الجمـهوريـة الجزائريـــة الديـمقراطـية الشـعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العـالي و البـحث العـلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique




جـــامعة محـمد الصديق بن يـحي– جيـجل
كـــلـيـــة العـلـــوم و التـــكـنـولـوجـيـا
قســـــم الـهندســـــة الميكـــانـكيـــة

# MÉCANIQUE DES FLUIDES APPROFONDIE

Support de Cours

**1ère Année Master Génie Mécanique**

Option : Énergétique

Préparé par
Dr. Aïda LAISSAOUI

**Année universitaire : 2025 / 2026**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

**Au Nom d'Allah, Le Clément et Le Miséricordieux**

# AVANT-PROPOS

Le présent polycopié résume les cours de mécanique des fluides destinés aux étudiants de 1ère année Master génie mécanique option énergétique. De plus, touche à d'autres spécialités comme l'hydraulique, le génie civil, l'aéronautique, le génie climatique. Son contenu est conforme au programme ministériel de la mécanique des fluides approfondie. Il comporte cinq chapitres traitant les équations de transport, fluide parfait et ses applications, dynamique des fluides, théorie de la couches limite, et écoulements turbulents.

Ces cours consistent en une explication structurée des développements présentés lors du cours oral. L'ensemble des développements réalisés lors des séances est repris dans ces pages avec des explications complémentaires permettant une bonne assimilation de la matière. Malgré tout, cet ensemble ne constitue pas une approche exhaustive de la mécanique des fluides approfondie. L'étudiant pourrait, le cas échéant, recourir à de la littérature plus spécialisée pour les explications supplémentaires qu'il souhaiterait aborder.

D'ailleurs, il existe des références pédagogiques intéressantes dans le domaine de la mécanique des fluides où les étudiants peuvent approfondir les connaissances développées dans les cours du présent polycopié. Ces références sont citées dans la bibliographie.

J'espère que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants et suscitera de l'intérêt chez nos collègues enseignants.

Aïda LAISSAOUI
Jijel, le 24 Juin 2026

# TABLE DES MATIERES

**Chapitre I : Les équations de transport : de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie**

I. 1. Introduction ...……...01

I. 2. Description du mouvement de fluide ……..……01

I. 2. 1. Approche Lagrangienne.……..……...01

I. 2. 2. Approche Eulérienne…….....……...01

I. 3. Dérivée particulaire…… ……...01

I. 3. 1. Cas d'une fonction scalaire.…..…….....01

I. 3. 2. Cas d'une intégrale de volume : Théorème de transport.…….....02

I. 4. Mécanisme de transport convectif et diffusif ..…….03

I. 4. 1. Le transport convectif de $\phi$.…..…….....03

I. 4. 2. Le transport diffusif de $\phi$….……...……...…….....03

I. 5. Equation générale de transport …...……..……..……03

I. 6. Equation de continuité…….. ……..……06

I. 7. Les équations de quantité de mouvement ……..……..……...06

I. 8. Tenseur déviateur de contraintes……. ……..……..……...09

I. 9. Tenseur des taux de déformations……. ……..……..…….....09

I. 9. 1. Les éléments diagonaux du tenseur des taux de déformations.……....10

I. 9. 2. Les éléments non-diagonaux du tenseur des taux de déformations.……....11

I. 10. Tenseur déviateur de contrainte en fonction des taux de déformation……..14

I. 11. Equation vectorielle de Navier-Stocks …….....15

I. 12. Equation de l'énergie …….....16

**Chapitre II : Fluide parfait et ses applications**

II. 1. Introduction ...……19

II. 2. Relation de Bernoulli pour les fluides parfaits …..…….....19

II. 2. 1. Formulation locale pour un fluide incompressible.……..…….....19

II. 2. 2. Ecoulements irrotationnels des fluides parfaits incompressible ….……...20

II. 3. Théorème d'Euler …….…….....21

II. 4. Ecoulements potentiels …….…… ……27

II. 4. 1. Circulation du vecteur de vitesse le long d'une courbe ……...…….....27

II. 4. 2. Potentiel des vitesses...…….....…..…….....27

II. 4. 3. Débit massique et débit volumique.……...……28

II. 4. 4. Fonction de courant.… ……..…....28

II. 4. 5. Lignes de courant et équipotentielles ……...……..…....29

II. 4. 6. Ecoulements de base ……...……...…....30

a. Ecoulement uniforme……...……...…30
b. Source/puits à l'origine……...……...31
c. Vortex simple……...……...33

II. 4. 7. Existence d'un écoulement irrotationnel et incompressible……....34

II. 4. 8. Principe de superposition…….…..…..……35

II. 4. 9. Ecoulements composés..…….…..……..…35

a. Doublet et dipôle……...……...……...35
b. Ecoulement autour d'un corps fictif immobile "Solide de Rankine"……..39
c. Ecoulement autour d'un cylindre sans circulation…….41
d. Ecoulement autour d'un cylindre en rotation "Effet de Magnus"……...44

**Chapitre III : Dynamique des fluides réels**

III. 1. Introduction ...…… ……...……...48

III. 2. Ecoulements parallèles ou unidirectionnels……...……...48

III. 3. Ecoulement entre deux plaques parallèles …….……...……...48

III. 3. 1. Profil de vitesse…….…….....49

III. 3. 2. Contraintes visqueuses...…….....50

III. 3. 3. Débit volumique et vitesse moyenne.…….....51

III. 4. Ecoulement de Poiseuille cylindrique….. …….……...……...51

III. 4. 1. Profil de vitesse…….…….....52

III. 4. 2. Contraintes visqueuses...…….....53

III. 4. 3. Débit volumique loi de Hagen-Poiseuille.…….…….....54

III. 5. Ecoulement de Poiseuille annulaire...…... …….……...……...54

III. 5. 1. Profil de vitesse…….…….....55

III. 5. 2. Contraintes visqueuses...…….....55
III. 5. 3. Débit volumique…. ……...…….....56
III. 6. Ecoulement de couette cylindrique...….... ……..……...56
III. 6. 1. Profil de vitesse…….…….....56
III. 6. 2. Contraintes visqueuses...…….....58
III. 6. 3. Débit volumique ……..…….…….....58
III. 7. Ecoulement à faible nombre de Reynolds...….... ……..……..…….59
III. 7. 1. Premier problème de Stocks (Problème de Rayleigh) …….……59
III. 7. 2. Deuxième problème de Stocks…….……...……...…..…60
III. 8. Lubrification hydrodynamique…….....….... ……..……...…...62
III. 8. 1. Modèle de lubrification……... ……..……63
III. 8. 2. Profil de vitesse…….…….....66
III. 8. 3. Débit volumique et pression…..…….....66
**Chapitre VI : Théorie de la couche limite**
VI. 1. Introduction...…….……..68
VI. 2. Notion de la couche limite…….……..68
VI. 3. Caractéristiques de la couche limite ….……...…69
VI. 4. Grandeurs utiles……...…..…….....70
VI. 4. 1. Epaisseur de la couche limite $\delta$..……..70
VI. 4. 2. Epaisseur de déplacement $\delta^*$..……... ……....70
VI. 4. 2. Epaisseur de quantité de mouvement $\theta$..……... ……..71
VI. 5. Les équations de la couche limite "approximation de Prandtl"…….....71
VI. 6. Couche limite sur une plaque plane "solution de Blasius"……..75
VI. 6. 1. Résolution……. …….…….....75
VI. 6. 2. Force de traînée…….. ……...……...….....78
VI. 6. 3. Coefficient de traînée local... ……..…….....78
VI. 6. 4. Coefficient de traînée global…….…….....78
VI. 7. Solution approchée de Von Karman ……...……..……...79

**Chapitre V : Ecoulement turbulents**


V. 1. Introduction...……...84

V. 2. Nombre de Reynolds…….……84

V. 3. Structures tourbillonnaires ….……..……....85

V. 3. 1. Echelles caractéristiques…….……...85

V. 3. 2. Echelles de turbulence.....…….... …….....85

V. 3. 3. Cascade deRichardson…….....…….... ……..86

V. 3. 4. Théorie de Kolmogorov……..…….....…….... ……..86

a. Isotropie des échelles……..…….....…….... ……..86
b. Similitude locale……..…….....…….... ……86

V. 4. Champ moyen et fluctuation …….....88

V. 5. Equations de Reynolds …….....88

V. 5. 1. Equations de l'écoulement moyennées « RANS » …….....88

V. 5. 2. Equations de l'écoulement fluctuant ……..….....90

V. 6. Modèles de viscosité turbulente …….....92

V. 6. 1. Modèle de Boussinesq……..…….....92

V. 6. 2. Modèle de Prandtl : longueur de mélange …….....93

V. 7. Modèles de turbulence à deux équations ……...……..…..……...94

V. 7. 1. Modèle $(k - \epsilon)$ …….....94

V. 7. 2. Modèle $(k - \omega)$……..…….....94

**Références Bibliographiques**……..……..…….…….……....96

# CHAPITRE I.

# Equation de transport : de la masse, de quantité de mouvemente et de l'énergie

# I. 1. Introduction

Dans un écoulement, des propriétés caractérisant le fluide en mouvement tel que la quantité de mouvement et l'énergie interne peuvent être transporté, produite ou détruite en différents point du système d'étude.

Dans ce chapitre, une équation différentielle de transport d'une variable dépendante $\phi$ dans l'écoulement sera établit à partir d'un bilan local par rapport à un volume infinitésimal fixe dans l'espaces Eulérien. De cette équation aussi appelée de convection diffusion généralisé, les équations de continuité, de Navier-Stocks et de l'énergie seront démontrées.

# I. 2. Description du mouvement de fluide

En mécanique des fluides, pour décrire le mouvement d'un milieu continu (liquide ou gaz), on utilise deux approches conceptuelles différentes : l'approche lagrangienne et l'approche eulérienne.

## I. 2. 1. Approche lagrangienne

Il s'agit d'étudier un élément de volume infinitésimal du fluide (matériel) en suivant son mouvement au cours du temps par rapport à un référentiel ($R$). Les coordonnées de ce volume à l'instant $t$=0, par rapport aux trois axes cartésiens du référentiel ($R$), $x_0$, $y_0$, $z_0$ sont prise comme paramètres. Ainsi le mouvement du volume matériel est déterminé par $x$, $y$, $z$ en fonction des coordonnées indépendantes $x_0$, $y_0$, $z_0$ et $t$.

## I. 2. 2. Approche Eulérienne

Cette description consiste à déterminer, à des positions $M(x,y,z)$ fixes de l'espace ou à des volumes infinitésimaux fixes, l'évolution temporelle d'un ensemble de vecteurs de vitesse $\vec{v}(x,y,z,t)$ associés, à l'instant $t$, à chaque particule fluide de position $\overrightarrow{OM}$ ou occupant le volume infinitésimal fictif $\boldsymbol{dV}$.

# I. 3. Dérivée particulaire

La dérivée particulaire ou matérielle d'une grandeur physique exprime sa variation lorsqu'on suit une particule fluide dans son mouvement. En description lagrangienne, cette grandeur liée à la particule fluide (grandeur intensive) ou à un élément de volume du fluide (grandeur extensive) dépendent de l'écoulement. Cependant, en description eulérienne, cette grandeur, définie en tant qu'une fonction locale (grandeur intensive) ou intégrale sur un volume de contrôle fixe (grandeur extensive), est indépendante de l'écoulement.

## I. 3. 1. Cas d'une fonction scalaire

La dérivée particulaire $\frac{\boldsymbol{Df}}{\boldsymbol{Dt}}$ d'une grandeur locale intensive $f$ indique sa variation comme aperçue par un observateur qui se déplace avec l'écoulement. Comme l'observateur reste sur un point fixe en description eulérienne, cette variation peut être décomposée en deux types de changements: $\boldsymbol{\partial f/\partial t}$, causée par la variation temporelle de $f$ en ce point fixe et, la dérivée convective $(\vec{\boldsymbol{V}}.\vec{\boldsymbol{\nabla}})\boldsymbol{f}$, due au déplacement de l'observateur avec l'écoulement.

$$\frac{Df(x_i,t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})f \qquad (I.1)$$

## I. 3. 2. Cas d'une intégrale de volume : Théorème de transport

Soit un fluide occupant à l'instant $t$ un domaine fini $D$ de volume $\boldsymbol{V}$ limité par une surface $S$. Une grandeur extensive $I$ calculée sur ce domaine est exprimée par l'intégrale de volume

$$I = \iiint_{\boldsymbol{V}} G(x_i,t)\, d\boldsymbol{V} \qquad (I.2)$$

où $G(x_i,t)$ est une grandeur liée à l'unité de volume du fluide et fonction du temps et de la position $x_i$ de la particule fluide.

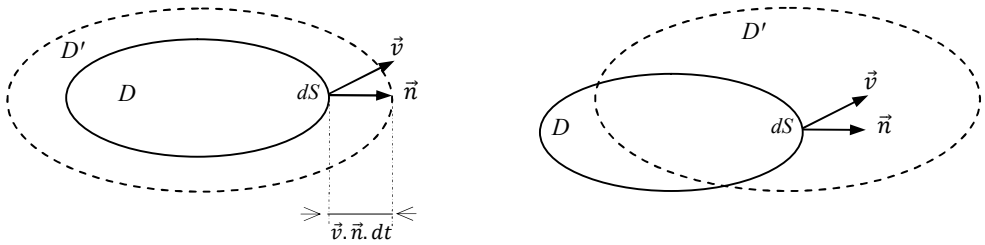



**Figure I.1** : Variation d'une grandeur extensive avec le temps

La dérivée particulaire de l'intégrale $I$ est la variation élémentaire de $I$ en suivant le fluide dans son mouvement entre $D$ et $D'$ (figure I.1), lorsque le temps s'accroît de $dt$. Elle est composée de deux termes :

- La variation $dI_1$ (destruction ou création de $G$) locale qui est restée fixe c'est-à-dire commune aux deux domaines $D$ et $D'$, représentée par

$$dI_1 = \iiint_{\boldsymbol{V}} \frac{\partial G(x_i,t)}{\partial \mathrm{t}}\, dt\, d\boldsymbol{V} \qquad (I.3)$$

- Une variation $dI_2$ due à l'échange convectif de $I$ avec le milieu extérieur à travers la surface $S$. Le volume $\boldsymbol{V}$ du fluide transportant cette quantité de $I$ (augmentation ou diminution) au cours de la transformation de $D$ en $D'$ est

$$d\boldsymbol{V} = \iint_{\boldsymbol{S}} (\vec{V}.\vec{n})dt\, dS \qquad (I.4)$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale en $S$ orienté vers l'extérieur de $D$.
Ce changement de volume provoque une évolution de grandeur $I$ égale à

$$dI_2 = \iint_{\boldsymbol{S}} G(x_i,t)(\vec{V}.\vec{n})dt\, dS \qquad (I.5)$$

Par conséquent, la dérivée particulaire de l'intégrale $I$ est définie par

$$\frac{DI}{Dt} = \underbrace{\iiint_{\boldsymbol{V}} \frac{\partial G(x_i,t)}{\partial \mathrm{t}}\, d\boldsymbol{V}}_{\textbf{dérivée locale}} + \underbrace{\iint_{\boldsymbol{S}} G(x_i,t)\,(\vec{V}.\vec{n})dS}_{\textbf{dérivée convective}} \qquad (I.6)$$

## I. 4. Mécanisme de transport convectif et diffusif

La variable dépendante ϕ est une propriété extensive caractérisant le fluide qui peut être transportée par le mouvement global du fluide (effet convectif) ou par le mécanisme moléculaire (effet diffusif).

### I. 4. 1. Le transport convectif de ϕ

Ce mécanisme de transport est réalisé par le courant du fluide en écoulement déplaçant la variable dépendante étudiée d'un point à un autre. Ainsi, la quantité de ϕ, transportée par convection par unité de temps, traversant un élément de surface dS par une vitesse de composante normale $v_n$ est le flux défini par

$$\rho v_n \phi dS \qquad (I.7)$$

### I. 4. 2. Le transport diffusif de ϕ

Ce type de transport de la variable dépendante ϕ se fait par l'interaction des molécules en agitation permettant ainsi sa diffusion au sein du milieu fluide. La quantité de ϕ traversant l'élément de surface dS par diffusion est

$$-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \qquad (I.8)$$

où $\Gamma_\phi$ est la diffusivité associée à ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ est son gradient par rapport à la normale à $dS$.

## I. 5. Equation générale de transport

Soit un fluide en mouvement non-stationnaire, par rapport à un repère (R), dans lequel la variable dépendante ϕ peut être simultanément produite par quelques mécanismes, détruite par d'autre et/ou transportée par convection et diffusion. Le bilan de ϕ par rapport à un volume $dV = dxdydz$ fixe dans l'espace est formulé comme suit

Le taux d'accumulation de ϕ à l'intérieur du volume $dV$ =
les flux convectif et diffusif entrant par les faces (1), (3) et (5)
- les flux convectif et diffusif sortant par les faces (2), (4) et (6)
+les taux de production de ϕ - les taux de destruction de ϕ.

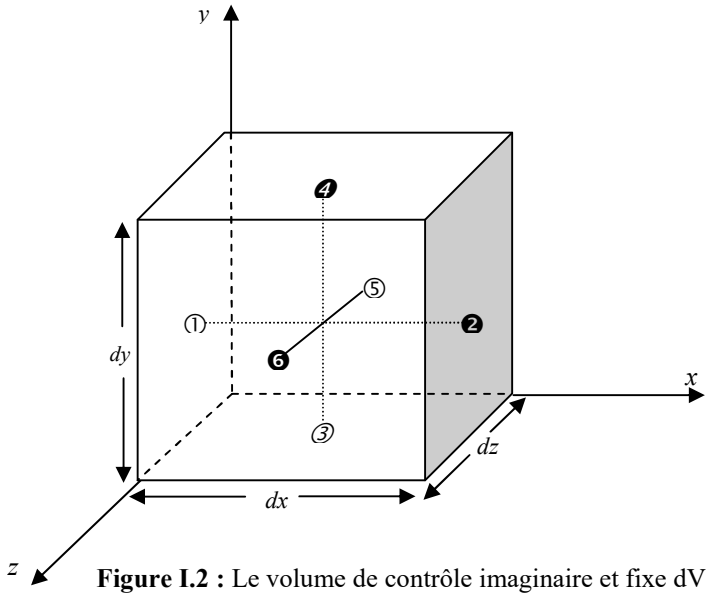



**Figure I.2 :** Le volume de contrôle imaginaire et fixe dV

Déterminons l'expression de chacun des termes de l'équation du bilan de la variable dépendante $\phi$ :

***Le taux d'accumulation de $\phi$***

C'est la variation de la quantité de la variable dépendante $\phi$ dans le volume *dV* entre les instants t et t+δt par unité de temps.

