1 = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$

$I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}-\frac{1}{4}(\gamma_{12}^2+\gamma_{13}^2+\gamma_{23}^2)$

$I_3 = |[\varepsilon]|$

4.10.2. Les directions principales

Résultent de :

$$(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_n\delta_{ij})n_i = ([\varepsilon]-\varepsilon_n[I])\{n_i\} = 0 \qquad (4.13)$$

Ou n_i sont les composantes du vecteur propre correspondant à ε_n. Donc trois vecteurs propres correspondants aux trois valeurs propres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (déformations principales).

4.10.3. Le tenseur sphérique de déformation

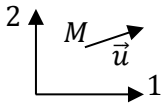
Il est exprimé par :

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix}\varepsilon_0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_0\end{bmatrix} = \varepsilon_0[I] = \varepsilon_0\delta_{ij} \qquad (4.14)$$

ou $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{3} = \frac{I_1}{3}$ est la dilatation moyenne.

Il en résulte que le tenseur déviateur est : $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij}$

4.11. Etat plan de déformation



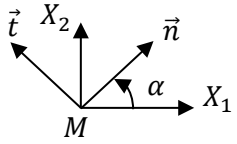
Lorsque le champ de déplacement est de la forme :

$$\vec{u}(M)=\begin{cases}u_1(x_1;x_2)\\ u_2(x_1;x_2)\\ u_3=0\end{cases}\rightarrow[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\text{ et }[\omega]=\begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$u_{33}=u_3=0$ est principale ($\varepsilon_{23}=\varepsilon_{13}=0$) et x_3 est direction principale.
Soit dans le plan $(x_1;x_2)$ deux directions $\vec{n}$ et $\vec{t}$ tel que :
$(\vec{n};\vec{t})=\frac{\pi}{2}$ et $\vec{n}$: $(\cos\alpha\,;\sin\alpha\,;0)$
$\varepsilon_n=\vec{n}^t[\varepsilon]\vec{n}=\varepsilon_{11}cos^2\alpha+\varepsilon_{22}sin^2\alpha+2\varepsilon_{12}\sin 2\alpha$
$=\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}}{2}+\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\cos 2\alpha+\varepsilon_{12}\sin 2\alpha$
ε_t est déduit pour $\alpha_1=\alpha+\frac{\pi}{2}$
$\varepsilon_{nt}=\vec{t}^t[\varepsilon]\vec{n}=(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos\alpha\,\alpha\sin\alpha+\varepsilon_{12}(cos^2\alpha-sin^2\alpha)$
$=-\frac{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}{2}\sin 2\alpha+\varepsilon_{12}\cos 2\alpha.$
Les axes principaux dans le plan $(x_1;x_2)$ sont déduit pour $\varepsilon_{nt}=0\rightarrow tg2\alpha=\frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}}$

4.12. Cercle de Mohr

Soit en M, un repère principal (M,X_1,X_2,X_3) et un plan P de normale $\vec{n}$: $(\cos\alpha\,,\sin 2\alpha\,,0)$ et $\vec{t}$: $(-\sin\alpha\,\alpha,\cos\alpha\,,0)$ vecteur directement perpendiculaire à $\vec{n}$, situé dans le plan $(x_1;x_2)$. Les composantes normale et tangentielle ε_n et ε_{nt} qui sont définies par :



$\varepsilon_n=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos 2\alpha$
$\varepsilon_{nt}=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\sin 2\alpha$
Avec : $d=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ et $r=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$, on aura
$\varepsilon_n=d+r\cos(-2\alpha)$
$\varepsilon_{nt}=\frac{1}{2}\gamma_{nt}=r\sin(-2\alpha).$
A chaque facette $\vec{n}$ est associé un point P du plan de Mohr. Lorsque α varie, ce point décrit un cercle de centre $(d,0)$ et de rayon r.

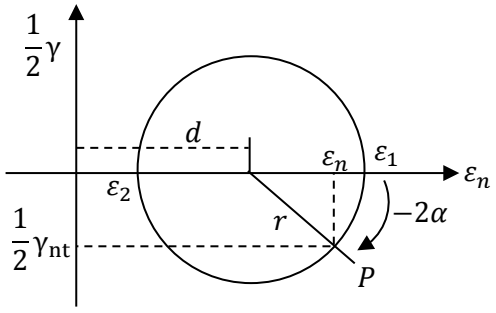


Figure 4.7. *Cercle de Mohr*

Remarque :
Si $\alpha=0$; $\vec{n}=\vec{e}_1$; $\vec{t}=\vec{e}_2$; $\varepsilon_{nn}=\varepsilon_1$ et $\varepsilon_{nt}=0$ pas de distorsion pour les directions principales.
Si $\alpha=\frac{\pi}{4}$; $\varepsilon_{nn}=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ et $\varepsilon_{nt}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}$: distorsion maximale.
Si $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\vec{n}=\vec{e}_2$; $\vec{t}=-\vec{e}_1$; $\varepsilon_{nn}=\varepsilon_2$ et $\varepsilon_{nt}=0$: pas de distorsion pour les directions principales.

4.13. Equations de compatibilité des déformations

A tout champ de déplacement $\vec{u}(u_1, u_2,\ u_3)$, on associe un tenseur de déformation $[\varepsilon]$ (équation de Cauchy).
Inversement, étant donné un champ de déformation $[\varepsilon]$, on cherche à déterminer le champ de déplacement $\vec{u}$ correspondant. Le problème ainsi posé conduit à un système de six équations pour trois inconnus. Si on considère les composantes normales de déformation $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$, on peut calculer les déplacements sous l'expression : $u_1, u_2,\ u_3 = f(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$.
Après on calcul les composantes de cisaillement à partir de :
$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13} = f_1(u_1, u_2,\ u_3)$, alors $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13} = f_1[f(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})] = F(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$.
Donc, il existe des relations entre les déformations et que ces dernières ne peuvent être arbitraires. Ces relations sont dites : équations de compatibilité, ainsi :

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \quad (1)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_3^2} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} \quad (2)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} \quad (3)$$

D'autre part : $\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3}$ (a)

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (b)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (c)$$

(a)+(b)-(c) $\rightarrow \left[\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1}\right] = 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1}\right] = 2\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (4)$$

De la même façon :

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2}\right] = 2\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3}\right] = 2\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6)$$

En résumé, les 06 équations de compatibilité sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases} \quad (4.15)$$

Ces équations représentent la condition de continuité du milieu et garantissant d'existence d'un champ de déplacement unique correspond au champ de déformation, dans la condition des hypothèses d'homogénéité, d'isotropie et d'élasticité.

4.14. Mesure des déformations

Contrairement aux contraintes, il est possible d'évaluer expérimentalement la déformation en un point. Différents techniques de mesure sont utilisés ; on cite :

a- Mesure directe des variations de longueur Δl faite par moyen de visée optique ou des capteurs de déplacement (potentiomètres).

b- Jauges de déformation (capteurs de déformations = mesure de déformation), plus souvent on utilise la jauge résistive, en collant un fil sur une pièce qui se déforme et en mesurant sa résistance (pont de Wheatstone).

c- Autres méthodes plus spécifiques : Témoin sonore dans les barrages, des fibres optiques, …etc.