La quantité de la variable ϕ à l'instant t est : $\phi\ dm$

La quantité de la variable ϕ à l'instant t est : $\phi\ dm + \frac{\partial(\phi\ dm)}{\partial t}\delta t$

où *dm* est la masse du fluide dans le volume *dV*. Ainsi le taux d'accumulation est

$$\frac{\phi\ dm + \frac{\partial(\phi\ dm)}{\partial t}\delta t - \phi\ dm}{\delta t} = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}dxdydz \qquad \text{(I. 9)}$$

*dx, dy* et *dz* sont des variables indépendantes du temps (volume fixe).

***Le flux convectif de $\phi$ entrant net***

Le flux convectif de ϕ entrant par la face (1)

$$\rho v_x \phi dydz$$

Le flux convectif de ϕ sortant par la face (2)

$$\rho v_x \phi dydz + \frac{\partial(\rho v_x \phi dydz)}{\partial x}dx$$

Le flux convectif de ϕ entrant par la face (3)

$$\rho v_y \phi dxdz$$

Le flux convectif de ϕ sortant par la face (4)

$$\rho v_y \phi dxdz + \frac{\partial\left(\rho v_y \phi dxdz\right)}{\partial y}dy$$

Le flux convectif de ϕ entrant par la face (5)

$$\rho v_z \phi dxdy$$

Le flux convectif de ϕ sortant par la face (6)

$$\rho v_z \phi dxdy + \frac{\partial(\rho v_z \phi dxdy)}{\partial z}dz$$

Ainsi, le flux convectif de ϕ net total est

$$\left[-\frac{\partial(\rho v_x \phi)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\rho v_y \phi\right)}{\partial y} - \frac{(\rho v_z \phi)}{\partial z}\right]dxdydz \qquad \text{(I. 10)}$$

***Le flux diffusif de $\phi$ entrant net***

Le flux diffusif de $\phi$ entrant par la face (1)

$$-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dydz$$

Le flux diffusif de $\phi$ sortant par la face (2)

$$-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dydz + \frac{\partial \left(-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dydz\right)}{\partial x} dx$$

Ainsi, le flux diffusif de $\phi$ net entrant par la face (1) est

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdydz$$

Les flux diffusifs nets de $\phi$ à travers les faces (3) et (5) s'obtiennent de manière similaire. On obtient alors le flux diffusif total net de $\phi$ est

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right] dxdydz \qquad (I.11)$$

***Le taux de production net de $\phi$***

Si $\dot{S}_\phi$ et $\dot{P}_\phi$ représentent les taux de production et de destruction de $\phi$ par unité de masse du fluide par, le taux de production net est

$$dm\left(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi\right) = \rho dxdydz\left(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi\right) \qquad (I.12)$$

En substituant les taux d'accumulation, de production et les flux nets convectif et diffusif dans l'équation du bilan de $\phi$, on aboutit à l'équation de transport générale s'écrivant

*Sous forme développée*

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x \phi)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v_y \phi\right)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z \phi)}{\partial z} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right] + \rho\left(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi\right) \qquad (I.13)$$

*Sous forme tensorielle*

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho v_j \phi\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + \rho\left(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi\right) \qquad (I.14)$$

*Sous forme vectorielle*

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\vec{v}\phi) = div\left(\Gamma_\phi \overrightarrow{\text{grad}}\phi\right) + \rho\left(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi\right) \qquad (I.15)$$

## I. 6. Equation de continuité

Elle décrit la conservation du débit massique du fluide durant son écoulement. A l'aide d'un bilan d'une variable ϕ les débits massiques à travers un volume contrôle imaginaire $\boldsymbol{dV}$ peuvent être calculés.

On cherche à déterminer la variable dépendante ϕ qu'on doit remplacer dans l'équation de transport afin d'obtenir l'équation de continuité. Comme la quantité transportée décrivant le débit massique est la masse du fluide, et la variable dépendante ϕ est une variable extensive calculée par unité de masse du fluide, on a

$$\phi = \frac{\text{masse du fluide}}{\text{Kg du fluide}} = \frac{1\ \text{kg}}{\text{kg}} = 1$$

Compte tenu du fait qu'il n'y a pas de création (la masse ne peut être créée ni détruite $\dot{S}_\phi = \dot{P}_\phi = 0$) ni de diffusion de masse (une molécule ne peut céder sa propre masse à une autre $\Gamma_\phi = 0$) , on trouve l'équation suivante de la variable ϕ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 \qquad (I.16)$$

qui représente l'équation de continuité sous forme vectorielle.

*Forme développée*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \qquad (I.17)$$

*Forme tensorielle*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \qquad (I.18)$$

Si le fluide est incompressible $\frac{D\rho}{Dt}$=0

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho div(\vec{v}) = 0 \Longrightarrow div(\vec{v}) = 0 \qquad (I.19)$$

## I. 7. Les équations de quantité de mouvement

Elles représentent les équations qui régissent le transport des trois composantes du vecteur quantité de mouvement du fluide le long de son écoulement. En considérant un volume de contrôle imaginaire fixe $dV$ dans l'espace Eulérien et à l'aide d'un bilan de débit de quantité de mouvement à travers ce volume, on aboutit à la résultante des forces (ou les puissances mécaniques) extérieures agissant sur le fluide contenu dans ce volume $dV$.

Ce bilan s'écrit de la manière suivante

Le taux d'accumulation de la quantité de $m^{vt}$ suivant $x_i$ dans $dV$ =

le flux de quantité de $m^{vt}$ suivant $x_i$ entrant

+ le flux de quantité de $m^{vt}$ suivant $x_i$ sortant

+ la somme des composantes, suivant $x_i$, des forces externes agissant sur le fluide du $dV$.

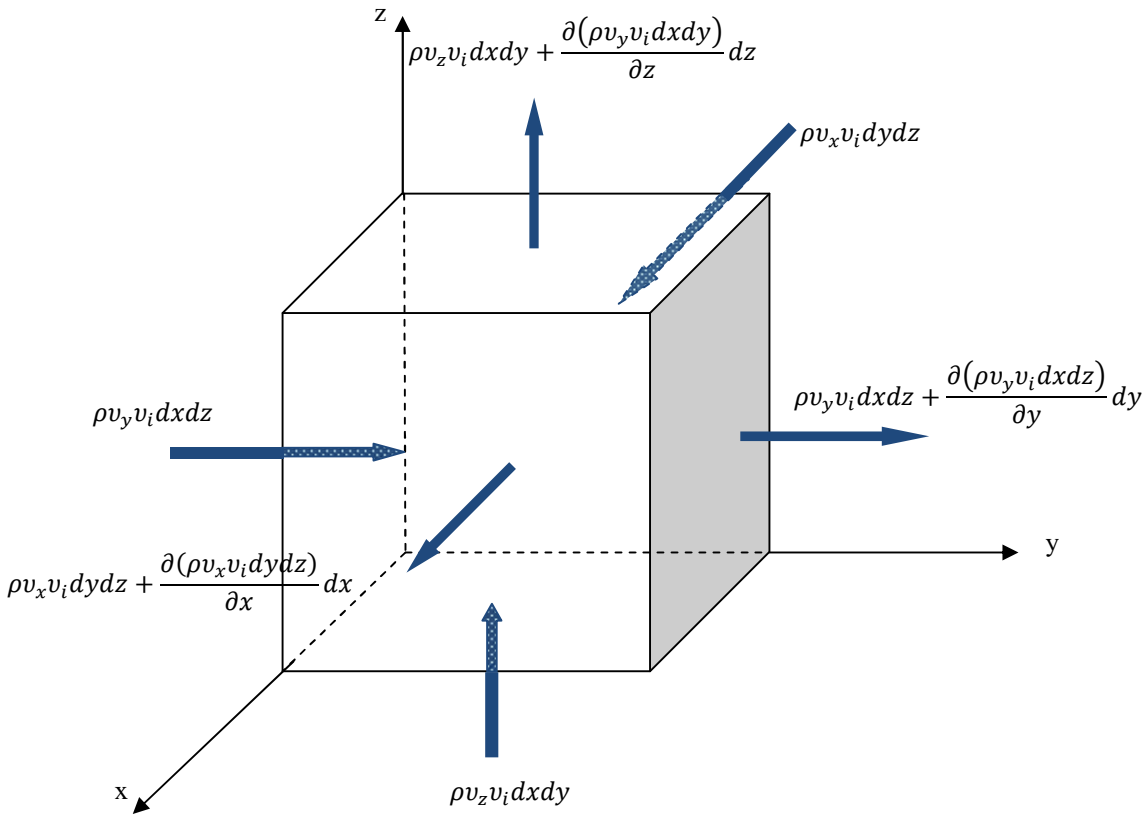



**Figure I.3 :** Les flux de quantité de mouvement suivant $x_i$ à travers les faces

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i dxdydz) \\
&= \rho v_x v_i dydz - \left[\rho v_x v_i dydz + \frac{\partial(\rho v_x v_i dydz)}{\partial x} dx\right] \\
&+ \rho v_y v_i dxdz - \left[\rho v_y v_i dxdz + \frac{\partial(\rho v_y v_i dxdz)}{\partial y} dy\right] \\
&+ \rho v_z v_i dxdy - \left[\rho v_z v_i dxdy + \frac{\partial(\rho v_z v_i dxdy)}{\partial z} dz\right] \\
&- \rho\sigma_{1i} dydz + \left[\rho\sigma_{1i} dydz + \frac{\partial(\rho\sigma_{1i} dydz)}{\partial x} dx\right] \\
&- \rho\sigma_{2i} dxdz + \left[\rho\sigma_{2i} dxdz + \frac{\partial(\sigma_{2i} dxdz)}{\partial y} dy\right] \\
&- \rho\sigma_{3i} dxdy + \left[\rho\sigma_{3i} dxdy + \frac{\partial(\sigma_{3i} dxdy)}{\partial z} dz\right] + \rho g_i dxdydz
\end{aligned} \qquad (I.20)$$

avec $\sigma_{ij}$ est la contrainte de direction $j$ appliquée sur le plan dont sa normale est $i$ définie par

$$\sigma_{ij} = \frac{F}{S} \qquad (I.21)$$

Les forces de surface sont dues aux contraintes de viscosité et la pression hydrostatique

$$dF_{i,surf} = \left(\frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial z}\right) dxdydz \qquad (I.22)$$

La force de gravité est une force de volume, elle s'écrit comme suit

$$dF_{grav} = \rho g dxdydz \qquad (I.23)$$

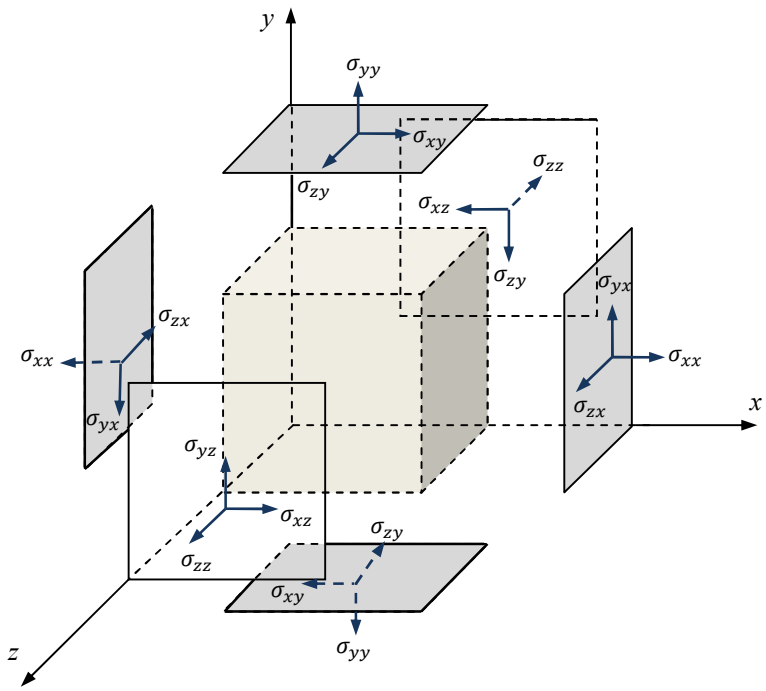



**Figure I.4 :** Composantes des forces de surface externes

En divisant l'équation (I.20) par le produit des variables indépendantes $dxdydz$ et après un réarrangement, on abouti à l'équation de Navier Stocks

*Sous forme développée*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_i) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_i) = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial z} + \rho g_i \qquad (I.24)$$

*Sous forme tensorielle*

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \qquad (I.25)$$

Ces équations contiennent les vitesses et les contraintes comme inconnus. Ce problème de fermeture du système est résolu en réécrivant le tenseur de contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ en fonction du tenseur des taux de déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}$ qu'on va démontrer son lien directe avec le tenseur des gradients de vitesses.

## I. 8. Tenseur déviateur des contraintes

Afin de séparer les effets des forces de frottement et celles des forces de pression dans le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$, on introduit le tenseur déviateur des contraintes $\bar{\bar{\tau}}$ tel que

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij} \Leftrightarrow \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\tau}} - pI \qquad (I.26)$$

où $I$ est le tenseur identité. En d'autres termes, il est construit de telle sorte que sa trace soit nulle.

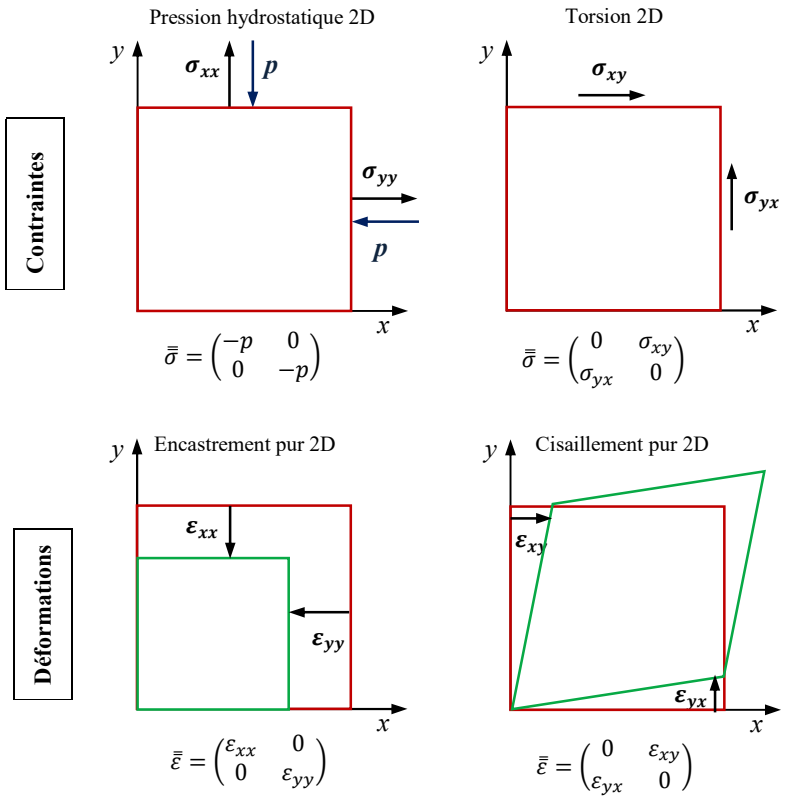



**Figure I.5 :** Les effets des différentes contraintes du plan ($xOy$)

Le tenseur déviateur des contraintes est souvent appelé tenseur des contraintes visqueuses car, comme on le verra dans la section suivante, il est directement lié à la viscosité du fluide.

De la décomposition du tenseur des contraintes en $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\tau}} - pI$, il s'ensuit que l'équation du bilan de quantité de mouvement peut être réécrite comme suit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \qquad (I.27)$$

## I. 9. Tenseur des taux de déformations

Comme en mécanique des fluides, les déformations ne sont pas statiques le tenseur décrivant le taux de déformation est usuellement décrit par le tenseur des taux de vitesse de déformation.

Afin de définir le tenseur des taux de déformation, on fait une analyse bidimensionnelle détaillée du champ de vitesse, dans un repère fixe ($xOy$), tout en s'appuyant sur la figure (I.6).

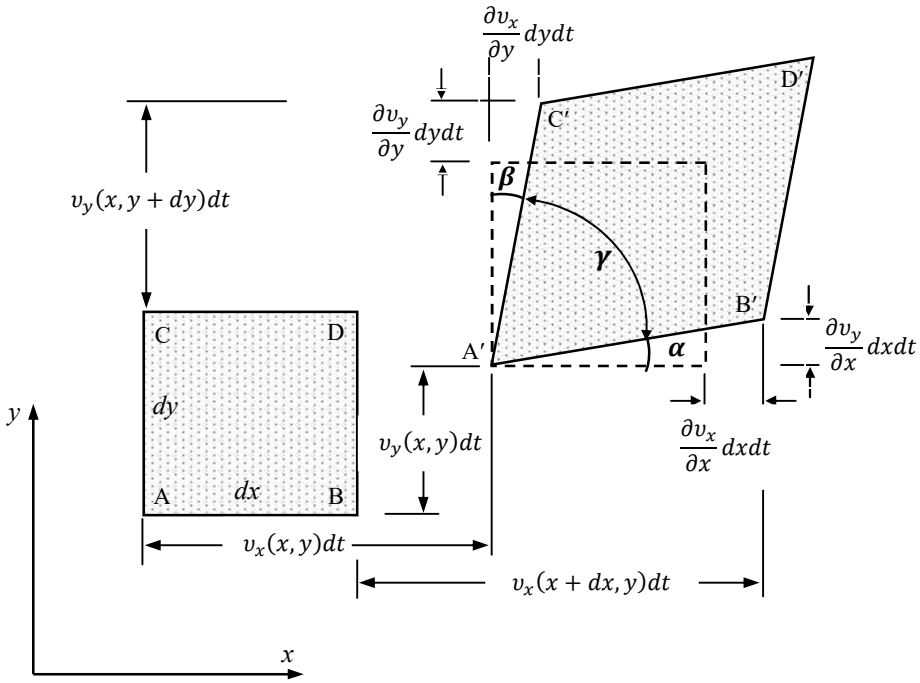



**Figure I.6 :** Différentes déformations : translation, expansion, cisaillement, rotation

A un instant $t$ donné, on considère une parcelle de fluide ABCD (élément de fluide) de position définie par les coordonnées des points $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ et des vecteurs de vitesse : $\overrightarrow{v_A}(v_{xA}, v_{yA}), \overrightarrow{v_B}(v_{xB}, v_{yB}), \overrightarrow{v_C}(v_{xC}, v_{yC}), \overrightarrow{v_D}(v_{xD}, v_{yD})$

De même, à un instant $t + dt$, la parcelle du fluide s'est déplacée à une position définie par les coordonnées des points $A'(x_{A'}, y_{A'}), B'(x_{B'}, y_{B'}), C'(x_{C'}, y_{C'}), D'(x_{D'}, y_{D'})$ et dont leurs vecteurs vitesse sont : $\overrightarrow{v_{A'}}(v_{xA'}, v_{yA}), \overrightarrow{v_{B'}}(v_{xB'}, v_{yB'}), \overrightarrow{v_{C'}}(v_{xC'}, v_{yC'}), \overrightarrow{v_{D'}}(v_{xD'}, v_{yD})$.

Entre les deux positions la parcelle fluide subit des déformations que nous allons décomposer ci-dessous en deux parties :

## I. 9. 1. Les éléments diagonaux du tenseur des taux de déformation

La parcelle fluide subit une translation globale de $v_x dt$ suivant (O$x$) et $v_y dt$ suivant (O$y$). Elle est globalement déformée élongation ou contraction de $\frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt$ suivant $x$ et de $\frac{\partial v_y}{\partial y} dydt$ suivant $y$. A partir de la figure (I.6) on définie la position et la vitesse de la parcelle aux instants $t$ et $t + dt$ comme suit

*A l'instant* $t$

La position : $\begin{cases} A(0,0) \\ B(dx,0) \\ C(0,dy) \\ D(dx,dy) \end{cases}$ La vitesse : $\begin{cases} \overrightarrow{v_A}(v_x, v_y) \\ \overrightarrow{v_B}\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx, v_y\right) \\ \overrightarrow{v_C}\left(v_x, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right) \\ \overrightarrow{v_D}\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right) \end{cases}$

*A l'instant* $t + dt$

La position est définie à partir des composantes des vecteurs de vitesse, à l'instant *t*, liés à la parcelle de fluide ABCD

$$\begin{cases} A'(v_x dt, v_y dt) \\ B'\left(dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt, v_y dt\right) \\ C'\left(v_x dt, dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dydt\right) \\ D'(dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt, dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dydt) \end{cases}$$

L'accroissement relatif de la longueur suivant *x* est donné par

$$\frac{d(AB)}{AB} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt\right) - dx}{dx} = \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{\substack{taux \\ élongation \\ suivant\ x}} dt \qquad (I.28)$$

De même, le taux d'élongation suivant *y* sera alors

$$\frac{d(AC)}{AC} = \frac{\partial v_y}{\partial y} dt \qquad (I.29)$$

Comme la parcelle fluide ABCD est une surface, sa déformation (contraction ou élongation) est liée à la variation relative de son aire définie par

$$\frac{dS}{S} = \frac{S' - S}{S} = \frac{\left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt\right)\left(dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dydt\right) - dxdy}{dxdy}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt + \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial y} dt^2}_{\approx \varepsilon \to 0} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dt \qquad (I.30)$$

En trois dimensions, le taux de déformation est la variation relative de volume suivante

$$\frac{\partial V}{V} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dt = Tr\left(\overline{\overline{grad}}\vec{v}\right) dt = div\vec{v}\, dt \qquad (I.31)$$

En conséquence, les éléments de diagonale du tenseur des taux de déformation correspondent aux taux d'élongation (ou contraction) du fluide dans les trois directions de l'espace. La trace de ce tenseur permet d'évaluer le taux d'expansion local du volume.

## I. 9. 2. Les éléments non-diagonaux du tenseur des taux de déformation

Comme la parcelle fluide, durant son déplacement, subit une translation globale de $v_x dt$ suivant (O*x*) et $v_y dt$ suivant (O*y*), elle est soumise à une déformation angulaire de $\frac{\partial v_y}{\partial x} dxdt$ suivant *x* et de $\frac{\partial v_x}{\partial y} dydt$ suivant *y*. Ces déformations représentent les éléments non-diagonaux du tenseur des taux de vitesse de déformation.

A partir de la figure (I.6) on définie la position et la vitesse de la parcelle aux instants $t$ et $t + dt$ comme suit

*A l'instant* $t$

La position : $\begin{cases} A(0,0) \\ B(dx,0) \\ C(0,dy) \\ D(dx,dy) \end{cases}$ La vitesse : $\begin{cases} \overrightarrow{v_A}(v_x,v_y) \\ \overrightarrow{v_B}\left(v_x,v_y+\frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right) \\ \overrightarrow{v_C}\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}dy,v_y\right) \\ \overrightarrow{v_D}\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}dy,v_y+\frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right) \end{cases}$

*A l'instant* $t+dt$

La position : $\begin{cases} A'(v_x dt, v_y dt) \\ B'\left(dx+v_x dt, v_y dt+\frac{\partial v_y}{\partial x}dxdt\right) \\ C'\left(v_x dt+\frac{\partial v_x}{\partial y}dydt, dy+v_y dt\right) \\ D'(dx+v_x dt+\frac{\partial v_x}{\partial y}dydt, dy+v_y dt+\frac{\partial v_y}{\partial x}dxdt) \end{cases}$

On calcule de la déformation angulaire comme suit

$$\begin{cases} d\alpha \simeq tan\alpha = \dfrac{\frac{\partial v_y}{\partial x}dxdt}{dx} = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} \\ d\beta \simeq tan\beta = \dfrac{\frac{\partial v_x}{\partial y}dydt}{dy} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} \\ \dfrac{d\beta}{dt} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases} \qquad (I.32)$$

Pour la déformation angulaire on peut envisager deux cas particuliers

- Les deux angles sont égaux $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \rightarrow$ tenseur des taux de déformation symétrique.

C'est le cas d'une « déformation pure » au cours de laquelle l'angle $\gamma = B\hat{A}C$ subit une variation égale à

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma' - \gamma}{dt} = \frac{(\gamma - d\alpha - d\beta) - \gamma}{dt} = -\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -2\frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad (I.33)$$

- Les deux angles sont opposées $\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \rightarrow$ tenseur des taux de déformation antisymétrique. Il s'agit ainsi, d'une « rotation pure » autour de l'axe (Oz) de vitesse angulaire

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \qquad (I.34)$$

Cette expression correspond à la moitié de la composante, suivant (Oz), du vecteur rotationnel de la vitesse suivant

$$\vec{\Omega}\begin{pmatrix}\Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{Rot\vec{v}} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\end{pmatrix} \qquad (I.35)$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur tourbillon qui comporte toutes les rotations possibles, autour des trois axes, de la particule fluide durant son écoulement.

Afin de déterminer le tenseur des taux de déformations angulaires pures on doit écrire gradient de vitesse $\overline{\overline{grad}}\vec{v}$ sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et d'un tenseur antisymétrique $\bar{\bar{\omega}}$

$$\begin{pmatrix} v_x{}' \\ v_y{}' \\ v_z{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{grad}}\vec{v}} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \qquad (I.36)$$

***Remarque***

En coordonnées cylindriques l'expression du gradient de vitesse est

$$\overline{\overline{grad}}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (I.37)$$

On fait soustraire la déformation antisymétrique, responsable des rotations pures, du tenseur de gradient de vitesses afin de déterminer le tenseur des taux de déformations angulaires pures $\bar{\bar{\varepsilon}}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{\omega}}} \qquad (I.38)$$

D'où le tenseur des taux de déformations angulaires pures $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (I.39)$$

## I. 10. Tenseur déviateur de contrainte en fonction des taux de déformation

Dans le cas des fluides newtoniens, les contraintes sont des fonctions linéaires des taux de déformations du milieu. De ce fait, le tenseur déviateur de contrainte $\bar{\bar{\tau}}$ et le tenseur des taux de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}$ sont liés par la relation suivante

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} \qquad (I.40)$$

Afin d'exprimer le tenseur des taux de cisaillement, il est plus convenable de décrire la déformation pure $\bar{\bar{\varepsilon}}$ comme la somme d'une expansion isotrope $\bar{\bar{\varepsilon}}_{exp}$ $(\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}, i = j)$ et d'un cisaillement à volume constant $\bar{\bar{\varepsilon}}_{cis}$ $(\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}, i \neq j)$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{cis} + \bar{\bar{\varepsilon}}_{exp} \qquad (I.41)$$

**Partie expansion**

La variation relative décrivant l'évolution du volume $\frac{dV}{V}$ durant le temps infinitésimal $dt$ est définie par la relation

$$\frac{dV}{V} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dt = div\vec{v}\,dt \Longrightarrow div\vec{v} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}\,\bar{\bar{\varepsilon}}_{exp} \qquad (I.42)$$

D'autre part, de l'équation de continuité on a la relation $div\vec{v} = -(1/\rho)(d\rho/dt)$ qui montre qu'une divergence de la vitesse positive correspond à une diminution locale de masse volumique.

La composante du tenseur des taux de déformations associée à l'expansion isotrope notée $\bar{\bar{\varepsilon}}_{exp}$ est, ainsi, proportionnelle à la divergence de la vitesse. Alors on peut écrire

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{exp} = \left(\frac{Tr(\bar{\bar{\varepsilon}})}{3}\right), \qquad \bar{\bar{\varepsilon}}_{exp,ij} = \frac{div\vec{v}}{3}\delta_{ij} \qquad (I.43)$$

**Partie cisaillement**

Après la détermination du tenseur des taux de déformations associée à l'expansion isotrope, le tenseur de cisaillement $\bar{\bar{\varepsilon}}_{cis}$ s'obtient par la différence entre $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et $\bar{\bar{\varepsilon}}_{exp}$.

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{cis} = \bar{\bar{\varepsilon}} - \bar{\bar{\varepsilon}}_{exp}, \qquad \bar{\bar{\varepsilon}}_{cis,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{div\vec{v}}{3}\delta_{ij} \qquad (I.44)$$

Puisque la trace de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et la trace de $\bar{\bar{\varepsilon}}_{exp}$ sont toutes les deux égales à la divergence de la vitesse, le tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}_{cis}$ est symétrique de trace nulle.

En conséquence, le tenseur déviateur de contrainte $\bar{\bar{\tau}}$ est défini comme suit

*Si* $i = j$ *:*

$$\bar{\bar{\tau}}_{ij} = 2\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\right) \qquad (I.45)$$

*Si* $i \neq j$ *:*

$$\bar{\bar{\tau}}_{ij} = 2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] \qquad (I.46)$$

Afin d'écrire le tenseur déviateur de contrainte sous une forme plus compacte rassemblons les deux cas dans une seule relation

$\forall i, \forall j$:
$$\bar{\bar{\tau}}_{ij} = 2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij} \qquad (I.47)$$

## I. 11. Equation vectorielle de Navier-Stocks

En substituant $\bar{\bar{\tau}}_{ij}$ dans l'équation de quantité de mouvement (I.27) on obtient l'expression suivante

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\underbrace{v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}}_{=0}$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\right]+\rho g_i \qquad (I.48)$$

Pour le cas d'un fluide incompressible

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij}=0\,,\quad \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)=0 \qquad (I.49)$$

En orientant la direction de $x_3$ ou $z$ verticalement vers le haut, sens inverse du champ gravitationnel, on écrit la pression motrice

$$\rho\vec{g}=-\rho\|\vec{g}\|\vec{k}=-\vec{\nabla}(\rho g z)\Longrightarrow p^*=p+\rho g_i z \qquad (I.50)$$

On obtient ainsi l'équation vectorielle de Navier-Stokes dont chaque terme est une force par unité de volume.

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\rho\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\vec{\nabla}p^*+\mu\Delta\vec{v} \qquad (I.51)$$

En divisant cette équation par la densité $\rho$, on obtient le bilan de forces par unité de masse, qui s'interprète aussi comme une équation de transport dont la variable dépendante est la vitesse.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p^*+\nu\Delta\vec{v} \qquad (I.52)$$

Le terme $-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p^*$ représente donc le transport de quantité de mouvement (par unité de masse) liées aux forces de pression tandis que le terme $\nu\Delta\vec{v}$ qui est un terme linéaire représente le transport par diffusion moléculaire. Le second terme du coté gauche de l'équation, $\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}$ correspond au transport convectif de la vitesse et, contrairement au transport diffusif, il est non linéaire car c'est une forme quadratique de la vitesse.

La forme développée de l'équation vectorielle de Navier-Stokes est

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p^*}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p^*}{\partial y}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p^*}{\partial z}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\end{cases} \qquad (I.53)$$

## I. 12. Equation de l'énergie

L'énergie totale $E$ est la somme de l'énergie mécanique $E_m$ et de l'énergie interne $U$. On note respectivement $e$, $e_m$ et $u$ leurs densités volumiques. Afin d'établir le bilan local d'énergie mécanique, on applique sur une parcelle de dimension $(\Delta x \times \Delta y)$ (volume de contrôle en 2dim) le premier principe de thermodynamique « l'énergie contenue dans le volume de contrôle est égale à la somme des forces extérieures et la quantité de chaleur fournie au système ».

Le taux d'accumulation de $\boldsymbol{e}$ dans $(\Delta x \times \Delta y)$ =

L'énergie transférée par écoulement du fluide (par convection)/unité s

+ l'énergie transférée (par conduction)/unité s

+ l'énergie générée sous forme de chaleur interne/unité s

+ le travail net sortant du volume $dV$ vers son environnement/unité s

Le taux d'accumulation de l'énergie totale $\boldsymbol{e}$ par unité de surface est

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \tag{I.53}$$

L'énergie transférée l'écoulement du fluide par convection par unité de surface est

$$-\Delta x \Delta y \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x e) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y e)\right] \tag{I.54}$$

L'énergie transférée l'écoulement du fluide par conduction par unité de surface est

$$-\Delta x \Delta y \left[\frac{\partial \ddot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{q}_y}{\partial y}\right] \tag{I.55}$$

L'énergie générée sous forme de chaleur interne par unité de surface est

$$-\Delta x \Delta y \dot{q} \tag{I.56}$$

Le travail net sortant du volume $dV$ vers son environnement par unité de surface est

$$\Delta x \Delta y \left[\sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x} - \tau_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \sigma_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y} - \tau_{yx}\frac{\partial v_y}{\partial x}\right]$$

$$+\Delta x \Delta y \left[v_x\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - v_x\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + v_y\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - v_y\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\right] \tag{I.57}$$

Les quantités $\ddot{q}_x$ et $\ddot{q}_y$, représentent respectivement, les densités de flux de chaleur transmis par conduction dans les direction $x$ et $y$. Quant à $\dot{q}$ elle représente la quantité de chaleur interne générée dans la parcelle fluide. L'origine de la quantité de chaleur dissipée est le travail affecté par les contraintes normales et tangentielles sur le fluide contenu dans la parcelle.

On prend comme exemple le calcul du travail, par unité de temps, associé à la contrainte normale (figure I.7) dirigée suivant l'axe des *x*.

Le travail actionnant sur la face gauche de la parcelle est

$$-\sigma_{xx}\Delta y\,.\,v_x \tag{I.58}$$

Tandis que le travail actionnant sur la face droite de la parcelle est

$$\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x\right)\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \tag{I.59}$$

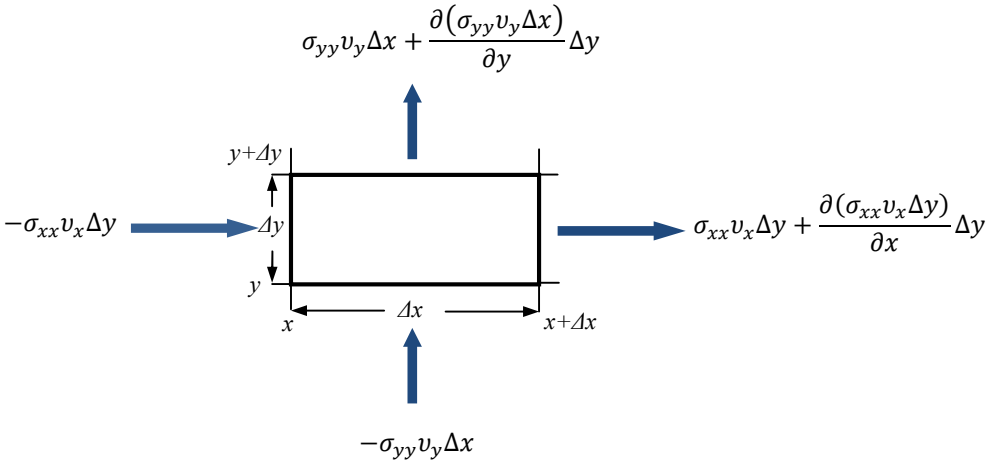



**Figure I.7:** Le travail par unité de temps développé par les forces de pression

Ainsi, le travail net dû à cette contrainte est

$$\left(v_x\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y \tag{I.60}$$

Les travaux des autres contraintes se calculent de la même manière. En assemblant les expressions de puissances thermiques dans l'équation du bilan énergétique, on obtient

$$\rho\frac{\partial(e)}{\partial t}-e\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\vec{\nabla}\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}\vec{q}+\dot{q}-p\vec{\nabla}\vec{v}+\mu\Phi \tag{I.61}$$

où Φ est la fonction de dissipation visqueuse qui s'écrit en

- deux dimensions

$$\Phi=2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 \tag{I.62}$$

- trois dimensions

$$\Phi=2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 \tag{I.63}$$

Après le remplacement de l'énergie $e$ en fonction de l'enthalpie spécifique $h$ et de l'entropie spécifique $s$ dans l'équation (I.61), on obtient la formulation température de la 1ère loi de thermodynamique

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla}\left(k\vec{\nabla}T\right) + \dot{q} - \beta\left(\frac{dp}{dt}\right)T + \mu\Phi \qquad (I.64)$$

- Cas d'un fluide idéal $\beta = \frac{1}{T}$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla}\left(k\vec{\nabla}T\right) + \dot{q} - \frac{dp}{dt} + \mu\Phi \qquad (I.65)$$

- Cas d'un fluide incompressible $\beta = 0$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla}\left(k\vec{\nabla}T\right) + \dot{q} + \mu\Phi \qquad (I.66)$$

La plupart des problèmes de convection sont basés sur les hypothèses suivantes

- conductivité thermique constante $k = cste$
- génération de chaleur interne nulle $\dot{q} = 0$
- dissipation visqueuse négligeable $\Phi = 0$
- effet de compressibilité négligeable $\beta = 0$

ce qui donne à l'équation de l'énergie la forme la plus simple suivante

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k\Delta T \qquad (I.67)$$

La forme développée de cette équation dans les coordonnées cartésiennes est

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (I.68)$$

avec $\alpha = k/(\rho c_p)$ est la diffusivité thermique du fluide.