Dans le cas plan, on mesure trois 03 déformations distinctes par trois jauges de déformation, l'ensemble forme une rosette extensométrique. En pratique, on dispose des rosettes à $45°, 60°$ et celle à $120°$.

Exemple d'application :

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ les vecteurs unitaires portés par les 03 jauges.

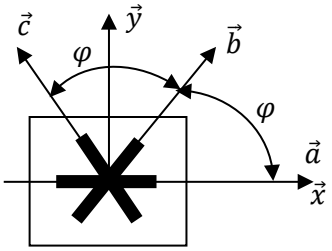


Figure 4. 5. *Mesure des déformations*

L'allongement unitaire dans les trois directions est :

$\varepsilon_a = \varepsilon(M,a)$; $\varepsilon_b = \varepsilon(M,b)$; $\varepsilon_c = \varepsilon(M,c)$ avec :

$\vec{a} = (1,0,0)$; $\vec{b} = (\cos\varphi\,, \sin\varphi\,, 0)$; $\vec{c} = (\cos 2\varphi\,, \sin 2\varphi\,, 0), donc$:

$\varepsilon_a = \varepsilon_{xx}$

$\varepsilon_b = \varepsilon_{xx} cos^2\varphi + \varepsilon_{yy} sin^2\varphi + \gamma_{xy} \cos\varphi \cos\varphi$

$\varepsilon_c = \varepsilon_{xx} cos^2(2\varphi) + \varepsilon_{yy} sin^2(2\varphi) + \gamma_{xy} cos(2\varphi) cos(2\varphi)$

En ont déduit les composantes $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$ du tenseur déformations en cas plan comme suit :

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\varepsilon_a(2cos^2(\varphi) - 1) + 2\varepsilon_b\big(1 - 2cos^2(\varphi)\big) + \varepsilon_c}{2sin^2(\varphi)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_a\left(1 - 4cos^2(\varphi)\right) + 4cos^2(\varphi)\varepsilon_b - \varepsilon_c}{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}$$

4.15. Application

Pour trouver l'état de déformation en un point O d'une surface d'un corps solide, on utilise une rosette à 60°. Les jauges sont disposées suivant les directions 0°, 60° et 120° par rapport à l'axe x d'un repère Oxy. Les mesures effectuées sont :

$\varepsilon_0 = 190 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{60} = 200 \times 10^{-6}$ et $\varepsilon_{120} = -300 \times 10^{-6}$.

Déterminer le tenseur de déformation par rapport au repère Oxy.

Solution

Utilisons la relation donnant la déformation normale suivant une direction :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon(\alpha = 0) = \varepsilon_x \\ \varepsilon_{60} = \varepsilon(\alpha = 60°) = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{xy} + \frac{3}{4}\varepsilon_y \\ \varepsilon_{120} = \varepsilon(\alpha = 120°) = \frac{1}{4}\varepsilon_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{xy} + \frac{3}{4}\varepsilon_y \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équation permet de déduire les déformations :

$\varepsilon_x = 190 \times 10^{-6}, \varepsilon_y = -130 \times 10^{-6}, \varepsilon_{xy} = \frac{1000}{\sqrt{3}} \times 10^{-6}$.

Exercices

Exercice 1 :

En un point M un état de déformation est défini par le tenseur : $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.10^{-4}$

1) Calculer la valeur de l'allongement relatif dans la direction $\vec{n}$ de composantes (2, 2, 1) dans le repère de calcul choisi ?
2) Quelle est la variation d'angle entre les deux lignes initialement perpendiculaires de direction $\vec{n}\ (2,\ 2,\ 1)\ et\ \vec{m}\ (3,\ 0,\ -6)$?
3) Calculer les dilatations principales au point M.
4) Quelle est la valeur du glissement maximal en M ? dans quel plan agit-il ?

Réponse :

1- $\varepsilon_n = 5{,}11.10^{-4}$

2- $\vec{n}.\vec{m} = 0 \rightarrow cos\theta = 2\{m\}^t[\varepsilon]\{n\} = \gamma_{nm} = 2\left(\frac{10}{\sqrt{45}}\right).10^{-4}$

3- $\varepsilon_1 = 6{,}317.10^{-4}$; $\varepsilon_2 = 2.10^{-4}$; $\varepsilon_3 = -0{,}317.10^{-4}$

4- $g_{man} = \frac{1}{2}\gamma_{max} = \pm 3{,}317.10^{-4}$ agit dans le plan $(1\ ;\ 3)$

Exercice 2 :

En un point d'un corps, les composantes du tenseur déformation sont données par :

$\varepsilon_x = a.y, \quad \varepsilon_y = a.x, \quad \varepsilon_z = 2.a.(x+y)$

$\gamma_{xy} = a.(x+y), \quad \gamma_{yz} = 2.a.z, \quad \gamma_{xz} = 2.a.z$

Où « a, b et c » sont des constantes.

- Vérifier si les équations de compatibilité sont remplies ou non.

Exercice 3 :

Un champ de déplacement est défini par les composantes :

$u = k.x.y, \quad v = k.x.y, \quad w = 2.k.(x+y).z$

Où k est une constante suffisamment petite pour assurer la linéarité géométrique.

- Calculer les composantes du tenseur déformation au point $(1, 1, 0)$.

- Calculer les allongements principaux et les directions principales.

Exercice 4 :

Sous l'action des charges extérieurs, les déplacements en un point « M » sont définis à partir de l'état neutre par :

$$\overrightarrow{du}(M)\begin{cases} du_1 = 2.10^{-3}dx_1 - 10^{-3}dx_2 \\ du_2 = 3.10^{-3}dx_1 - 2.10^{-3}dx_2 \\ du_3 = 0 \end{cases}$$

- Définir l'état de déformation, puis de rotation du milieu.

- Déterminer les allongements principaux et les directions principales.

- Tracer le tricercle de Mohr des déformations.

Au point « M » de ce milieu, nous plaçons une jauge électrique dans une direction $\vec{n}$ définis par ses cosinus directeurs $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

- Quelle mesure est ainsi effectuée ?
- Donner le point représentatif de l'état de déformation dans la direction $\vec{n}$ sur le tricercle tracé précédemment.

Exercice 5 :

En vue de déterminer le tenseur des déformations expérimentalement au point « M » d'un corps, on place autour de ce point un dispositif expérimental (jauges extensométriques) selon la figure suivante :

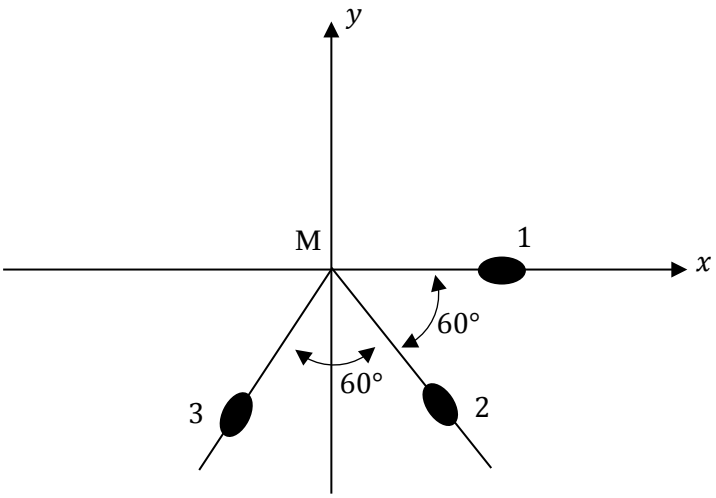
Les dilatations linéaires relatives mesurées sont :

$\varepsilon_1 = 10^{-3}$

$\varepsilon_2 = 2.10^{-3}$

$\varepsilon_3 = 4.10^{-3}$

- Calculer le tenseur déformation à ce point « M ».
- Déterminer les allongements principaux et leurs directions analytiquement.
- Contrôler vos résultats graphiquement.