# CHAPITRE II.

# Fluide parfait et ses applications

## II. 1. Introduction

La dynamique des fluides parfaits est basée sur l'étude des écoulements de fluides tout en considérant les forces extérieures sans prise en compte des forces visqueuses. L'absence de ces forces se manifeste particulièrement en présence de parois solides. En effet, l'ors de l'écoulement au voisinage des parois solides le fluide parfait ne subi aucune contrainte de frottement et la vitesse tangentielle de chaque particule fluide au niveau de la paroi solide est tout à fait différente de zéro.

Dans ce chapitre, on dérive les théorèmes gouvernant cette dynamique, tel que la loi de Bernoulli et le théorème d'Euler utilisés pour le calcul des forces de pression sur les obstacles. On considère ensuite une classe d'écoulements particuliers, les écoulements potentiels. De plus, à l'aide du principe de superposition on étudie des écoulements composés pour visualiser l'écoulement autour d'un objet solide et déterminer la force de portance subie par cet objet.

## II. 2. Relation de Bernoulli pour les fluides parfaits

### II. 2. 1. Formulation locale pour un fluide incompressible

Afin de formuler l'équation de quantité de mouvement régissant l'écoulement de fluide parfait, partons de l'équation vectorielle de Navier Stocks régissant l'écoulement permanent d'un fluide incompressible

$$\underbrace{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{\substack{terme\\instationnaire}} + \underbrace{\rho\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}}_{terme\ inertiel} = \underbrace{-\vec{\nabla}p}_{\substack{force\ de\\pression}} + \underbrace{\mu\Delta\vec{v}}_{\substack{force\ de\\viscosité}} + \underbrace{\rho\vec{g}}_{\substack{force\\de\ volume}} \quad dt \tag{II. 1}$$

Comme les contributions visqueuses sont négligeables devant les forces d'inertie, de volume et de pression l'équation se réécrit comme suit

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} \tag{II. 2}$$

La force de volume dérive d'un potentiel $\phi = gz$. En notant $\vec{k}$ le vecteur unitaire vertical ascendant et $z$ la hauteur, la force de pesanteur se réécrit comme suit

$$\rho\vec{g} = -\rho g\vec{k} = -\vec{\nabla}(\rho gz) \tag{II. 3}$$

Afin de faire apparaître le vecteur de vorticité dans le terme d'accélération, on utilise la relation vectorielle (formule de Lamb) suivante

$$\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{v}) + \left(\vec{\nabla}\Lambda\,\vec{v}\right)\Lambda\vec{v} \tag{II. 4}$$

Par conséquent

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{v}) + \left(\vec{\nabla}\Lambda\,\vec{v}\right)\Lambda\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}(\rho gz) \tag{II. 5}$$

Comme l'écoulement est incompressible, on peut écrire

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) + (\vec{\nabla}\Lambda\,\vec{v})\Lambda\vec{v} = 0 \qquad \text{(II. 6)}$$

En projetant cette expression sur la ligne de courant définit dans la base de Frenet $(\overrightarrow{e_t}, \overrightarrow{e_n})$, où le vecteur de vitesse $\vec{v} = v\overrightarrow{e_t}$ et l'opérateur nabla est $\vec{\nabla} = \overrightarrow{e_t}\frac{\partial}{\partial s} + \overrightarrow{e_n}\frac{\partial}{\partial n}$, on obtient

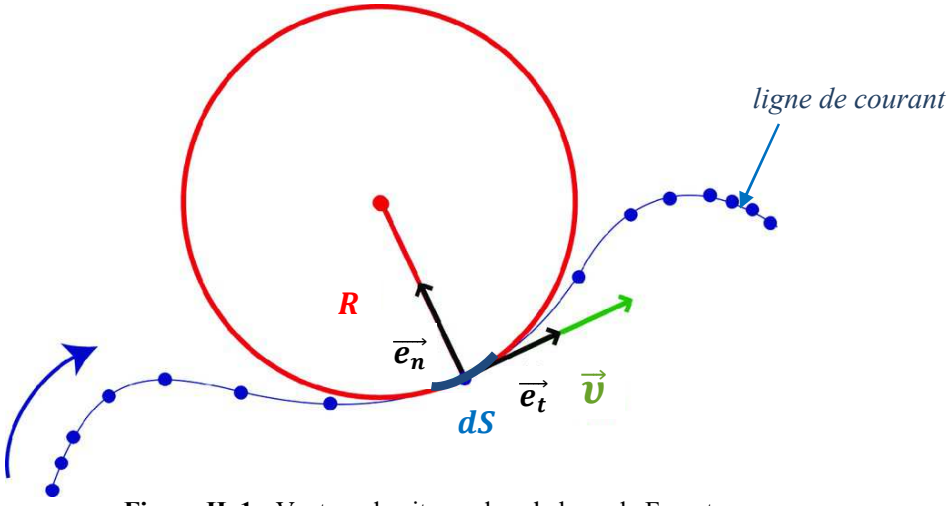



**Figure II. 1 :** Vecteur de vitesse dans la base de Frenet

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) + \underbrace{\overrightarrow{e_t}.\left[(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v})\Lambda\vec{v}\right]}_{=0} = 0 \qquad \text{(II. 7)}$$

où $s$ est l'abscisse curviligne. En intégrant entre deux points quelconques de la ligne de courant, il en résulte

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} + \int \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right)ds = C^{te} \qquad \text{(II. 8)}$$

En, conséquence

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = C^{te} \qquad \text{(II. 9)}$$

Dans le cas particulier d'un écoulement stationnaire, on retrouve le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C \qquad \text{(II. 10)}$$

Cette quantité, appelée la charge, est conservée le long de la même ligne de courant dont chacune peut admettre une valeur de $C$ différente.

## II. 2. 2. Ecoulements irrotationnels des fluides parfaits incompressible

Dans le cas des écoulements irrotationnels, classe très importante dans la mécanique des fluides, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ est nul et la constante de Bernoulli est la même pour

toutes les lignes de courant. De ce fait, on peut obtenir une relation plus simple car la vitesse dérive d'un potentiel $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ et la relation (II.6) devient

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \qquad (\text{II.}11)$$

Ainsi, la quantité entre parenthèse est seulement une fonction du temps

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \qquad (\text{II.}12)$$

On peut encore simplifier la relation en posant $\hat{\varphi} = \varphi - \int f(t)dt$ et on obtient ainsi

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \qquad (\text{II.}13)$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, on obtient le théorème de Bernoulli, représentant la conservation de charge, valable en tout point de l'écoulement irrotationnel

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C^{te} \qquad (\text{II.}14)$$

## II. 3. Théorème d'Euler

Dans de nombreuses situations, on considère un écoulement stationnaire d'un fluide parfait en contact avec un obstacle supposé rigide et on est intéressés par la force que l'écoulement exerce sur la paroi. Si on connait le champ de pression à la surface $S$ de l'obstacle, on peut calculer la force exercée sur l'obstacle. Une autre alternative consiste à passer par un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle imaginaire $V$ fixe délimité par la frontière $\partial\Omega$ contenant $S$, la surface du solide. Ce bilan s'écrit de la manière suivante

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\vec{v}.dV = m\vec{g} + \oiint_{\partial\Omega} \sigma\vec{n}dS + \vec{F}_{ext} - \oiint_{\partial\Omega} \rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n})dS \qquad (\text{II.}15)$$

Lorsque la frontière imaginaire fixe $\partial\Omega$ du système peut être considérée comme l'union de la frontière $\partial\Omega_s$ entre le fluide interne et les parois solides et de la frontière $\partial\Omega_f$ entre le fluide interne et le fluide externe, on obtient

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\vec{v}.dV = m\vec{g} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega_s} \sigma\vec{n}dS}_{①} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega_f} \sigma\vec{n}dS}_{②} + \vec{F}_{ext}$$

$$- \underbrace{\iint_{\partial\Omega_s} \rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n})dS}_{③} - \underbrace{\iint_{\partial\Omega_f} \rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n})dS}_{④} \qquad (\text{II.}16)$$

Terme ① : la force $\overrightarrow{F_{s/f}}$ que les parois solides exercent sur le fluide contenu dans le système (la grandeur que l'on cherche à calculer).

Terme ② : comme $\sigma = \tau - pI$ et la contrainte de cisaillement $\tau$ est souvent négligeable par rapport à la pression ; ce terme se simplifie en une force de pression $p\overrightarrow{dS}$.

Terme ③ : ce terme est nul car les parois sont imperméables c.à.d. la vitesse du fluide à leur contact est nulle.

Ainsi l'expression du bilan de quantité de mouvement s'écrit comme suit

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\vec{v}.dV = m\vec{g} + \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{ext} - \iint_{\partial\Omega_f} p\vec{n}dS - \iint_{\partial\Omega_f} \rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n})dS \qquad (II.17)$$

***Théorème d'Euler***

Dans le cas du régime stationnaire ($\frac{d}{dt}\iiint \rho\vec{v}.dV = 0$), la résultante $\vec{F}_{tot/f}$ des forces qui s'appliquent sur le fluide (gravité + parois solides + pression du fluide + force extérieure) est égale et opposée au débit de quantité de mouvement entrant dans le système. Il s'ensuit que l'équation précédente se simplifie et prend la forme suivante, appelée théorème d'Euler

$$\iint_{\partial\Omega_f} \rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n})dS = m\vec{g} + \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{ext} - \iint_{\partial\Omega_f} p\vec{n}dS \qquad (II.18)$$

L'intérêt de cette formule réside qu'en pratique on ne connait pas toujours la pression sur la surface de l'obstacle et la force de pression semble donc a priori inaccessible. Cependant, cette méthode nous permet, à l'aide d'un choix adéquat de volume de contrôle, d'accéder à la force de pression sur l'obstacle, sans connaitre la pression et l'écoulement sur l'obstacle lui même mais à d'autres endroits.

***Exemple 1***

De l'eau circule dans une conduite horizontale, de section constante, présentant un coude d'angle 90° continue dans la direction verticale. On suppose que le régime est stationnaire et on néglige l'effet de la pesanteur.

1. Déterminer la force $\vec{F}$ appliquée par le fluide sur la canalisation.
2. Calculer le module de $\vec{F}$ ainsi que ses composantes pour les données $D$=9cm, $V_e$=0,5m/s et $p_e$=29 616,78Pa.

***Solution***

**1.** Détermination de la force appliquée par le fluide sur la canalisation :

*Les hypothèses*

L'écoulement est incompressible,

Le régime est stationnaire,

L'effet de la pesanteur est négligé.

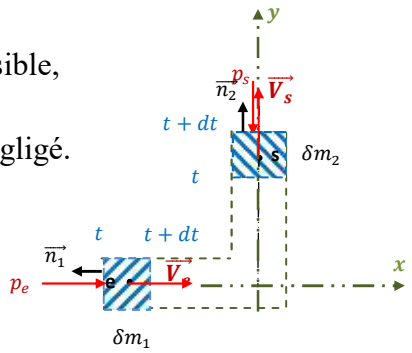



**Figure II.2** : Le volume de contrôle choisi

On résonne sur le système matériel fermé Σ constitué du contenu du tube coudé (limité par $S_1$, $S_2$ et $S_l$) et une masse élémentaire $\delta m_1$ qui rentre en amont entre *t* et *t+dt* :

D'après le principe de conservation du débit massique du fluide, on écrit

$$m(t) + \delta m_1 = m(t + dt) + \delta m_2 \qquad (II.19)$$

qui se réécrit comme suit

$$m(t + dt) - m(t) = \delta m_1 - \delta m_2 = \rho(S_1 V_1 - S_2 V_2)dt \qquad (II.20)$$

Comme l'écoulement est stationnaire, on peut écrire

$$m(t + dt) = m(t) \Longrightarrow S_1 V_1 = S_2 V_2 \qquad (II.21)$$

d'où

$$S_1 = S_2 \Longrightarrow V_1 = V_2 \Leftrightarrow V_e = V_s \qquad (II.22)$$

D'autre part, on applique le théorème de Bernoulli entre *e* et *s*

$$p_e + \underbrace{\rho g y_e}_{\approx 0} + \frac{1}{2}\rho V_e^2 = p_f + \underbrace{\rho g y_f}_{\approx 0} + \frac{1}{2}\rho V_s^2 \qquad (II.23)$$

on obtient, ainsi

$$V_e = V_s \Longrightarrow p_e = p_f \qquad (II.24)$$

Afin de calculer la force appliquée par le fluide sur la canalisation on applique le théorème de bilan de quantité de mouvement (théorème d'Euler) sur le volume de contrôle $\boldsymbol{V_c}$ délimité par les surfaces $S_1$, $S_2$ et $S_l$ du système fermé Σ. On écrit

$$\underbrace{\iiint_{V_c} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV}_{=0} + \iint_{S_c} \rho \vec{V}(\vec{V}.\vec{n}) dS = \sum \vec{F}_{ext} \qquad (II.25)$$

***Les forces extérieures***

Forces de viscosité : négligées

Force de pesanteur : négligée

La force subie par le coude est $\overrightarrow{F_{f/c}} = -\overrightarrow{F_{c/f}} = -\vec{F}$

Les forces de pression : $\overrightarrow{F_{pe}}, \overrightarrow{F_{ps}}$

$$\iint_{S_1} \rho \overrightarrow{V_e}(\overrightarrow{V_e}.\overrightarrow{n_1}) dS + \iint_{S_2} \rho \overrightarrow{V_f}(\overrightarrow{V_f}.\overrightarrow{n_2}) dS + \underbrace{\iint_{S_l} \rho \vec{V}(\vec{V}.\overrightarrow{n_l}) dS}_{=0,(\vec{V} \perp \overrightarrow{n_l})} = \overrightarrow{F_{pe}} + \overrightarrow{F_{ps}} - \vec{F} \qquad (II.26)$$

Comme les forces de viscosité sont négligées la vitesse est uniforme le long de la section $S_l$ et l'intégrale de surface devient

$$\iint_{S_1} \rho \overrightarrow{V_e}(\overrightarrow{V_e}.\overrightarrow{n_1}) dS = -\rho {V_e}^2 S_1 \vec{\imath} \qquad (II.27)$$

De même pour la section $S_2$ la vitesse est uniforme

$$\iint_{S_2} \rho\overrightarrow{V_f}(\overrightarrow{V_f}.\overrightarrow{n_2})dS = \rho {V_s}^2 S_2\vec{j} \qquad (II.28)$$

Par conséquent

$$-\rho {V_e}^2 S_1\vec{\imath} + \rho {V_f}^2 S_2\vec{j} = p_e S_1\vec{\imath} - p_s S_2\vec{j} - \vec{F} \qquad (II.29)$$

Comme $S_1 = S_2, p_e = p_s, V_e = V_s$, on obtient

$$\vec{F} = (p_e S_1 + \rho {V_e}^2 S_1)(\vec{\imath} - \vec{j}) \qquad (II.30)$$

**2.** Le module de $\vec{F}$ et ses composantes

$$F_x = \frac{\pi D^2}{4}(p_e + \rho V_e^2), \qquad F_y = -\frac{\pi D^2}{4}(p_e + \rho V_e^2) \qquad (II.31)$$

$$\|\vec{F}\| = \frac{\pi\sqrt{2}D^2}{4}(p_e + \rho V_e^2) \qquad (II.32)$$

***A.N.***

$$F_x = 190N, \qquad F_y = -190N, \qquad F = 268.7N \qquad (II.33)$$

***Exemple 2***

Une hélice est mise en rotation autour d'un axe $(xx')$ par un liquide incompressible de masse volumique $\rho$, en mouvement permanent et irrotationnel.

On admet que, dans une section droite $S(x)$, la pression $p(x)$ et la vitesse $u(x)$ du fluide sont uniformes. De plus, au niveau de l'hélice, si la vitesse $u(x)$ est continue, la pression $p(x)$ subit une discontinuité.

1. Calculer la discontinuité de pression au niveau de l'hélice.
2. Déterminer la force exercée par le fluide sur l'hélice la puissance transmise à l'hélice.
3. Calculer la valeur maximale du rendement de l'hélice.

***Solution***

L'hélice est supposée mince. Soit les points *B* et *C* proches de l'hélice et de chaque côté de celle-ci. Dans la zone non perturbée par l'hélice, la vitesse est uniforme et vaut $u_1$, la pression $p_1$.