Chapitre 5. Relations entre les contraintes et les déformations

5.1. Introduction

Les lois de comportement des matériaux, issues de leur constitution interne, traduisent avant tout la relation existant entre les variables statiques (contraintes) et les variables cinématiques (déformations).

Lorsque les propriétés du matériau sont indépendantes du temps et de la température, le comportement du milieu est qualifié par linéaire élastique.

5.2. Loi de Hooke généralisée

De manière générale, la relation constitutive reliant les contraintes aux déformation s'exprime par :

$$\sigma_{ij} = F(\varepsilon_{kl}) \tag{5.1}$$

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire, cette relation constitutive est linéaire et homogène, et peut s'exprimer sous la forme générale :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \text{ et } \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (i,j,k,l = 1,2,3) \tag{5.2}$$

Le tenseur D_{ijkl} (C_{ijkl}) est un teneur d'ordre quatre, représentant un operateur linéaire qui possède $3^4 = 81$ coefficients.

Par ailleurs, les tenseurs des contraintes et des déformation vérifient les propriétés de symétrie suivante : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$. Cette symétrie indique que le tenseur constitutive D_{ijkl} possède également des symétries mineures.

$D_{ijkl} = D_{jikl}$ et $D_{ijkl} = D_{ijlk}$. Tenant compte de ces propriété, le tenseur $[D]$ se réduit à 36 coefficients et que la relation entre les contraintes et les déformations peut être représentée par un système linéaire homogène de six équations, en utilisant la notation vectorielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1131} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2231} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3331} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1231} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2331} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3123} & D_{3131} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

De plus, en tenant compte des symétries majeures et mineures du tenseur $[D]$ $(D_{ijkl} = D_{ijlk} = D_{jikl} = D_{jikl})$, alors le milieu linéaire élastique est caractérisé (défini) par vingt et un (21) coefficients, appelé milieu élastique linéaire anisotrope.

D'autre part, si le matériau est isotrope, le tenseur constitutive $[D]$ est alors invariant par rotation et ne dépond que de deux coefficients $(E\ et\ \nu\ ou\ \lambda\ et\ G)$.

5.3. Loi de Hooke isotrope en axes principaux

5.3.1. Cas unidimensionnel

Il s'agit du cas d'une sollicitation en traction ou la compression simple suivant les axes principaux. Dans ce cas, la loi de Hooke stipule que :

$$\sigma = E\varepsilon \text{ ou } \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \tag{5.4}$$

Avec :
E est le module d'élasticité longitudinal ou appelé module de Young.
σ est la contrainte normale.
ε est la déformation longitudinale.

5.3.2. Cas plan de contraintes : plan : (1, 2**)**

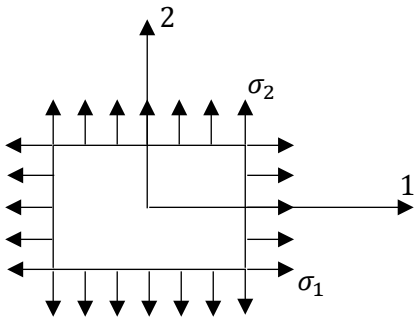


Figure 5.1. *Contraintes planes*

L'expérience montre que, sous l'action de la contrainte principale σ_1 (traction), l'élément s'allonge suivant la direction principale 1 et se raccourcie selon la direction principale 2. De manière analogue, l'application de la contrainte principale σ_2 (traction) produit un allongement suivant la direction principale 2 et se raccourcie selon la direction principale 1.

Par superposition des deux effets, les déformations selon les deux directions principales s'écrivent :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \tag{5.5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \tag{5.6}$$

Où ν est le coefficient de Poisson.

Inversement, les contraintes principales peuvent s'écrire comme suit :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \tag{5.7}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \tag{5.8}$$

Remarque :

L'expérience montre qu'il n'y a pas de variation angulaire, donc aucun glissement, ce qui traduit le caractère isotrope du matériau. De plus, les dilatations ε_1 et ε_2 ont les mêmes directions que les contraintes σ_1 et σ_2.

5.3.3. Cas tridimensionnel

Par un raisonnement analogue fondé sur la décomposition des actions et le principe de superpositions, on aboutit aux relations suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases} \tag{5.9}$$

Inversement, les contraintes s'expriment en fonction des déformations :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_1 + \nu(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] \\ \sigma_2 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_2 + \nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)] \\ \sigma_3 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_3 + \nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \end{cases} \tag{5.10}$$

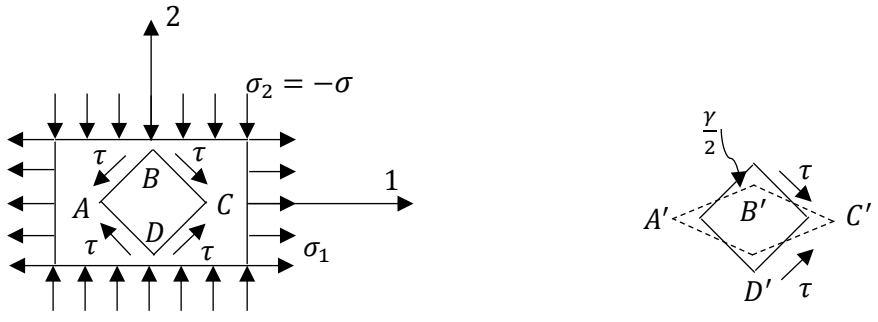
5.4. Etat de cisaillement Pur : Module de glissement

Considérons un état plan de contraintes correspondant à un cas particulier de cisaillement pur. Celui-ci peut s'exprimer, dans une première base, par la matrice des contraintes suivantes :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

Après rotation des axes de 45°, le même état de contrainte s'écrit :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$$



Avant déformation de l'élément $ABCD$ Déformée de l'élément $ABCD$

Figure 5.2. *Etat de cisaillement Pur*

A partir de la déformée de l'élément $ABCD$, on constate que :

- Les longueurs des côtés de l'élément restent inchangés : $AB = BC = CD = DA$, cela indique l'absence de la déformation normale, et par conséquent l'absence de la contraintes normales.
- La diagonale AC s'allonge tandis que la diagonale BD se raccourcit d'une même quantité (le matériau étant homogène). Ainsi seuls les angles droits de l'élément sont modifiés. Le cisaillement pur donc se traduit par une variation angulaire, c'est-à-dire par un glissement, sans changement de longueur des côtés.

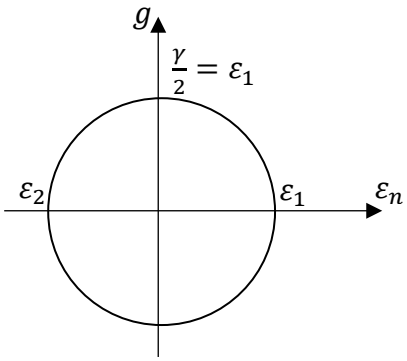


Figure 5.3. *Diagramme circulaire*

5.4.1. Relation entre cisaillement et module de glissement

D'après le diagramme circulaire des déformations, nous avons :

$\varepsilon_1 = \frac{\gamma}{2}$

Aussi, d'après la loi de Hooke en contraintes planes :

$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{E}(\sigma + \nu\sigma)$

Dans le cas de cisaillement pure, on obtient :

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{E}(\tau + \nu\tau) = \tau\frac{1+\nu}{E}$$

D'où :

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma$$

Posons :

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

On obtient alors la loi de cisaillement :

$\tau = G\gamma \; ou \; \gamma = \frac{1}{G}\tau$

Avec G est le module de cisaillement (ou module de glissement).

Remarque :

Les contraintes tangentielles produisent uniquement des déformations angulaires (glissements), sans variation de volume ni dilatation.

5.5. Loi de Hooke dans le cas d'un matériau élastique linéaire et isotrope

5.4.1. Cas de l'état plan de contraintes

L'état plan de contrainte correspond au situations dans lesquelles l'épaisseur de la structure est faible devant ses dimensions dans le plan. Ce cas se rencontre notamment dans les plaques minces, les tôles et les coques minces.

Dans ces conditions, les contraintes perpendiculaires au plan de la structure peuvent être considérées comme négligeable ($\sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13} \approx 0$).

La loi de comportement s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

Inversement :

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\end{Bmatrix} \tag{5.13}$$

Avec les relation complémentaires suivante :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \text{ et } \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0 \tag{5.14}$$

5.4.2. Cas de l'état plan de déformations

L'état plan de déformation apparait lorsque la structure est très longue dans une direction, de sorte que les déformations suivant cette direction peuvent être considérées comme négligeables ou nulle ($\varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13} \approx 0$). Ce type de situation se rencontre notamment dans les barrages, les tunnels et certaines structures géotechniques de grande longueur, pour lesquelles les variations mécaniques selon la direction longitudinale sont faibles.

Dans ces conditions, la loi de comportement s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\end{Bmatrix} \tag{5.15}$$

Tenant compte de la condition $\varepsilon_{33} = 0$, la relation (5.14) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix}1-\nu & -\nu & 0\\ -\nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\end{Bmatrix} \tag{5.16}$$

Inversement :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

Avec : $\varepsilon_{33} = 0$ cela implique l'existence d'une contrainte normale hors plan.

$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\ et\ \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0.$

5.4.3. Loi de Hooke en élasticité linéaire isotrope tridimensionnel

En élasticité linéaire, on suppose que les déformations sont faibles et que les contraintes sont proportionnelles aux déformations. Cette relation constitue la loi de Hooke, qui décrit le comportement mécanique des matériaux élastiques.

Dans le cas d'un matériau homogène, isotrope et linéaire, les propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions. Par conséquent, la relation entre contraintes et déformations peut être exprimée à l'aide des deux constantes indépendantes seulement : le module de Young E et le coefficient de Poisson ν (ou bien les constantes de Lamé $\lambda\ et\ G$).

De manière similaire au cas bidimensionnel (2D), on aboutit dans le cas général tridimensionnel (3D) les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ \gamma_{12} = \frac{1}{G}\tau_{12} \\ \gamma_{23} = \frac{1}{G}\tau_{23} \\ \gamma_{13} = \frac{1}{G}\tau_{13} \end{cases} \tag{5.18}$$

Ou bien, sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

Cette équation peut s'écrit couramment sous la forme suivante :

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$$

En tenant compte de la relation entre les paramètres élastique du matériau ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$), l'équation (5.19) peut s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{12}\\ \tau_{23}\\ \tau_{13}\end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

Ou bien sous la forme inverse :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda+2G & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \lambda+2G & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & \lambda+2G & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\end{Bmatrix} \tag{5.21}$$

Avec : $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ est la constante de Lamé

Sous forme indicielle les relations (5.20) et (5.21) s'écrivent respectivement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{pp}\delta_{ij}\right] \tag{5.22}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{pp}\delta_{ij} \tag{5.23}$$

Avec $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ pour les distorsions (i. e $i \neq j$).

Par introduction des invariants volumique (contrainte et déformation volumique) :

Posons : $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \theta$ et $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = e$

De la première équation de la physique, nous avons : $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})$

Alors : $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \nu\theta - \nu\sigma_{11}$

Donc :

$$\begin{cases}\sigma_{11} = \frac{1}{1+\nu}(E\varepsilon_{11} + \nu\theta)\\ \sigma_{22} = \frac{1}{1+\nu}(E\varepsilon_{22} + \nu\theta)\\ \sigma_{33} = \frac{1}{1+\nu}(E\varepsilon_{33} + \nu\theta)\end{cases} \tag{5.20}$$

On additionne les trois équations de (5.19) :

$$\theta = \frac{1}{1+\nu}(Ee + 3\nu\theta) \tag{5.21}$$

Isolement de θ :

En multipliant l'équation (5.20) par $(1+\nu)$:

$$\theta(1+\nu) = (Ee + 3\nu\theta)$$

Donc :

$$\theta = \frac{E}{1-2\nu} e \tag{5.22}$$

On remplace θ par sa valeur dans l'équation (5.19), on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{22} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e \\ \sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{33} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e \end{cases} \tag{5.23}$$

En introduisant les coefficients de Lamé :

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et par $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

On obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda e + 2G\varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = \lambda e + 2G\varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} = \lambda e + 2G\varepsilon_{33} \\ \tau_{12} = G\gamma_{12} \\ \tau_{23} = G\gamma_{23} \\ \tau_{13} = G\gamma_{13} \end{cases} \tag{5.24}$$

De plus, en sommant les contraintes normales :

$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\lambda e + 2Ge = (3\lambda + 2G)e = 3Ke$

Où :

$$K = \frac{3\lambda+2G}{3} \tag{5.25}$$

Le module K est appelé module d'expansion volumique (raideur volumique) qui caractérise la variation de volume du corps.

Plus K est élevé, plus le matériau est difficilement compressible, pour une pression donnée, la diminution de volume est d'autant plus faible.

En remplace $\lambda \; et \; G$, on obtient :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{5.26}$$

Le module de Young E et coefficient de Poisson ν sont liés aux coefficients de Lamé par :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \text{ et } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{5.27}$$

Conclusion :

- Dans le comportement élastique linéaire isotrope, les cisaillements et les déformations volumique (élongations ou contraction) sont entièrement découplés, c'est-à-dire, les contraintes tangentielles ne produisent que des variations angulaires, tandis que les contraintes normales sont responsables des variations de volume.

- Ce découplage n'existe pas dans les matériaux anisotropes (tels que les matériaux composites), où les effets peuvent êtres couplés selon les directions privilégiées du matériau.
- Le comportement mécanique d'un matériau isotrope est caractérisé que par deux paramètres scalaires : le module de Young E et le coefficient de Poisson ν ou les deux coefficients de Lamé λ et μ.
- Pour un matériau isotrope soumis à l'élasticité linéaire, le coefficient de Poisson vérifie : $0 < \nu \leq 0.5$, la limite $\nu \to 0.5$ correspond au cas d'un matériau incompressible.

En notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\theta\delta_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\theta\delta_{ij} \tag{5.28}$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda e\delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{1-2\nu}e\delta_{ij}) \tag{5.29}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{E}(1-2\nu) \text{ et } \sigma_{ii} = \frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_{ii} \tag{5.30}$$

5.5. Influence de la température : thermo-élasticité (dilatation thermique)

Sous l'effet d'une variation de la température, les éléments constitutifs d'un corps se dilatent. Soit un élément de volume dV, isolé et soumis uniquement à une variation uniforme de température : $\Delta T = T_1 - T_1$.

Il apparait une déformation thermique pure, sans contraintes mécaniques associées.

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \alpha\Delta T$ et $\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$

Ou α est le coefficient de dilatation thermique du matériau.

En notation tensorielle, on peut écrire :

$\varepsilon_{ij} = \alpha\Delta T\ \delta_{ij}$

Si l'élément est soumis simultanément à des contraintes extérieures mécaniques et à une variation de température, la déformation totale résulte de la superposition des déformation mécaniques et thermiques est donnée par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})] + \alpha\Delta T \\ \gamma_{12} = \frac{1}{G}\tau_{12} \\ \gamma_{23} = \frac{1}{G}\tau_{23} \\ \gamma_{13} = \frac{1}{G}\tau_{13} \end{cases} \tag{5.31}$$

5.6. Energie de déformation élastique: énergie potentielle élastique

Le travail effectué par des charges appliquées progressivement à un corps élastique est transformé, sous l'action des contraintes normales et tangentielles. Ce travail interne est appelé énergie de déformation élastique.

On définit la densité de l'énergie de déformation comme l'énergie interne emmagasinée dans le matériau par unité de volume. Elle représente la quantité d'énergie stockée localement en chaque point du solide du fait de sa déformation.

5.6.1. Densité d'énergie associée aux contraintes normales

Evaluons le travail des forces de surface appliquées aux faces du parallélépipède soumis à des contraintes normales (figure 5.4).

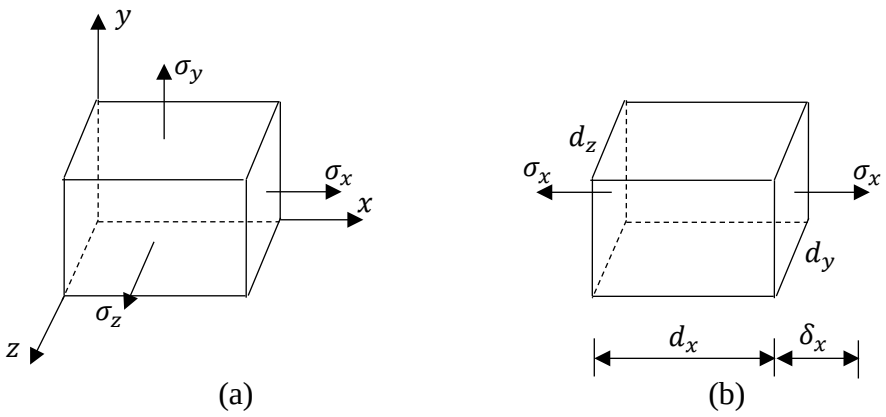


Figure 5.4. *Densité d'énergie pour contraintes normales*

Considérons, dans un premier temps, que seule la contrainte normale σ_x est non nulle ($\sigma_x \neq 0$). Dans le domaine élastique, lorsque la force appliquée graduellement sur la facette de normale $\vec{x}$, passe de zéro à la valeur $\sigma_x dydz$, le déplacement de cette facette varie proportionnellement à la contrainte et passe de zéro à valeur $\delta_x = \varepsilon_x dx$.

Le travail élémentaire associé à la direction $\vec{x}$ est alors :

$$dT_x = \frac{1}{2}\sigma_x dydz.\varepsilon_x dx = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dV$$

Où $dV = dxdydz$ est le volume de l'élément considéré.

En raisonnant de manière analogue dans les directions $\vec{y}$ et $\vec{z}$, on obtient :

$dT_y = \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y\, dV$ est $dT_z = \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z\, dV$.

L'énergie potentielle associée aux contraintes normales est :

$$dE_\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z\right) dV \tag{5.32}$$

La densité d'énergie est :

$$\frac{dE_\sigma}{dV} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z\right) \tag{5.33}$$

5.6.2. Densité d'énergie associée aux contraintes tangentielles

Considérons dans un premier temps, que seule contrainte de cisaillement $\tau_{xy} \neq 0$:

Dans le domaine élastique, lorsque la force appliquée sur la facette perpendiculaire à l'axe $\vec{x}$ passe de zéro à $\tau_{xy}dydz$. Le déplacement de cette facette évolue proportionnellement à la contrainte et passe de zéro à $\delta_y = \gamma_{xy}dx$.

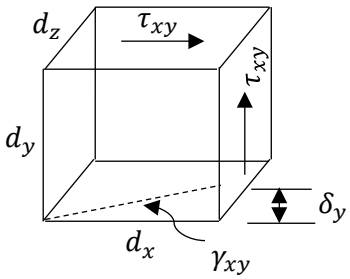


Figure 5.5. *Densité d'énergie pour contraintes tangentielles*

Le travail élémentaire correspondant est :

$$dT_{\tau_{xy}} = \frac{1}{2}\tau_{xy}dydz.\gamma_{xy}dx = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}dV$$

Où $dV = dxdydz$ est le volume de l'élément considéré.

En raisonnant de manière analogue pour les deux autres composantes de cisaillement, on obtient :

$dT_{\tau_{yz}} = \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz}dV$ et $dT_{\tau_{xz}} = \frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz}dV$

L'énergie de de déformation associée aux contraintes tangentielles est donc :

$$dE_\tau = \frac{1}{2}(\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz})dV \tag{5.34}$$

La densité d'énergie correspondant est :

$$\frac{dE_\tau}{dV} = \frac{1}{2}(\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) \tag{5.35}$$

5.6.3. Densité d'énergie associée à un état général de contraintes

Pour un matériau élastique linéaire, la densité d'énergie associée à un état général de contraintes est la somme des contributions normales et tangentielles :

$$E_0 = \frac{dE_\sigma}{dV} + \frac{dE_\tau}{dV} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right) \tag{5.36}$$

En appliquant la loi de Hooke, la densité de l'énergie s'écrit :

$$E_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right) \tag{5.37}$$

L'énergie totale de déformation emmagasinée dans un volume V est :

$$E_0 = \int_V E_0 \, dV \text{ en } (N.\frac{m}{m^3}) \text{ ou en } (\frac{J}{m^3}) \tag{5.38}$$

5.6.4. Application

Calculer l'énergie de déformation emmagasinée dans une barre de section transversale A, de longueur L et de module de Young E, soumise à son extrémité à une force axiale N.