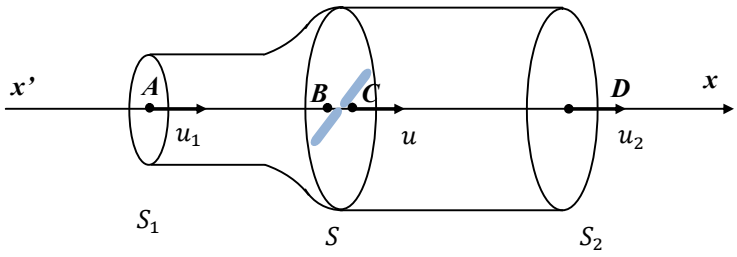



**Figure II.3** : Forme simplifiée d'une l'hélice en tuyère

**1.** Calcul de la pression en aval et en amont de l'hélice

Appliquons le théorème de Bernoulli entre *A* et *B* d'une part

$$p_A + \rho\frac{u_1^2}{2} = p_B + \rho\frac{u^2}{2} \qquad (II.34)$$

et entre *C* et *D* d'autre part

$$p_C + \rho\frac{u^2}{2} = p_D + \rho\frac{u_2^2}{2} \qquad (II.35)$$

On a $p_A = p_D = p_1$, et donc

$$p_B - p_C = \frac{1}{2}\rho(u_1^2 - u_2^2) \qquad (II.36)$$

**2.** La force exercée par le fluide sur l'hélice

Appliquons maintenant le théorème de quantité de mouvement au volume de fluide compris entre les sections 1, 2, 3, et 4.

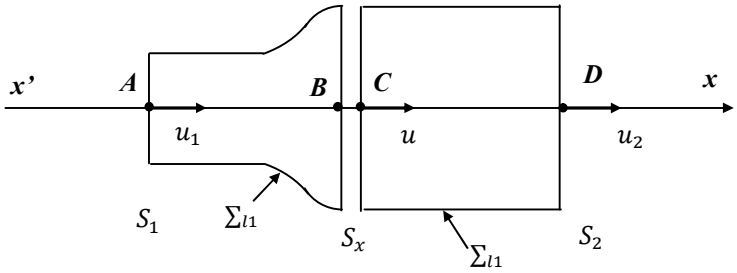



**Figure II.4** : Volume de contrôle choisi

$$\underbrace{\iiint_{V_{contrôle}} \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}dV}_{=0} + \iint_{S_{contrôle}} \rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})dS = \sum\vec{F}_{ext} \qquad (II.37)$$

Comme le mouvement du fluide, considéré incompressible, est permanent et irrotationnel (forces de viscosité négligées), on obtient

$$\iint_{S_{contrôle}} \rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})dS = \sum\vec{F}_{press} = -\iint_{S_{contrôle}} p.\vec{n}\,dS \qquad (II.38)$$

D'où, l'équation d'Euler

$$\iint_{S_{contrôle}} [p.\vec{n} + \rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})]dS = 0 \qquad (II.39)$$

On a pas pris en considération la pesanteur car le canal est horizontal et l'écoulement est considéré unidimensionnel $\left(\vec{V}(u,v,w) = \vec{V}(u(x),0,0)\right)$.

Sur les surfaces latérales $S_{l1}$ et $S_{l2}$, $\vec{V} \perp \overrightarrow{n_l} = 0$, la pression $p = p_1$. Alors

$$\iint_{S_{l2}} \left[ p.\vec{n} + \rho\vec{V}\underbrace{(\vec{V}.\vec{n})}_{=0} \right] dS = \iint_{S_{l1}} \left[ p.\vec{n} + \rho\vec{V}\underbrace{(\vec{V}.\vec{n})}_{=0} \right] dS = \underbrace{-p_1 \iint_{S_{l1}} \vec{n}\, dS}_{symétrie\ cylindrique} = 0 \qquad (II.40)$$

Sur les surfaces d'entrée et de sortie $S_A = S_1$ et $S_D = S_2$ la pression $p = p_1$, d'où

$$\iint_{S_A} \left[ \underbrace{p.\vec{n}}_{-p_1\vec{\imath}} + \underbrace{\rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})}_{-\rho u_1^2\vec{\imath}} \right] dS + \iint_{S_D} \left[ \underbrace{p.\vec{n}}_{p_1\vec{\imath}} + \underbrace{\rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})}_{\rho u_2^2\vec{\imath}} \right] dS = (-\rho u_1^2 S_1 + \rho u_2^2 S_2)\vec{\imath} \qquad (II.41)$$

Sur la surface amont $S_B$ et la surface avale $S_C$, on a

$$\iint_{S_B=S_x} \left[ \underbrace{p.\vec{n}}_{p_B\vec{\imath}} + \underbrace{\rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})}_{\rho u^2\vec{\imath}} \right] dS + \iint_{S_C=S_x} \left[ \underbrace{p.\vec{n}}_{-p_C\vec{\imath}} + \underbrace{\rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})}_{-\rho u^2\vec{\imath}} \right] dS = (p_B S_B - p_C S_C)\vec{\imath}$$

$$= (p_B - p_C)S_x\vec{\imath} \qquad (II.42)$$

Donc

$$\iint_{S_{contrôle}} p.\vec{n} + \rho\vec{V}(\vec{V}.\vec{n})dS = (-\rho u_1^2 S_1 + \rho u_2^2 S_2)\vec{\imath} + (p_B - p_C)S_x\vec{\imath} \qquad (II.43)$$

L'équation de continuité donne

$$S_x u = S_1 u_1 = S_2 u_2 \qquad (II.44)$$

Ainsi l'équation d'Euler donne

$$(p_B - p_C)S_x = -\rho u_1^2 S_1 + \rho u_2^2 S_2 = \rho S_x u(u_2 - u_1) \qquad (II.45)$$

On obtient alors

$$p_B - p_C = \rho u(u_2 - u_1) \qquad (II.46)$$

D'après la première question, on a obtenu

$$p_B - p_C = \frac{1}{2}\rho(u_1^2 - u_2^2) \qquad (II.47)$$

On en tire ainsi

$$u = \frac{u_2 + u_1}{2} \qquad (II.48)$$

Finalement, la force exercée par le fluide sur l'hélice est

$$F = (p_B - p_C)S_x = \frac{1}{2}\rho(u_1^2 - u_2^2)S_x \qquad (II.49)$$

La puissance fournie par l'hélice au fluide vaut $P_H = F.u$, et donc

$$P_H = (p_B - p_C)S_x = \frac{1}{4}\rho(u_1^2 - u_2^2)(u_2 + u_1)S_x \qquad (II.50)$$

**3.** Calcul de la valeur maximale du rendement

La puissance du fluide incident est son énergie cinétique par unité de temps

$$P_{inc} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}u_1^2 q_m \qquad (II.51)$$

Or $q_m = \rho S_1 u_1$, d'où

$$P_{inc} = \frac{1}{2}\rho u_1^3 S_1 \qquad (II.52)$$

Le rendement vaut alors

$$\eta = \frac{P_H}{P_{inc}} = \frac{2\rho(u_1^2 - u_2^2)uS_x}{2\rho u_1^3 S_1} = \frac{(u_1^2 - u_2^2)}{u_1^2} = 1 - \frac{u_2^2}{u_1^2} \qquad (II.53)$$

Le rendement maximum est $\eta_{max} = 1$, pour $u_2 = 0$ : il y a transfert total d'énergie entre l'hélice et le fluide.

## II. 4. Ecoulements potentiels

Parmi les écoulements des fluides parfaits, où la viscosité peut être négligée, apparait une classe importante d'écoulements qui s'effectuent en absence de tourbillons et de rotations propre. On parle alors d'un écoulement irrotationnel de fluide parfait ou en d'autre terme écoulement potentiel.

### II. 4. 1. Circulation du vecteur de vitesse le long d'une courbe

Soient deux points *A* et *B* du fluide et une courbe quelconque joignant ces deux points. On appelle circulation du vecteur vitesse entre ces deux points l'expression

$$\Gamma_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{V}.\vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} (u.dx + v.dy + w.dz) \qquad (II.54)$$

En général la circulation dépend des points *A* et *B* et de la forme du trajet $\widehat{AB}$.

### II. 4. 2. Potentiel des vitesses

Si le champ des vitesses est tel que la circulation ne dépend que de la position initiale *A* et finale *B* de la particule fluide et non du chemin suivi, on dit que ce champ dérive d'un potentiel. On peut alors écrire

$$\Gamma_{\widehat{AB}} = \varphi_B - \varphi_A = \int_{\widehat{AB}} d\varphi \qquad (II.55)$$

$$d\varphi = u.dx + v.dy + w.dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \qquad (II.56)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = w \qquad (II.57)$$

En coordonnées cylindrique, on aurait

$$d\varphi = u_r.dr + u_\theta.rd\theta + w.dz = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \qquad (II.58)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = u_r, \qquad \frac{\partial \varphi}{r\partial \theta} = u_\theta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w \tag{II.59}$$

Ce que l'on peut résumer vectoriellement en écrivant

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi \tag{II.60}$$

Il résulte que la circulation sur un contour fermée est nulle

$$\Gamma = \oint \vec{V}.\overrightarrow{dl} = \iint \overrightarrow{rot}(\vec{V}).\overrightarrow{dS} = 0 \tag{II.61}$$

Ainsi la condition de mouvement irrotationnel (de vorticité nulle $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{V}$) assure l'existence de la fonction scalaire $\varphi(M,t)$ appelée potentiel de vitesse.

### II. 4. 3. Débit massique et débit volumique

On appelle débit massique d'un écoulement à travers une surface *S* le flux de quantité de mouvement défini par

$$q_m = \iint_S \rho.\vec{V}.\vec{n}\, dS = \iint_S \rho.V_n.dS \tag{II.62}$$

$V_n$ : la projection du vecteur vitesse sur la normale de l'élément *dS*.

On appelle débit en volume à travers la surface *S* le flux du champ de vitesse traversant la surface *S*. Cette quantité est représentée par

$$q_v = \iint_S V_n.dS \tag{II.63}$$

### II. 4. 4. Fonction de courant

Considérons deux points *A* et *B* appartenant respectivement aux lignes de courant $C_1$, $C_2$. Joignons les points *A* et *B* par une courbe $\widehat{AMB}$ quelconque d'abscisse curviligne *S*. Soit $\vec{V}(M,t)$ la vitesse du fluide en *M*.

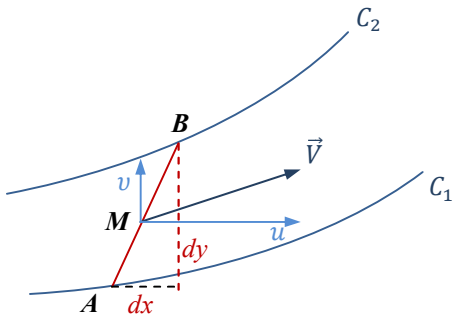



**Figure II.5** : Le débit volumique à l'intérieur du tube de courant

Le débit volumique à l'intérieur le tube limité par $C_1$, $C_2$ est

$$\iint_S (\vec{V}.\vec{n})dS = \int dz \int_{AMB} (udy - vdx) \tag{II.64}$$

Ce débit $q_v$ est constant et indépendant de $\widehat{AMB}$ et on peut écrire

$$dq_v = udy - vdx = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \tag{II.65}$$

d'où

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{II.66}$$

La fonction ψ est appelée « fonction de courant ». En coordonnées polaires, on aurait

$$dq_v = v_r\, rd\theta - v_\theta dr = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}dr + \frac{\partial \psi}{r\partial \theta}rd\theta \tag{II.67}$$

d'où

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{II.68}$$

## II. 4. 5. Lignes de courant et équipotentielles

D'après la description eulérienne d'un écoulement plan à un instant fixe $t_1$, une ligne de courant est définie comme suit

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t_1)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t_1)} \tag{II.69}$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous une autre forme équivalente

$$-vdx + udy = 0 = \frac{\partial \psi}{dx}dx + \frac{\partial \psi}{dy}dy = d\psi \tag{II.70}$$

Ainsi le long de la ligne de courant le débit est constant $\psi = C^{te}$ et la relation $\frac{\partial y}{dx} = \frac{v}{u}$ doit être vérifiable.

Si l'écoulement est de plus irrotationnel, l'équation $\varphi = C^{te}$ définit une courbe nommée «équipotentielle». Le potentiel de vitesse qui est constant le long d'une telle courbe doit vérifier l'équation

$$udx + vdy = \frac{\partial \varphi}{dx}dx + \frac{\partial \varphi}{dy}dy = 0 \tag{II.71}$$

d'où la relation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \tag{II.72}$$

doit être vérifiée en tout point de l'équipotentielle.

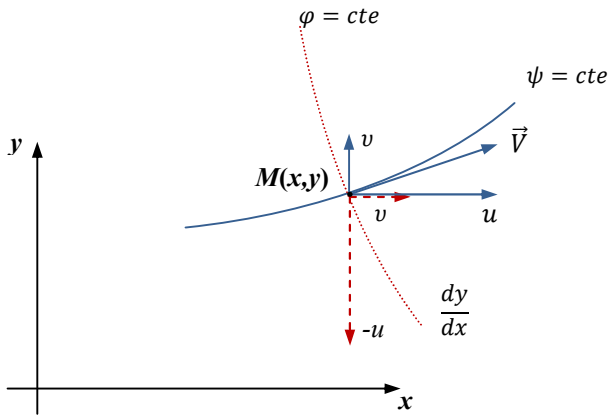



**Figure II.6** : Représentation qualitative de la ligne de courant et de l'équipotentielle dans le plan (*xOy*)

Ce qui signifie qu'en chacun de ses points, la courbe est orthogonale au vecteur vitesse. Il en résulte par ailleurs que **les équipotentielles sont partout orthogonales aux lignes de courant.**

## II. 4. 6. Ecoulements de base

Dans ce qui suit, on présente les principaux écoulements plans élémentaires

### a. Ecoulement uniforme

Soit un écoulement rectiligne uniforme de vitesse égale en module à $V_\infty$ inclinée d'un angle α sur l'axe des *x*. On peut écrire le champ des vecteurs vitesses

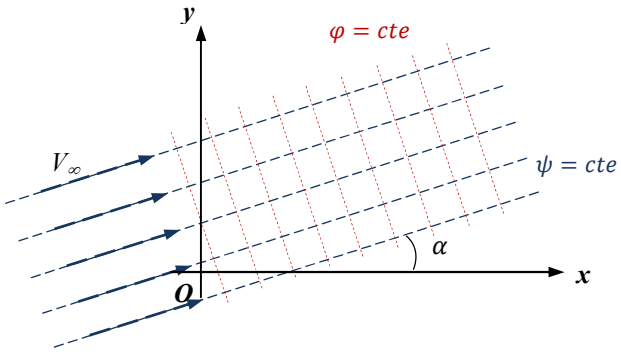



**Figure II.7** : Ecoulement uniforme de vitesse $V_\infty$

► en terme de fonction de courant

$$\begin{cases} u = V_\infty \cos\alpha = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = V_\infty \sin\alpha = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \qquad \text{(II. 73)}$$

► en terme du potentiel de vitesse

$$\begin{cases} u = V_\infty \cos\alpha = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = V_\infty \sin\alpha = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.}74)$$

Après intégration on aboutit à une fonction de courant de la forme

$$\psi(x,y) = -vx + uy \quad (\text{II.}75)$$

et un potentiel de vitesse s'écrivant comme suit

$$\varphi(x,y) = ux + vy \quad (\text{II.}76)$$

Ainsi les lignes de courant sont des droites inclinées d'un angle $\alpha$ sur l'axe des $x$ définies par l'expression

$$y = \frac{v}{u}x + \frac{C^{te}}{u} = \tan(\alpha).x + \frac{C^{te}}{V_\infty \cos\alpha} \quad (\text{II.}77)$$

et de même les équipotentielles sont droites définies par l'équation

$$y = -\frac{u}{v}x + \frac{C^{te}}{v} = -\cot(\alpha).x + \frac{C^{te}}{V_\infty \sin\alpha} \quad (\text{II.}78)$$

qui se réécrit comme suit

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).x + \frac{C^{te}}{V_\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \quad (\text{II.}79)$$

Cela montre que ces équipotentielles sont des droites inclinées d'un angle $\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ sur l'axe des $x$, ce qui confirme qu'ils sont perpendiculaires aux lignes de courant.

**b. Source/puits à l'origine**

Cet écoulement potentiel et incompressible est caractérisé par un champ de vitesse radiale de symétrie rotationnelle cylindrique qui tend vers 0 quand $r$ tend vers l'infini. Vue la condition de conservation du débit volumique $div\vec{V} = 0$ que doit vérifier cet écoulement, le profil de vitesse du fluide est de la forme $\vec{V}(r) = \frac{k}{r^n}\overrightarrow{e_r}$, $n=1$.

Le flux de $\vec{V}$ à travers le cylindre de hauteur $h$ et de rayon $r$ entourant le fil émettant (ou recevant) le fluide, et qui constitue une caractéristique de l'écoulement, est bien conservé.

$$\phi = 2\pi\, r\, h.v_r(r) = 2\pi\, h\, k \quad (\text{II.}80)$$

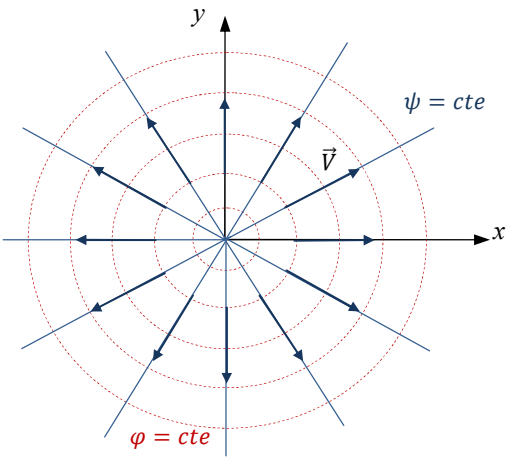



**Figure II.8** : Ecoulement d'une source placée à l'origine

Ce flux constitue le débit volumique par unité de longueur suivant (*Oz*), d'où

$$\phi = 2\pi\, h\, k = q_v h \Longrightarrow \vec{V}(r) = \frac{q_v}{2\pi r}\overrightarrow{e_r} \qquad (II.81)$$

Cet écoulement, qui est identique dans tout plan (*xOy*) perpendiculaire à (*Oz*), possède un point singulier $r = 0$ qui est l'origine *O* de chaque plan (*xOy*). Selon la valeur de $q_v$ positive ou négative, cette origine est qualifiée de source (apport ponctuel) ou puits (retrait ponctuel) bidimensionnel.