Réponse

Si on suppose que la barre est rattachée à un repère $Oxyz$ avec l'axe de la barre est x, les contraintes dans la barre sont : $\sigma_x = \frac{N}{A}$ et $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Densité d'énergie de déformation (Equation 5.36) :

$E_0 = \frac{1}{2E}\sigma_x^2 = \frac{1}{2E}(\frac{N}{A})^2$

Energie emmagasinée dans la barre (Equation 5.37) :

$E_0 = \int_V E_0 \, dV = \frac{1}{2E}(\frac{N}{A})^2 dV = \frac{1}{2E}(\frac{N}{A})^2 AL$

D'où :

$E_0 = \frac{1}{2E}\frac{A}{L} N^2$

5.6.5. Décomposition de la densité de l'énergie de déformation

La densité de l'énergie de déformation d'un matériau élastique isotrope peut être décomposée en deux parties :

- Une énergie de variation de volume ;
- Une énergie de distorsion.

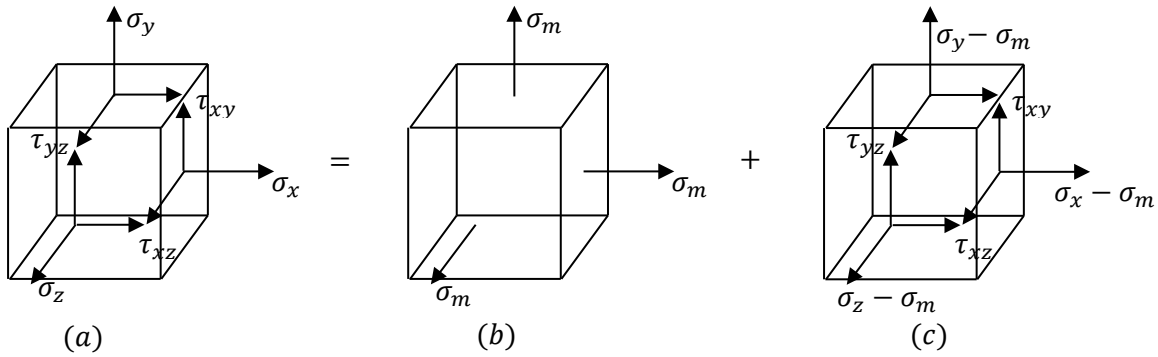


Figure 5.6. *Décomposition de l'énergie de déformation*

La variation relative de volume de l'élément élémentaire soumis à un état de contraintes (Figure 5.6.a) est :

$$\varepsilon_V = \frac{dV}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{5.39}$$

D'après la loi de Hooke :

$$e = \frac{1-2\nu}{E}\theta \tag{5.40}$$

Donc : $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{5.41}$$

Considérons l'état de contraintes sphérique (Figure 5.6.b), la variation de volume est donnée par :

$\varepsilon_V = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m$ avec $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

Donc :

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{5.42}$$

A partir des équation (5.40) et (5.41) qui sont identiques, on déduit que, dans l'état de contraintes (Figure 5.6.c), il ne se produit aucune variation de volume. Cet état de contrainte est dit déviateur. Ainsi, on définit l'énergie de déformation comme étant la somme des deux énergies : énergie de variation de volume et énergie de distorsion.

Energie de variation de volume :

$$(E_0)_V = \frac{1}{2}\sigma_m(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{6}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

Energie de distorsion :

$$\begin{aligned}(E_0)_V &= E_0 - (E_0)_V \\ &= \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right) \\ &\quad - \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_x\sigma_z\right)\end{aligned}$$

$$(E_0)_V = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)$$

5.7. Exercice d'application

Pour une barre de $d = 20mm$ de diamètre faisant partie d'une machine, il est nécessaire de maintenir la section transversale constante. Si la barre est soumise à une variation de température de 200°C, quel est l'effort de traction nécessaire pour maintenir la section transversale constante ?.

On donne : Le coefficient de dilatation thermique $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$°C, le coefficient de Poisson $\nu = 0.25$ et le module de Young $E = 200\ GPa$.

Réponse :

Supposons que la barre est rattachée à une repère $Oxyz$ avec l'axe de la barre est x.

Maintenir le diamètre de la barre constant, c'est imposer la condition :

$\varepsilon_y = 0\ oubien\ \varepsilon_z = 0$ (a)

A partir de l'équation (5.30) :

$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T$ (b)

La barre étant soumise à un effort de traction seul, alors :

$\sigma_x = \frac{N}{A}, \sigma_y = \sigma_z = 0$ (c)

Avec $A = \pi.d^2/4$ est la section de la barre.

Substituons ces contraintes dans l'expression (c) et tenons compte de la condition (a) on obtient:

$-\frac{\nu}{E}\frac{N}{A} + \alpha\Delta T = 0$

D'où :

$N = \frac{A.E.\alpha\Delta T}{\nu} = \frac{\pi.d^2.E.\alpha\Delta T}{4\nu}$

Application numérique :

$N = \frac{\pi\times(20)^2\times200\times10^3\times11{,}7\times10^{-6}\times200}{4\times0{,}25} = 588106{,}14N = 588{,}1\ kN$

Exercices

Exercice 1 :

Soit un point d'un corps en acier de modules de déformation $E = 200GPa\ et\ G = 80GPa$.

1. Déterminer l'état de déformation en ce point, si l'état de contrainte est donné par le tenseur :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 20 & -4 & 5 \\ -4 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} MPa$$

2. Déterminer l'état de contrainte auquel est soumis le point si l'état de déformation est donné par le tenseur : $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} . 10^{-4}$

Exercice 2 :

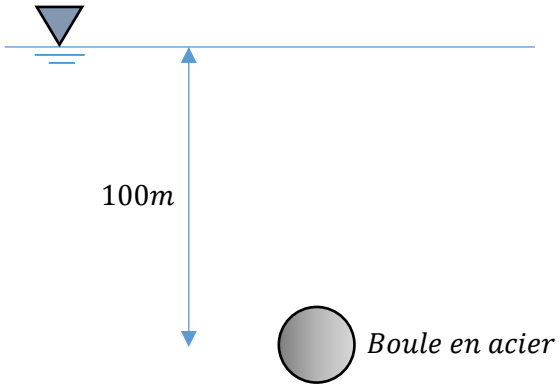
Une barre de diamètre initial $60mm$ est soumise à une compression axiale par une force de $200kN$. Déterminer le diamètre de la barre après déformation.

On donne $E = 85GPa\ et\ \nu = 0,3$.

Exercice 3 :

Une boule en acier immergée dans l'eau à une profondeur de $100m$, le diamètre de cette boule $d = 20cm$, le module d'élasticité $E = 2 \times 10^4\ KN/cm^2$, le coefficient de poisson $\nu = 0.25$ et la masse volumique de l'acier $\rho = 7800\ kg/m^3$.

Calculer la variation de volume de la boule.