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{q_v}{2\pi r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \\ v_\theta = 0 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} \end{cases} \qquad (II.82)$$

La fonction de courant obtenue à partir du profil des vitesses est de la forme suivante

$$\psi(\theta) = \frac{q_v\theta}{2\pi} \qquad (II.83)$$

Les lignes de courant $\psi = C^{te}$ sont telles que $\theta = \frac{2\pi}{q_v}C^{te}$, cela veut dire qu'elles prennent une forme de droites passant toutes par l'origine du repère, ce qui certifie la forme radiale de l'écoulement.

À cet écoulement irrotationnel correspond un potentiel des vitesses $\varphi$ tel que

$$d\varphi = \vec{V}(r).\overrightarrow{dr} \Longrightarrow \varphi(r) = \frac{q_v}{2\pi} lnr + c \qquad (II.84)$$

La constante *c* doit être choisie de façon à imposer l'origine du potentiel $\varphi = 0$ en une valeur particulière $r = r_0$, d'où le potentiel se réécrit comme suit $\varphi = \frac{q_v}{2\pi} ln\frac{r}{r_0}$. Les équipotentielles qui doivent vérifier $\varphi = \frac{q_v}{2\pi} ln\frac{r}{r_0} = C^{te}$ sont des cercles concentriques sur l'origine du repère.

### c. Vortex simple

Le vortex est un écoulement à symétrie cylindrique, engendré par un fil tourbillonnaire lié à l'axe de symétrie (*Oz*). Le champ de vitesse bidimensionnel dans le plan perpendiculaire (*xOy*) au fil est orthoradiale $\vec{V} = v(r)\vec{e}_\theta$. A l'extérieur du noyau *O* « point de percé tourbillonnaire » l'écoulement est irrotationnel, ce qui veut dire que la particule fluide n'est pas soumise à une rotation mais plutôt à une translation circulaire.

Ainsi, la vorticité ou rotation locale est nulle en tout point de l'écoulement sauf au centre qui est un point singulier.

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{k} = \vec{0} \qquad (II.85)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial v_t} = -\frac{\partial r}{r} \Rightarrow v_\theta = \frac{k}{r} \qquad (II.86)$$

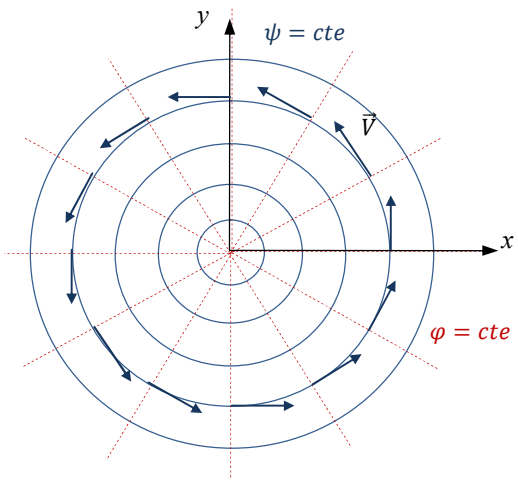



**Figure II.9** : Ecoulement d'un vortex simple placé à l'origine

La circulation *Γ* du vecteur de vitesse $\vec{V}$ le long d'un cercle, de rayon *r* et de centre *O* point de percé tourbillonnaire, est constante et non nulle

$$\Gamma = \oint_{Cercle} \vec{V}.\vec{dl} = 2\pi k = C^{te} \qquad (II.87)$$

De ce fait, la circulation *Γ* constitue la caractéristique du vortex mesurant l'intensité du fil tourbillonnaire et déterminant la vitesse par

$$\vec{V}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{e}_\theta \qquad (II.88)$$

Le signe de la constante Γ définit le sens de rotation, s'il est positif le vortex tourne dans le sens trigonométrique; s'il est négatif il tourne dans le sens des horaires.

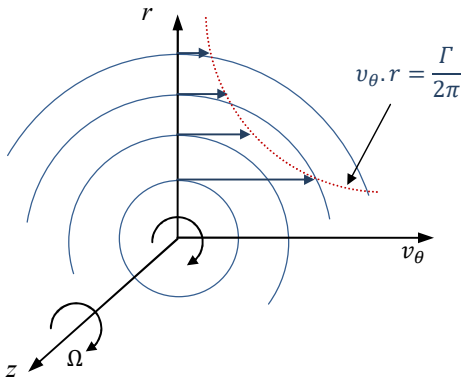



**Figure II.10** : Profil de vitesse du vortex simple engendré par le fil tourbillonnaire

Afin de déterminer la fonction de courant et le potentiel de vitesse on utilise les composantes de la vitesse définies en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} v_r = 0 \quad = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} = \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} \\ v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases} \qquad (II.89)$$

Après intégration, on aboutit à la fonction de courant définie comme suit

$$\psi(r) = -\frac{\Gamma}{2\pi} ln \frac{r}{r_0} \qquad (II.90)$$

Ce qui certifie que les lignes de courant sont des cercles concentriques sur l'origine du repère. Quant au potentiel de vitesse obtenu, il est de la forme suivante

$$\varphi(\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad (II.91)$$

et par conséquent, les équipotentielles sont radiales c'est à dire des droites passant toutes par l'origine du repère.

## II. 4. 7. Existence d'un écoulement irrotationnel et incompressible

Pour qu'un écoulement permanent et parallèle d'un fluide incompressible soit irrotationnel deux conditions doivent être satisfaites

i) conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial v}{dy} = 0 \qquad (II.92)$$

ii) vorticité nulle :

$$\frac{\partial v}{dx} - \frac{\partial u}{dy} = 0 \qquad (II.93)$$

En remplaçant les composantes de vitesse, écrites en fonction de la fonction de courant, dans l'équation (II.93), on obtient la condition suivante

$$\frac{\partial^2\psi}{dx^2}+\frac{\partial^2\psi}{dy^2}=0 \qquad (\text{II.}94)$$

En substituant les composantes de vitesse, écrites en fonction du potentiel de vitesse, dans l'équation (II.92), on abouti à la condition suivante

$$\frac{\partial^2\varphi}{dx^2}+\frac{\partial^2\varphi}{dy^2}=0 \qquad (\text{II.}95)$$

Ce résultat permet de confirmer que toute fonction $F(x,y)$ harmonique (vérifiant l'équation de Laplace) peut représenter la fonction de courant $\psi(x,y)$ ou le potentiel de vitesse $\varphi(x,y)$ d'un écoulement irrotationnel conservatif et incompressible.

## II. 4. 8. Principe de superposition

Les modèles simples que nous venons de décrire permettent de construire des écoulements plus complexes en utilisant une méthode de superposition. Considérons deux écoulements plans irrotationnels, d'un fluide incompressible, définies par les fonctions de courant $\psi_1(x,y)$ et $\psi_2(x,y)$. Ainsi ces fonctions de courant vérifient l'équation de Laplace comme suit

$$\frac{\partial^2\psi_1}{dx^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{dy^2}=0 \qquad (\text{II.}96)$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{dx^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{dy^2}=0 \qquad (\text{II.}97)$$

On peut écrire

$$\alpha\left(\frac{\partial^2\psi_1}{dx^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{dy^2}\right)+\beta\left(\frac{\partial^2\psi_2}{dx^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{dy^2}\right)=0 \qquad (\text{II.}98)$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes. Cette équation peut se réécrire sous cette forme

$$\frac{\partial^2}{dx^2}\underbrace{(\alpha\psi_1+\beta\psi_2)}_{\psi_{tot}}+\frac{\partial^2}{dy^2}\underbrace{(\alpha\psi_1+\beta\psi_2)}_{\psi_{tot}}=0 \qquad (\text{II.}99)$$

Ainsi l'équation de Laplace est linéaire et donc le principe de superposition est d'application. De ce fait, la combinaison des écoulements de base c'est-à-dire simples peut permettre d'envisager des écoulements composés.

## II. 4. 9. Les écoulements composés

### a. Doublet et dipôle

On Considère maintenant la combinaison d'un puits et d'une source, symétriquement disposés autour du centre *O*, au sein d'un même écoulement plan. La position de la source de débit $q_v$ est en $x=-a$, $y=0$ tandis que celle du puits de débit -$q_v$ est en $x=a$, $y=0$. Il s'agit alors de l'écoulement généré par un « **doublet** » que nous nous proposons de l'exprimer analytiquement.

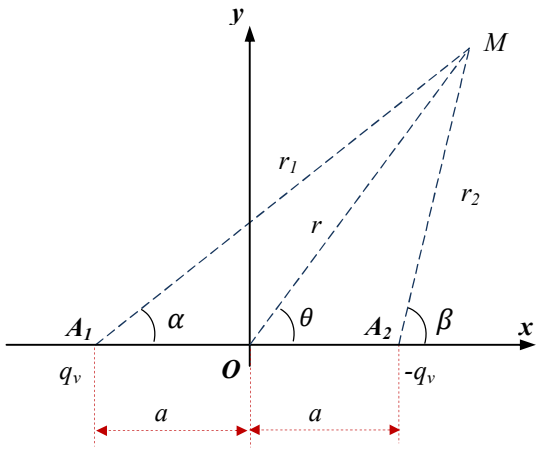



**Figure II.11** : Notations utilisées pour l'étude du doublet

En un point $M(r,\theta)$, superposons le vecteur de vitesse $\vec{V}_1 = \frac{q_v}{2\pi r_1}\frac{\vec{r}_1}{r_1}$, de fonction de courant

$$\psi_1 = \frac{q_v \alpha}{2\pi} \qquad \text{(II. 100)}$$

d'une source bidimensionnelle, d'axe ($Oz$) coupant le plan ($xOy$) en $A_1$ $\left(\vec{r}_1 = \overrightarrow{A_1M}\right)$, et le vecteur de vitesse $\vec{V}_2 = -\frac{q_v}{2\pi r_2}\frac{\vec{r}_2}{r_2}$, de fonction de courant

$$\psi_2 = -\frac{q_v \beta}{2\pi} \qquad \text{(II. 101)}$$

d'un puits bidimensionnel, de même axe coupant le plan ($xOy$) en $A_2$ $\left(\vec{r}_2 = \overrightarrow{A_2M}\right)$.

L'écoulement résultant de la superposition de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ aura une fonction de courant telle que

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q_v}{2\pi}(\alpha - \beta) = \frac{q_v}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \,.\, \tan\beta}\right) \qquad \text{(II. 102)}$$

En faisant intervenir les coordonnées cartésiennes

$$\tan\alpha = \frac{y}{x+a}\,, \qquad \tan\beta = \frac{y}{x-a} \qquad \text{(II. 103)}$$

la fonction de courant se réécrit comme suit

$$\psi(x,y) = \frac{q_v}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \qquad \text{(II. 104)}$$

Ainsi, les lignes de courant $\psi = cte$ correspondent aux points tels que

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{k}\right)^2 = a^2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right), \qquad k = \tan\left(-\frac{2\pi}{q_v}.cte\right) \qquad \text{(II. 105)}$$

c'est-à-dire à des cercles, passant par l'origine du puits et l'origine de la source, ayant comme centre $C\left(0,\frac{a}{k}\right)$ un point de l'axe des $y$ et un rayon de valeur $R=\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$. Le long de ces lignes de courant l'écoulement des particules fluides diverge depuis la source et converge vers le puits.

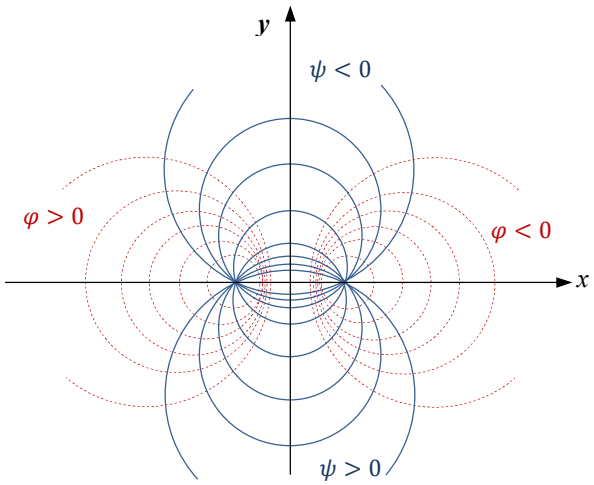



**Figure II.12** : Tracé des lignes de courant et les équipotentielles d'un doublet

Par ailleurs, le potentiel de vitesse résultant de la superposition des vitesses $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ est défini par la relation

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{q_v}{2\pi}ln\frac{r_1}{r_2} \qquad (II.106)$$

et se réécrit, dans le système des coordonnées cartésiennes, comme suit

$$\varphi(x,y)=\frac{q_v}{2\pi}ln\left(\frac{\sqrt{[(x+a)^2+y^2]}}{\sqrt{[(x-a)^2+y^2]}}\right)=\frac{q_v}{4\pi}ln\left(\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}\right) \qquad (II.107)$$

Les lignes équipotentielles sont telles que

$$\varphi=cte\Longrightarrow k=\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2},\qquad k=exp\left(\frac{4\pi}{q_v}.cte\right) \qquad (II.108)$$

$$\Longrightarrow\left(x-\frac{k+1}{k-1}a\right)^2+y^2=\frac{4k}{(k-1)^2} \qquad (II.109)$$

cela veut dire qu'elles prennent la forme de cercles centrées sur l'axe des $x$, ce qui certifie qu'elles sont orthogonales en tout point aux lignes de courant.

A présent, on fait tendre vers zéro la distance entre le puits et la source $2a\rightarrow 0$ et le débit de la source et du puits vers l'infini $q_v\rightarrow\infty$ de façon à garder le produit $2aq_v$ constant. Dans ces conditions, on superpose le puits et la source à l'origine, en créant ainsi un « **dipôle hydrodynamique**» d'intensité $\mu=2aq_v$.

Ainsi, l'expression de la fonction de courant est le résultat de la limite suivante

$$\psi(x,y)=\lim_{\substack{a\rightarrow 0\\ q_v\rightarrow\infty}}\left[\frac{q_v}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}\right)\right]\Bigg|_{2aq_v=\mu} \qquad (II.110)$$

En faisant intervenir le développement de Taylor de la fonction arc tangente à l'ordre1 (le premier terme non nul du développement au voisinage de zéro : $\lim_{x\to 0} \tan^{-1} x = x$), on obtient

$$\psi(x,y) = -\frac{\mu}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = \psi(r,\theta) = -\frac{\mu}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} \qquad (II.111)$$

Une ligne de courant vérifiant $\psi = cte$, son équation se formule comme suit

$$\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{2\pi.cte}{\mu} \Leftrightarrow x^2 + \left(y+\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}, k = \frac{\mu}{2\pi.cte} \qquad (II.112)$$

autrement dit à chaque valeur de $k$ correspond une ligne de courant de forme cercle passant par l'origine et dont le centre se trouve sur l'axe des $y$.

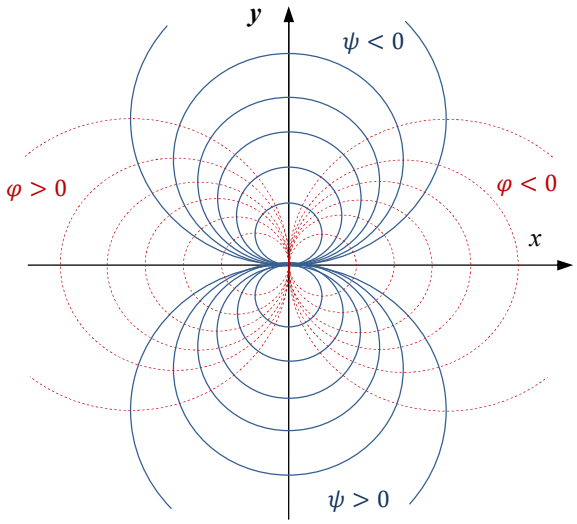



**Figure II.13** : Tracé des lignes de courant et des équipotentielles d'un dipôle

Quant au potentiel de vitesse il est le résultat de la limite suivante

$$\varphi(x,y) = \lim_{\substack{a\to 0 \\ q_v\to\infty}} \left[\frac{q_v}{4\pi} ln\left(\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}\right)\right]\Bigg|_{2aq_v=\mu} \qquad (II.113)$$

A l'aide du développement de Taylor de la fonction «*ln*» au premier l'ordre (le premier terme non nul : $\lim_{x\to 0} ln(1+x) \longrightarrow x$), on obtient

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q_v}{4\pi}\left[\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} - 1\right]\Bigg|_{\substack{a\to 0 \\ q_v\to\infty \\ 2aq_v=\mu}} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{cos\,\theta}{r} \qquad (II.114)$$

ce qui montre que les équipotentielles $\varphi = C^{te}$, comme montré sur la figure (II.13), sont aussi des cercles passant par l'origine mais dont les centres se trouvent sur l'axe des $x$.

**b. Ecoulement autour d'un corps fictif immobile "Solide de Rankine"**

L'écoulement potentiel considéré ici est obtenu par superposition d'une source de débit $q_v$, placée à l'origine du repère et d'un écoulement uniforme de vitesse $U_0 > 0$ à l'infini et parallèle à l'axe $(Ox)$.

Les expressions de fonction de courant et du potentiel pour l'écoulement résultant s'obtiennent par addition de ces fonctions pour chacun des deux écoulements, soit

$$\begin{cases} \psi(r,\theta) = U_0 r \sin\theta + \dfrac{q_v}{2\pi}\theta \\ \varphi(r,\theta) = U_0 r \cos\theta + \dfrac{q_v}{2\pi} ln\, r \end{cases} \qquad (II.115)$$

■ **Champ de vitesse**

Les composantes du champ de vitesse de cet écoulement ont pour expressions

$$\begin{cases} v_r(r,\theta) = U_0 \cos\theta + \dfrac{q_v}{2\pi}\dfrac{1}{r} \\ v_\theta(r,\theta) = -U_0 \sin\theta \end{cases} \qquad (II.116)$$

■ **Point d'arrêt**

Les expressions ci-dessus s'annulent en un point, de coordonnées $r_A$ et $\theta_A$ qualifié de point d'arrêt $A$ à l'écoulement. Ces coordonnées sont déterminées comme suit

$$v_\theta = U_0 \sin\theta = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \theta_A = 0, \quad v_r = 0 = U_0 + \dfrac{q_v}{2\pi}\dfrac{1}{r_A} \Longrightarrow r_A = -\dfrac{q_v}{2\pi U_0} \\ \theta_A = \pi, \quad v_r = 0 = -U_0 + \dfrac{q_v}{2\pi}\dfrac{1}{r_A} \Longrightarrow r_A = \dfrac{q_v}{2\pi U_0} \end{cases} \qquad (II.117)$$

La solution acceptée est $\theta_A = \pi$, $r_A = \dfrac{q_v}{2\pi U_0}$, d'où le point d'arrêt $A$ appartient à l'axe des $x$ d'abscisse $x_A = -\dfrac{q_v}{2\pi U_0}$.