Exercice 4 :

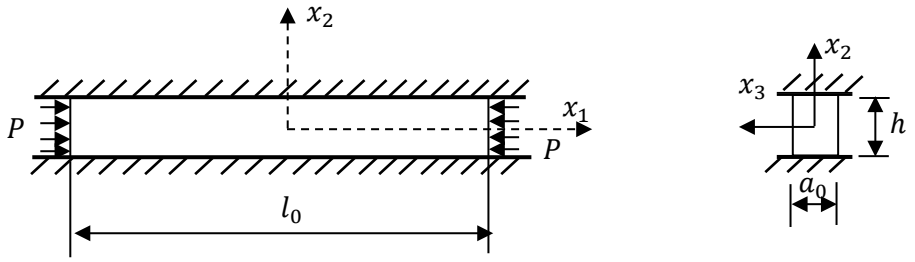
Un cas de déformations planes se définit comme un cas où le déplacement suivant une direction est empêché, les déformations ne peuvent se produire ainsi que dans le plan orthogonal. Si z est la direction suivant laquelle le déplacement est bloqué on peut écrire : $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Dans ce cas les relations $\sigma - \varepsilon$ s'écrivent sous la forme matricielle : $\begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $[C]$.
2. Que serait la matrice $[C]$ s'il s'agit d'un état de contraintes plan c'est-à-dire $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Exercice 5 :

Une plaque de hauteur h et de faible épaisseur $a_0 = 10\ cm$ devant une longueur $l_0 = 243\ cm$, est confinée entre deux solides infiniment rigides et soumise à une pression uniforme P tel que montré sur la figure suivante.

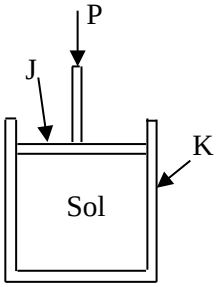


1. Quelles sont les composantes nulles des tenseurs des contraintes et des déformations.
2. Si on suppose que le matériau de la plaque est élastique et isotrope avec un module d'élasticité E et un coefficient de Poisson ν, déterminer en fonction de P, E et ν les composantes non nulles des deux tenseurs.
3. Si $E = 150\ Mpa$ et $\nu = 0{,}36$; calculer la pression nécessaire pour réduire la longueur de la plaque à $l = 200\ cm$.

Exercice 6 :

Pour mesurer le tassement du sol sous des fondations de grande longueur ($\geq\ 100\ m$), on place un échantillon (sol) dans une enceinte infiniment rigide (K) de forme cylindrique.
A l'aide d'un piston J, on exerce une force P provoquant un enfoncement (déplacement) ε_{33} du piston.

Calculer la compressibilité œdométrique (p/ε_{33}),
si le sol à pour caractéristiques : $E = 20\ N/mm^2\ et\ \nu = 0{,}3$.



Chapitre 6. Formulation classique des problèmes en élasticité linéaire

6.1. Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter les méthodes de formulation et éventuellement les méthodes de résolution de quelques problèmes de l'élasticité linéaire. La formulation d'un problème consiste à établir les équations mathématiques permettant d'écrire le comportement mécanique d'un corps solide déformable soumis à des charges extérieures.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, les grandeurs inconnues sont :

- Les déplacements $u_i(x_1, x_2, x_3)$,
- Les déplacements $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$,
- Les déplacements $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$,

Ces champs dépendent des coordonnées spatiales et décrivent respectivement le mouvement des points du solide, les efforts internes qui s'y développent et les variations géométriques résultant de la déformation. La formulation complète d'un problème d'élasticité repose sur l'établissement des équations d'équilibres, des relations cinématiques entre déplacements et déformations ainsi que des lois de comportement reliant contraintes et déformation, le tout complété par les conditions aux limites appropriées.

6.2. Bilan des équations fondamentales et des grandeurs inconnues

Dans le cas général d'un état tridimensionnel, les inconnus du problème d'élasticité linéaire sont :

- Les six (06) composantes du tenseur de contrainte σ_{ij};
- Les six (06) composantes du tenseur de déformations ε_{ij};
- Les trois (03) composantes du vecteur déplacement u_i (et éventuellement les trois rotations).

Soit un problème qui comportent quinze (15) inconnus (sans tenir compte les rotations).

Concernant les équations vérifiées dans un volume V, nous avons :

- Trois (03) équations d'équilibre $\sigma_{ij} + f_i = 0$;
- Six (06) équations de compatibilités géométriques déformations – déplacement donnée par $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}, u_{j,i})$;
- Six (06) équations de comportement contraintes – déformation et éventuellement trois équations des composantes du rotationnel de déplacement.
  $\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{pp}\delta_{ij}$ ou inversement $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{pp}\delta_{ij}\right]$

6.3. Conditions aux limites

L'intégration des équations différentielles gouvernant le problème d'élasticité conduit à des solutions sous forme de fonctions contenant des constantes d'intégration. La détermination de ces constantes nécessite l'introduction des conditions aux limites qui traduisent les contraintes et les déplacements imposés sur la frontière du domaine étudié.

On distingue deux types de conditions aux limites :

- Conditions de type contrainte :
  Sur une frontière ou une portion de frontière A_t, les vecteurs contraintes t_i sont imposés, il est ainsi possible d'écrire des équations de la forme :

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \tag{6.1}$$

Où

n_j désigne les composantes du vecteur normal unitaire à la surface considérée ;

t_i le vecteur de la traction appliqué sur cette frontière.

- Conditions de type déplacement :
  Sur une frontière ou une portion de frontière A_{ii}, les déplacements sont imposés. Ainsi, en tout point de cette frontière on peut écrire :

$$u_i = \overline{u}_i \tag{6.2}$$

Avec $\overline{u}_i$ étant le déplacement donné.

6.3.1. Application

Considérons la barre représentée sur la figure suivante, encastrée d'un bout et soumise de l'autre bout à une contrainte de traction σ_0, la surface latérale de barre est libre.

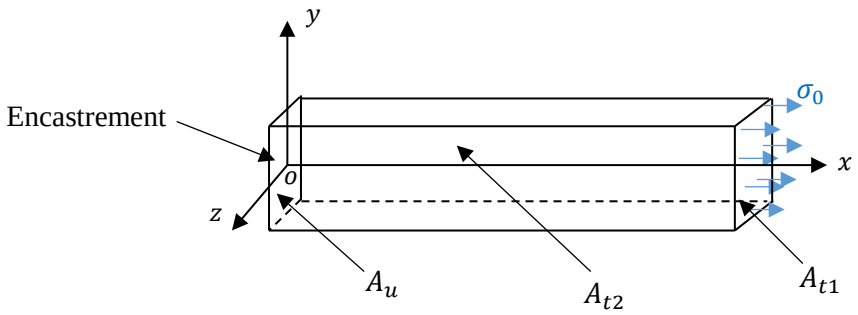


Figure 6.1. *Conditions aux limites*

Les conditions aux frontières du problème s'écrivent :

- Sur A_{t1} : $t_x = \sigma_0 \; et \; t_y = t_z = 0$
- Sur A_{t2} : $t_x = t_y = t_z = 0$
- Sur A_u : $t_x = t_y = t_z = 0$

6.4. Principe de Saint-Venant

Si une distribution de forces agissante sur une portion de la surface d'un corps est substituée par une autre distribution de forces agissante sur la même portion de surface, alors les effets des deux distributions sur les parties du corps suffisamment éloignées de la région d'application des forces, sont les mêmes à condition que les deux distributions de forces soient statiquement équivalentes (ont les mêmes résultantes et les mêmes moments résultants).

6.4. Principe d'unicité

Dans l'étude des problèmes d'élasticité linéaire, une question fondamentale consiste à savoir si les équations gouvernant le comportement d'un solide déformable possèdent une seule solution ou plusieurs solutions possibles.

On admet sans démonstration le postulat due à Kirchhoff (1859) selon lequel : "la solution d'un problème statique d'élasticité est unique, à condition que les propriétés du matériau, les forces appliquées et les conditions aux limites soient complètement définies".