■ **Lignes de courant**

Les lignes de courant ont pour équations :

$$U_0 r \sin\theta + \frac{q_v}{2\pi}\theta = C^{te} \qquad (II.118)$$

Il ne s'agit pas, en général, de courbes simples. Cependant en imposant que les coordonnées $\theta_A = \pi$, $r_A = \dfrac{q_v}{2\pi U_0}$ vérifient l'équation générale des lignes de courant, on obtient pour équation de celle passant par le point d'arrêt

$$U_0\, r_A \sin\theta_A + \frac{q_v}{2\pi}\theta_A = C^{te} \Rightarrow \begin{cases} U_0 r \sin\theta + \dfrac{q_v}{2}\left(\dfrac{\theta}{\pi} - 1\right) = 0, & 0 < \theta < \pi \\ U_0 r \sin\theta + \dfrac{q_v}{2}\left(\dfrac{\theta}{\pi} + 1\right) = 0, & -\pi < \theta < 0 \end{cases} \quad \text{(II. 119)}$$

On déduit que l'axe des $x$ appartient à cette ligne et la divise en deux parties symétriques qui passent par l'axe des $y$ en deux points $B_1$, $B_2$ d'ordonnées $y = \pm {q_v}/{4U_0}$. Ces deux parties admettent deux asymptotes définies comme suit

Pour $0 < \theta < \pi$ , on a : $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi\left(-\frac{2U_0}{q_v}y + 1\right)$ et comme $0 < \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$0 < -\frac{2U_0}{q_v}y + 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{q_v}{2U_0} > y > \frac{q_v}{4U_0} \quad \text{(II. 120)}$$

Pour $-\pi < \theta < 0$ , on a : $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi\left(-\frac{2U_0}{q_v}y - 1\right)$ et $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) < 0$, d'où résulte

$$-\frac{1}{2} < -\frac{2U_0}{q_v}y - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{q_v}{4U_0} > y > -\frac{q_v}{2U_0} \quad \text{(II. 121)}$$

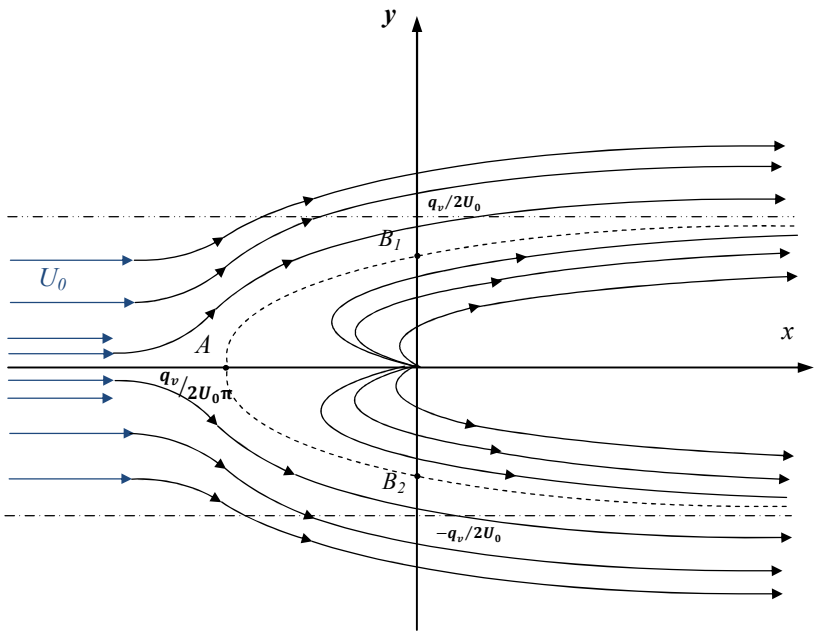



**Figure II.14**: Lignes de courant de l'association d'une source et d'un écoulement uniforme

Comme le montre la configuration de l'écoulement illustrée par la figure ci-dessus, les asymptotes de la ligne de courant ($B_1AB_2$), passant par le point d'arrêt, sont horizontales d'ordonnées $y = \pm q_v/2U_0$ c'est-à-dire symétriques par rapport à l'axe des $x$.

En matérialisant une surface $\sum$ d'envergure unité s'appuyant, dans le pan ($xOy$), sur la ligne de courant $B_1AB_2$ passant par le point d'arrêt on génère un solide dit "solide de Rankine".

En raison de la non-symétrie par rapport à ($Oy$), l'écoulement uniforme à l'infini génère sur $\sum$ des forces de pression de résultante parallèle à ($Ox$) appelée la traînée de pression (profil d'aile d'avion).

**c. Ecoulement autour d'un cylindre sans circulation**

On considère maintenant l'écoulement potentiel résultant de superposition d'un écoulement uniforme de vitesse $U_0 > 0$ à l'infini et parallèle à l'axe des x et d'un dipôle d'intensité positive $\mu = U_0 a^2$ placée à l'origine du repère.

En vertu du principe de superposition, les expressions de fonction de courant et du potentiel pour l'écoulement résultant s'obtiennent par addition de ces fonctions pour chacun des deux écoulements, soit

$$\begin{cases} \psi(r,\theta) = U_0 r \sin\theta \left(1 - \dfrac{\mu}{2\pi U_0 r^2}\right) \\ \varphi(r,\theta) = U_0 r \cos\theta \left(1 + \dfrac{\mu}{2\pi U_0 r^2}\right) \end{cases} \qquad (\text{II.}122)$$

■ **Champ de vitesse**

Les composantes du champ de vitesse de cet écoulement ont pour expressions

$$\begin{cases} v_r(r,\theta) = U_0 \cos\theta \left(1 - \dfrac{\mu}{2\pi U_0 r^2}\right) \\ v_\theta(r,\theta) = -\, U_0 \sin\theta \left(1 + \dfrac{\mu}{2\pi U_0 r^2}\right) \end{cases} \qquad (\text{II.}123)$$

■ **Point d'arrêt**

Les points d'arrêt sont obtenus pour $v_r = 0$ et $v_\theta = 0$. De ces conditions on en déduit aisément deux points d'arrêt $A$ et $A'$ dont les coordonnées sont respectivement $\left(r_A = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U_0}},\ \theta_A = \pi\right)$, $\left(r_{A'} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U_0}}, \theta_{A'} = 0\right)$. Ces points sont placées sur l'axe des x de façon symétrique part à l'origine.

■ **Lignes de courant**

Les lignes de courant ont pour équations

$$U_0 r \sin\theta \left(1 - \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2}\right) = C^{te} \qquad (\text{II.}124)$$

L'équation de la ligne de courant passant par les points d'arrêt doit être vérifiée par leurs coordonnées $\psi(r_A, \theta_A) = \psi(r_{A'}, \theta_{A'}) = C^{te}$, soit

$$\sin\theta_A \left(U_0\, r_A - \frac{\mu}{2\pi\, r_A}\right) = C^{te} = 0 \Longrightarrow \psi(r_A, \theta_A) = 0 \qquad (\text{II.}125)$$

Cette condition montre que ceux-ci relèvent nécessairement de l'un des deux cas suivants

$$\sin\theta_A = 0 \ (\text{cas } 1) \ \text{ ou } \ r_A = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U_0}} \ (\text{cas } 2) \qquad (\text{II.}126)$$

La courbe correspondante ($\psi(r_A, \theta_A) = 0$ se décompose en deux parties : l'axe des *x* et le cercle centré à l'origine du repère de rayon $r_A = \sqrt{\mu/2\pi U_0}$. Le long du cercle ou ligne de courant $\psi = 0$ la propriété de tangentialité du vecteur vitesse est vérifiée car la composante radiale de la vitesse est nulle $v_r(r_A) = 0$.

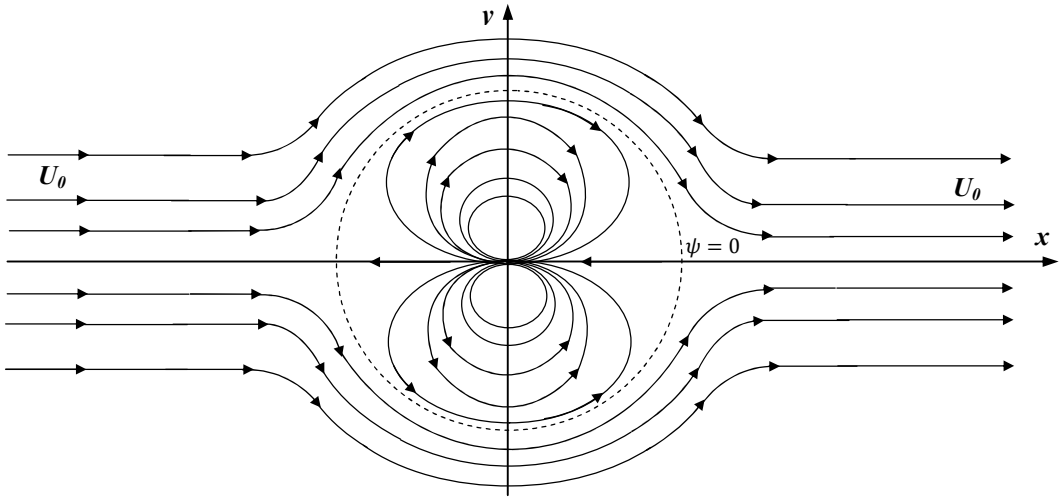



**Figure II.15**: Superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme

La configuration générale de l'écoulement, telle qu'elle est illustrée sur la figure (II.15), permet de discerner clairement deux régions situées à l'extérieur et à l'intérieur du cercle de rayon $r_A$. Dans la région externe, seul le débit de l'écoulement du champ uniforme à l'infini qui intervient, tandis que dans la région interne du cercle le mouvement du fluide est totalement engendré par la présence du dipôle à l'origine.

**Le calcul des efforts "Paradoxe de D'Alembert"**

En matérialisant une surface $\sum$ d'envergure unité s'appuyant dans le plan (*xOy*) sur le cercle et sous la restriction $r \geq r_A$, on se trouve devant la situation d'un cylindre centré à l'origine et de rayon $r_A$ plongé dans un écoulement de vitesse uniforme $U_0$ à l'infini.

Afin de calculer l'effort global exercé par le fluide sur l'obstacle qui est le cylindre on applique le théorème d'Euler. On considère que l'écoulement étudié est de celui d'un fluide parfait glissant sans frottement sur un obstacle. De ce fait, seules les forces de pression qui intervient comme forces de surfaces dans ce problème. La résultante de ces forces sur le cylindre s'obtient par intégration sur son contour comme suit

$$\vec{F} = -\iint_{\Sigma} p\,\vec{n}\,dS \qquad (\text{II.}127)$$

où *dS* est l'élément de surface ∑ d'envergure unité (longueur en *z* est l'unité). La normale $\vec{n}$ est extérieure et comme l'effort recherché est la force exercée par le fluide sur le cylindre c'est à dire dans à l'opposée de la normale un signe négatif apparait. La projection de la force dans le repère (*xOy*) donne

$$\vec{F} = -\iint_{\Sigma} p(r_A,\theta)\vec{n}\ r_A d\theta \times (1m) \Longrightarrow \begin{cases} F_x = -\int_0^{2\pi} p(r_A,\theta)\cos\theta\, r_A d\theta \\ F_y = -\int_0^{2\pi} p(r_A,\theta)\sin\theta\, r_A d\theta \end{cases} \quad \text{(II. 128)}$$

$F_x$ appelée « traînée » représente la composante parallèle, au vecteur vitesse de l'écoulement à l'infini, de la force de pression exercée par le fluide sur le cylindre, tandis que $F_y$ dite « portance » est sa composante normale à l'écoulement.

L'évolution de la pression $p(r_A,\theta)$ autour du cylindre est obtenue par application du théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant circulaire (paroi du cylindre), en négligeant la différence en énergie potentielle, soit

$$p(r_A,\theta) + \frac{1}{2}\rho v^2(r_A,\theta) = c^{te} \quad \text{(II. 129)}$$

Comme la composante normale de la vitesse $v_r(r_A,\theta)$ est nulle à la paroi, seule la composante tangentielle contribue, d'où la pression s'écrit

$$p(\theta) = c^{te} - \frac{1}{2}\rho(2U_0\sin\theta)^2 \quad \text{(II. 130)}$$

d'où les composantes de la force de pression sont

$$\begin{cases} F_x = -c^{te}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + 2\rho r_0 {U_0}^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta = 0 \\ F_y = -c^{te}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta + 2\rho r_0 {U_0}^2\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\, d\theta = 0 \end{cases} \quad \text{(II. 131)}$$

On constate aisément qu'en raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe des *x* il n'exerce aucune force de portance sur le cylindre et en vue de la symétrie par rapport à l'axe des *y* il n'y a plus aussi de force de traînée.

Cela est en accord avec le paradoxe de D'Alembert : "L'effort exercé par un fluide sur un obstacle placé dans un écoulement uniforme à l'infini se décompose en effort de traînée (aligné avec le vecteur de vitesse à l'infini) et un effort de portance (perpendiculaire à la direction du vecteur vitesse à l'infini) ". La force de traînée est nulle si l'écoulement est irrotationnel, bidimensionnel, stationnaire et le fluide est incompressible homogène et parfait. La force de portance est également nulle si la circulation du vecteur vitesse le long du contour de l'obstacle est nulle ce qui est vérifié dans cet écoulement

$$\Gamma = \oint_C \vec{V}.\vec{dl} = 2U_0 r_0\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta = 0 \quad \text{(II. 132)}$$

### d. Ecoulement autour d'un cylindre en rotation "Effet de Magnus"

Dans cette partie, on va examiner ce que devient l'écoulement autour du cercle (de rayon $r_0$) en présence d'un vortex d'intensité $\Gamma$ ($\Gamma$>0) et d'axe ($Oz$).

Les expressions de fonction de courant et du potentiel pour l'écoulement résultant s'obtiennent par addition de ces fonctions pour chacun des trois écoulements, soit

$$\begin{cases} \psi(r,\theta) = U_0 r \sin\theta \left(1 - \dfrac{{r_0}^2}{r^2}\right) - \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln\dfrac{r}{r_0} \\ \varphi(r,\theta) = U_0 r \cos\theta \left(1 + \dfrac{{r_0}^2}{r^2}\right) + \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta \end{cases} \qquad (II.133)$$

■ **Champ de vitesse**

A partir des expressions de la fonction de courant où du potentiel de vitesse on peut en déduire que les composantes du champ de vitesse de cet écoulement ont pour expressions

$$\begin{cases} v_r(r,\theta) = U_0 \cos\theta \left(1 - \dfrac{{r_0}^2}{r^2}\right) \\ v_\theta(r,\theta) = -U_0\, sin\,\theta \left(1 + \dfrac{{r_0}^2}{r^2}\right) + \dfrac{\Gamma}{2\pi}\dfrac{1}{r} \end{cases} \qquad (II.134)$$

■ **Point d'arrêt**

Les points d'arrêt sont obtenus pour $v_r(r_A, \theta_A) = v_\theta(r_A, \theta_A) = 0$. La condition sur $v_r$ montre que ceux-ci relèvent nécessairement de l'un des deux cas suivants

$$\begin{cases} i)\ r_A = r_0 = \sqrt{\dfrac{\mu}{2\pi U_0}} & (\text{ cercle de rayon } r_0) \\ ii)\ \cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta_A = \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} & (\text{ axe des } y) \end{cases} \qquad (II.135)$$

***i*) Sur le cercle de circulation $\Gamma$:**

▸ *Premier cas :* $0 \le \Gamma < \Gamma_0$

La condition d'annulation $v_\theta(r_0, \theta_A) = 0$ conduit alors à : $\sin\theta_A = \Gamma/4\pi r_0 U_0$. En posant $\Gamma_0 = 4\pi r_0 U_0$ et sachant que la circulation du vortex c.à.d. du cercle est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ($\Gamma > 0$), la condition est satisfaite seulement si : $0 \le \Gamma/\Gamma_0 < 1$. On obtient alors deux points d'arrêt situés sur le cercle et symétriques par rapport à l'axe des $y$ repérés par les angles polaires

$$\theta_A = \sin^{-1}(\Gamma/\Gamma_0), \qquad \theta_{A'} = \pi - \sin^{-1}(\Gamma/\Gamma_0) \qquad (II.136)$$

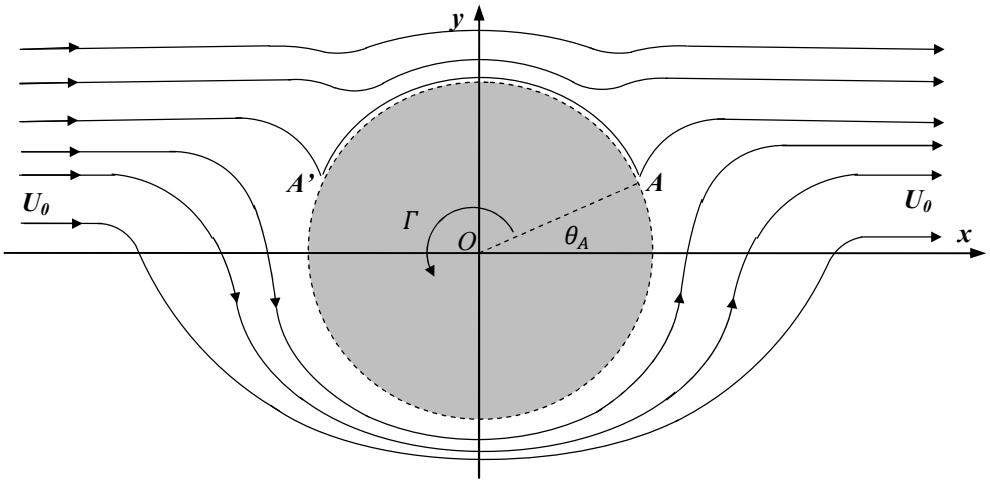



**Figure II.16**: Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation faible ($\Gamma < \Gamma_0$)

La configuration générale de l'écoulement est illustrée sur la figure ci-dessus, où on a porté seulement les lignes de courant de la partie externe au cercle. De l'exemple précédent ($\Gamma = 0$), on constate que l'ajout de la circulation avait un effet sur l'écoulement autour du cercle de façon à faire déplacer les points d'arrêt, symétriquement par rapport à l'axe ($Oy$), vers le haut d'une ordonnée proportionnelle à la valeur de $\Gamma$.