6.4. Approches de formulation des problèmes d'élasticité

En fonction des inconnus en termes desquels les équations du problème sont écrites, il existe deux approches différentes, notamment l'approche déplacements conduisant aux **équations de Lamé** et l'approche contraintes conduisant aux **équation de Beltrami**.

6.4.1. Approche en déplacement ou solution de Lamé

Cette approche consiste à choisir le champ de déplacement comme inconnu principale. Ceci revient à éliminer les inconnus de contraintes et de déformations en partant des équations d'équilibre et des lois de comportement. Soit :

La première équation d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \tag{6.3}$$

La première équation de loi de comportement :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \tag{6.4}$$

Réciproquement :

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right] = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right] ; e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \tag{6.5}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x_1}\right]$$

D'autre part :

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G}\sigma_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12} \tag{6.6}$$

$$\Longrightarrow \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

De même :

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right) \tag{6.7}$$

Alors, l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left(2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x_1}\right) + \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right) + f_1 = 0$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) + \frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right] + f_1 = 0$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\nabla^2 u_1 + \frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(e)\right] + f_1 = 0 \Longrightarrow G\left[\nabla^2 u_1 + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x_1}\right] + f_1 = 0$$

En opérant de la même façon avec les deux autres équations d'équilibre, on aboutit aux trois équations différentielles appelées équations de **Lamé** :

$$\begin{cases} G\left[\nabla^2 u_1 + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x_1}\right] + f_1 = 0 \quad (1) \\ G\left[\nabla^2 u_2 + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x_2}\right] + f_2 = 0 \quad (2) \\ G\left[\nabla^2 u_3 + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x_3}\right] + f_3 = 0 \quad (3) \end{cases} \tag{6.8}$$

Prenons : $\frac{\partial (1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (3)}{\partial x_1}$

$$\Longrightarrow G\left[\nabla^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 e}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial x_3^2}\right)\right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\Longrightarrow G\left[\nabla^2 e + \frac{1}{1-2\nu}\nabla^2 e\right] + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0$$

Si f_1, f_2, f_3 sont nulles ou constantes, ce qui est souvent le cas des problèmes pratiques, alors il faut que : $\nabla^2 e = 0 \Longrightarrow e$ est harmonique.

Prenons (1):

$\nabla^2 \Longrightarrow \nabla^2\nabla^2 u_1 + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 e = 0 \Longrightarrow u_1$ est bih $-$ armonique (de même pour u_2 et u_3).

Or $\theta = \frac{E}{1-2\nu}e \rightarrow \nabla^2\theta = \frac{E}{1-2\nu}\nabla^2 e \rightarrow \theta$ est harmonique

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \text{ Equation de Maurice-Levy} \tag{6.9}$$

6.4.2. Approche en contraintes ou solution de Beltrami

Cette approche consiste à choisir le champ de contraintes comme inconnu principale. Ceci revient à éliminer la déformation et le déplacement des équations en partant des équations d'équilibre et des conditions de compatibilités. Soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \quad (3) \end{cases} \tag{6.10}$$

Prenons : $\frac{\partial(1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(2)}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-f_3 - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

D'autre part, la première équation de compatibilité est : $\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}$

Avec : $\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{11} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{11} - \nu\theta]$

$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu\theta]$ et $\gamma_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}$

Nous remplaçons dans l'équation : $\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2}\right) - \frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}\right)$

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}\right)$$

Par comparaison des deux valeurs :

$\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$

$\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2}\right) - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0$;

avec $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2}$ L'équation s'écrit :

$\nabla^2 \sigma_{11} + \nabla^2 \sigma_{22} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\nabla^2 \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0$

$\nabla^2 \sigma_{11} + \nabla^2 \sigma_{22} + \nabla^2 \sigma_{33} - \nabla^2 \sigma_{33} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\nabla^2 \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0$

$\nabla^2 \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\nabla^2 \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}\right) - \nabla^2 \sigma_{33} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0$

$\frac{1}{1+\nu}\left(\nabla^2 \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}\right) - \nabla^2 \sigma_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ (4)

On exploite les deux autres équations d'équilibre ; on trouve :

$\frac{1}{1+\nu}\left(\nabla^2 \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2}\right) - \nabla^2 \sigma_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ (5)

$$\frac{1}{1+\nu}\left(\nabla^2\theta - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}\right) - \nabla^2\sigma_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \qquad (6)$$

$$(4) + (5) + (6) \rightarrow \nabla^2\theta = -\frac{1-\nu}{1+\nu} div\vec{F} \qquad (7)$$

On remplace (7) dans (4) on trouve :

$$\frac{1}{1+\nu}\left(-\frac{1-\nu}{1+\nu} div\vec{F} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2}\right) - \nabla^2\sigma_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \rightarrow$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{33} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} = -(1+\nu)\left[2\frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\nu}{1-\nu} div\vec{F}\right] \qquad (8)$$

On exploite les autres équations de compatibilité, on obtient d'autres équations différentielles :

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{11} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} = -(1+\nu)\left[2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\nu}{1-\nu} div\vec{F}\right] \qquad (9)$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{22} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} = -(1+\nu)\left[2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\nu}{1-\nu} div\vec{F}\right] \qquad (10)$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{12} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_2} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) \qquad (11)$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{23} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3\partial x_2} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \qquad (12)$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_{13} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_3} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \qquad (13)$$

Ce sont les six équations de **Beltrami** sous forme explicite et qui exprime la compatibilité des contraintes. Si les forces de volume sont nulles ou constantes (cas pratique), ces équations seront :

$$\begin{cases} (1+\nu)\nabla^2\sigma_{11} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_{22} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_{33} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_{12} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_2} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_{23} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_3\partial x_2} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_{13} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1\partial x_3} = 0 \end{cases} \qquad (6.11)$$

Sous écriture indicielle :

$$(1+\nu)\sigma_{ij,kk} + \sigma_{mm,ij} = 0 \qquad (6.12)$$

Références bibliographiques

1. Coirier, J., Nadot-Martin, C., Mécanique des milieux continus - 4e édition: Cours et exercices corrigés, Edition Dunod, 2013.
2. Debard, Y., Élasticité, Institut Universitaire de Technologie du Mans, Département Génie Mécanique et Productique, 2006/2011.
3. Elasticity,Theory, Applications and Numerics, Martin H. Sadd, 2005, Elsevier Inc.
4. Frey, F., Analyse des structures et milieux continus – Mécanique des solides-, Presses polytechnique et universitaire Romandes, Lausanne 1980.
5. Frey, F., Jirousek, J., Analyse des structures et milieux continus – Méthode des éléments finis-, Presses polytechnique et universitaire Romandes, Lausanne 2001.
6. Germain, P., Mécanique des milieux continus, , Editions Masson, Paris 1983.
7. Segir, A., Cours de mécanique des milieux continus (MMC), Rappels de mathématiques, université A. Mira de BEJAIA, 2014/2015.
8. Timoshenko, S. P, Goodier J.M., Théorie de l'élasticité, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1961.
9. Timoshenko, S. P., Résistance des matériaux, tomes I et II. Dunod, 1968.
10. Timoshenko, S. P, Woinowsky-Kreiger, S. Theory of Plates and Shells. McGraw–Hill, 1964.