***ii*) Sur l'axe des *y* :**

La condition $v_\theta(r_0,\ \theta_A) = 0$, conduit à présent à

$$\sin\theta_A = \frac{\Gamma}{2\pi r_A U_0(1 + {r_0}^2/{r_A}^2)} > 0 \ \text{ et } \cos\theta_A = 0 \implies \theta_A = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(II. 137)}$$

d'où l'équation du deuxième degré en $r_A$ suivante

$${r_A}^2 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} r_A + {r_0}^2 = 0 \qquad \text{(II. 138)}$$

dont le déterminent réduit est $\Delta' = {r_0}^2\left[\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0}\right)^2 - 1\right]$ avec $\Gamma_0 = 4\pi r_0 U_0$. Il existe des solutions pour l'équation s'il est positif ou nul c.à.d. si et seulement si $\Gamma \geq \Gamma_0$.

► *Deuxième cas : $\Gamma = \Gamma_0$*

Pour cette valeur critique de la circulation $\Gamma_0$, un point d'arrêt double se forme à l'intersection du cercle avec l'axe des *y*. On obtient la configuration générale de l'écoulement illustrée à la figure ci-dessous. Du cas précédent, on remarque que l'augmentation de la circulation $\Gamma$ a fait glisser les points d'arrêt le long du périmètre du cercle jusqu'à la position $\theta_A = \theta_{A'} = \pi/2$ où la vitesse linéaire issu de l'écoulement uniforme est maximale.

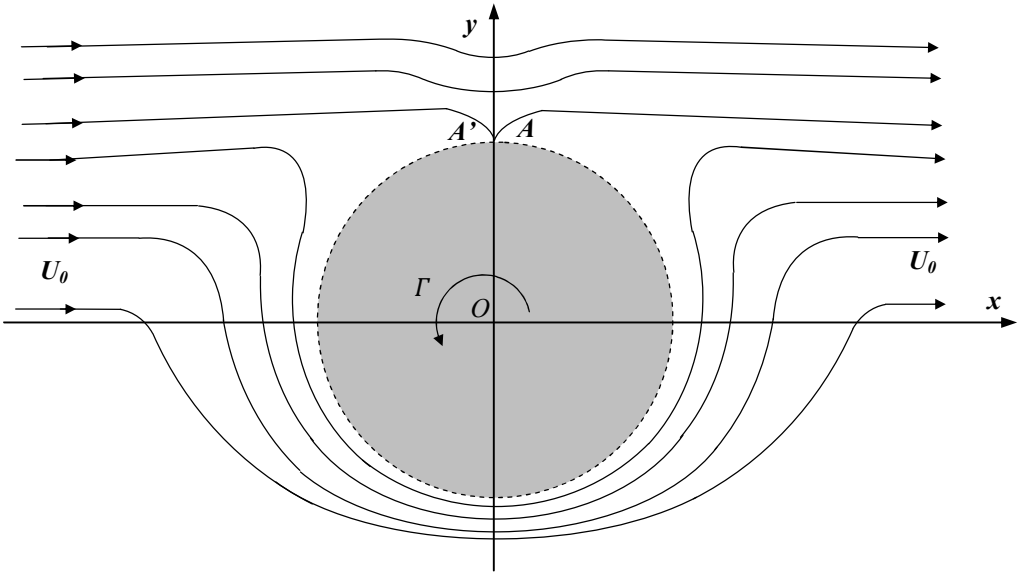



**Figure II.17**: Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation critique ($\Gamma = \Gamma_0$)

► *Troisième cas :* $\Gamma > \Gamma_0$

Le déterminent réduit de l'équation de la coordonnée radiale des points d'arrêts est alors positif de sorte que les solutions prennent la forme

$$r_A = r_{A'} = r_0 \left( (\Gamma / \Gamma_0) \pm [(\Gamma / \Gamma_0)^2 - 1]^{1/2} \right) \qquad \text{(II.139)}$$

où le produit des racines vaut ${r_0}^2$. Cela confirme que l'un des deux points d'arrêt, formés sur l'axe des *y*, est à l'intérieur du cercle du rayon $r_0$ et l'autre à l'extérieur. On aboutit ainsi à la configuration générale de l'écoulement illustrée à la figure ci-dessous.

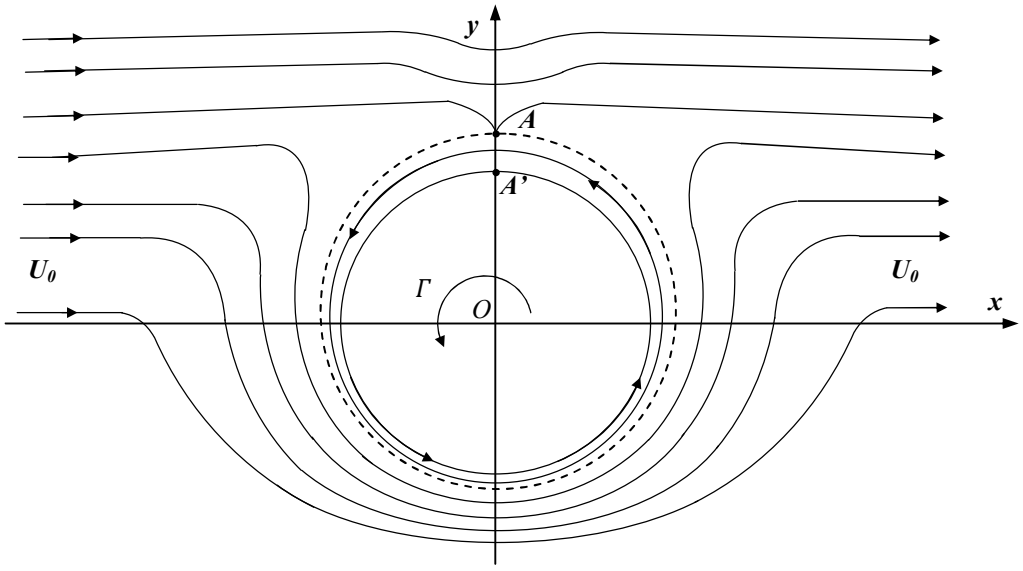



**Figure II.18**: Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation forte ($\Gamma > \Gamma_0$)

■ **Calcul des efforts d'effet Magnus**

Comme précédemment, en matérialisant une surface $\sum$ d'envergure unité s'appuyant dans le plan ($xOy$) sur le cercle et sous la restriction $r > r_0$, on se trouve devant la situation d'un cylindre de rayon $r_0$, centré à l'origine et en rotation autour de ($Oz$), plongé dans un écoulement de vitesse uniforme $U_0$ à l'infini.

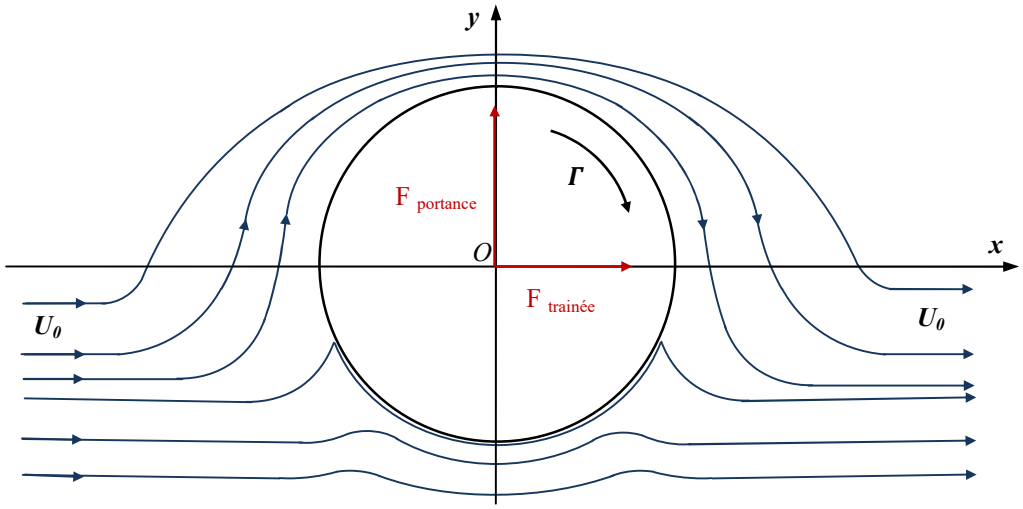



**Figure I.27**: Effet Magnus

Afin de calculer l'effort global exercé par le fluide sur l'obstacle qui est le cylindre, on applique le théorème d'Euler. En négligeant les forces de frottement, seules les forces de pression qui intervient comme forces de surfaces dans ce problème. La résultante de ces forces sur le cylindre s'obtient par intégration sur son contour comme suit

$$\vec{F} = -\iint_{\Sigma} p\,\vec{n}\,dS \qquad (\text{II.}140)$$

où $dS$ est l'élément de surface $\sum$ d'envergure unité (longueur en $z$ égale à $1m$). La projection de la force dans le repère ($xOy$) donne

$$\vec{F} = -\int_0^{2\pi} p(r_0,\theta)\vec{n}\; r_0 d\theta \times (1m) \qquad (\text{II.}141)$$

En négligeant la différence en énergie potentielle, l'évolution de la pression $p(r_0,\theta)$ autour du cylindre est

$$p(r_0,\theta) + \frac{1}{2}\rho v^2(r_0,\theta) = c^{te} \qquad (\text{II.}142)$$

Le module du vecteur vitesse se calcule au niveau de la surface du cylindre $v(r_0,\theta)$ en posant $r = r_0$ dans les expression générales des composantes

$$\begin{cases} v_r = U_0 \cos\theta \left(1 - \dfrac{{r_0}^2}{{r_0}^2}\right) = 0 \\ v_\theta = -U_0 \sin\theta \left(1 + \dfrac{{r_0}^2}{{r_0}^2}\right) + \dfrac{\Gamma}{2\pi r_0} = -2U_0 \left(\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{4\pi r_0 U_0}\right) \end{cases} \quad \text{(II. 143)}$$

d'où la pression s'écrit

$$p(\theta) = c^{te} - 2\rho {U_0}^2 \left(\sin\theta + \frac{\Gamma}{\Gamma_0}\right)^2, \qquad \Gamma_0 = 4\pi r_0 U_0 \quad \text{(II. 144)}$$

Les composantes de l'effort de Magnus $F_x, F_y$, respectivement appelées traînée et portance, peuvent être évaluées séparément

$$\begin{cases} F_x = -C \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta + 2\rho r_0 {U_0}^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta + \frac{2\Gamma}{\Gamma_0}\sin\theta\right)\cos\theta \, d\theta \\ F_y = -C \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta + 2\rho r_0 {U_0}^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta + \frac{2\Gamma}{\Gamma_0}\sin\theta\right)\sin\theta \; d\theta \end{cases} \quad \text{(II. 145)}$$

pour obtenir, après intégration

$$F_x = 0, \qquad F_y = -\rho U_0 \Gamma \quad \text{(II. 146)}$$

Ce résultat traduit l'absence de force de traînée en raison de la symétrie de la vitesse par rapport à l'axe des $y$ et la présence de force de portance (négative pour une circulation positive) connu sous le nom de l'effet Magnus. Le fait que $\Gamma$ soit non nul explique pourquoi le paradoxe de D'Alembert ne s'applique qu'à l'effort de traînée.

# CHAPITRE III.

# Dynamique des fluides réels

## III. 1. Introduction

Le fluide parfait étudié au chapitre précédent ne reflète pas convenablement le concret. En réalité, les fluides ont tous une viscosité qu'on doit tenir compte surtout près des parois solides où elle engendre des contraintes de cisaillement non négligeables.

Dans ce chapitre, on va reprendre l'équation de Navier-Stocks établie du bilan local de quantité de mouvement pour l'étude de quelques types particuliers d'écoulements incompressible au régime stationnaire. Dans ces exemples, on cherche des solutions analytiques dites laminaires, c'est-à-dire en imposant à priori la caractéristique d'écoulement parallèle où les lignes de courant sont parallèles aux parois.

## III. 2. Ecoulements parallèles ou unidirectionnels

Les écoulements turbulents se repèrent particulièrement au voisinage des obstacles. Quand l'écoulement d'un fluide est le siège de multiples tourbillons, on dit que cet écoulement est *turbulent*. Au contraire si l'écoulement semble se faire de manière bien parallèle, on parle d'écoulement *laminaire*.

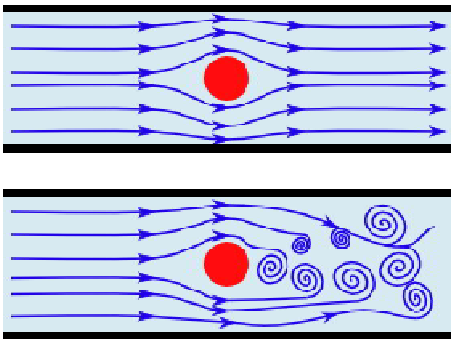


**Figure III. 1 :** Les régimes laminaire et turbulent des écoulements

L'écoulement laminaire d'un fluide incompressible se qualifie par un glissement de ses diverses couches (parallèles) les unes sur les autres sans échange de particules entre les différentes couches. Les écoulements parallèles sont ainsi unidirectionnels et leur étude peut être réalisée dans un plan au lieu d'un espace tridimensionnel, ce qui simplifie la résolution de l'équation vectorielle de Navier-Stocks et mène à des solutions analytiques exactes. Cette possibilité sera illustrée sur quelques cas simples d'écoulement parallèle de fluide incompressible.

## III.3. Ecoulement entre deux plaques parallèles

C'est un écoulement stationnaire et parallèle d'un fluide visqueux, newtonien et incompressible entre deux plaques infinies parallèles, distant de $2h$ et symétrique par rapport à $(Ox)$, en mouvement relatif uniforme (plaque supérieure mobile d'une vitesse constante $U_0$ et l'inférieure est fixe) dans leur plan.

Cet écoulement combine deux causes distinctes : l'effet visqueux dû au mouvement de la paroi et l'effet d'un gradient de pression. La première décrit l'écoulement de Couette, tandis que le mouvement du fluide créé par la deuxième présente le modèle de Poiseuille.

## III. 3. 1. Profil de vitesse

***Hypothèses simplificatrices***

- Ecoulement stationnaire : $\partial/\partial t = 0$
- Fluide incompressible : masse volumique $\rho = C^{te}$
- L'espace entre les plaques 2h est très petit par rapport aux dimensions des plaques ce qui rend la force de gravité négligeable devant les forces de viscosité et de pression.
- Ecoulement bidimensionnel et parallèle : vecteur de vitesse se réduit à $\vec{V} = u(x,y)\vec{\imath}$
- L'axe ($Ox$) est l'axe de symétrie au milieu du canal.

***Les conditions aux limites***

Le fluide visqueux adhère aux parois et vérifie la condition de non-glissement, ainsi les conditions aux limites sont

- Au niveau de la plaque inférieure fixe : $u(-h) = 0$
- Au niveau de la plaque supérieure mobile : $u(h) = U_0$

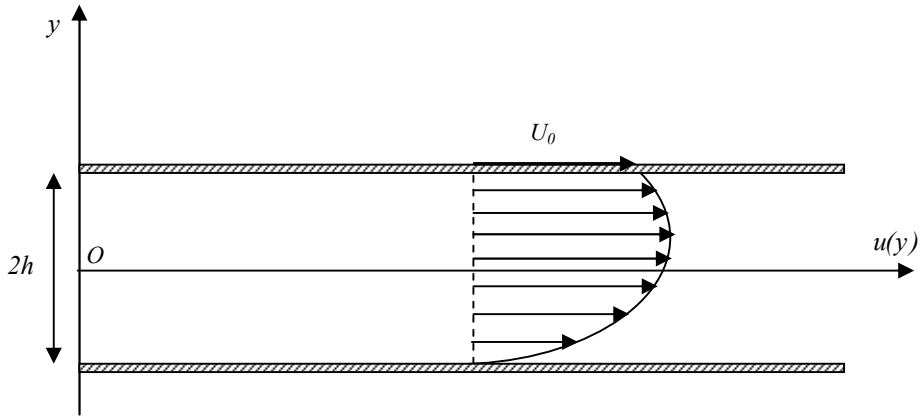



**Figure III. 2 :** Ecoulement entre deux plaques parallèles en mouvement relatif

***Equation de continuité***

L'équation de continuité se simplifie à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{(III. 1)}$$

Ce qui certifie que la composante de vitesse $u(y)$ de l'écoulement unidirectionnel ne dépend que de la variable $y$ transversale aux parois du canal.

***Equation de Navier-Stocks***

Grâce aux hypothèses caractérisant l'écoulement et citées précédemment le système d'équations de projection de l'équation vectorielle de Navier-Stokes dans le plan ($x$O$y$) se réduit considérablement à

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{(III. 2)}$$

Ce qui nous donne l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{III. 3}$$

Comme le terme du coté gauche ne dépend que de $y$ et terme du coté droit ne peut dépendre que de $x$, le gradient de pression $\partial p/\partial x$ est nécessairement une constante notons-la $A = dp/dx$.

Après une double intégration, par rapport à $y$, on obtient la forme générale du profil de vitesse

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}Ay^2 + C_1 y + C_2 \tag{III. 4}$$

En appliquant les conditions cinématiques d'adhérence, citées précédemment, pour déterminer les constantes $C_1$ et $C_2$, on aboutit à l'équation finale

$$u(y) = \frac{U_0}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \tag{III. 5}$$

Ce profil de vitesse est la superposition de deux écoulements :

- Le terme linéaire $\frac{U_0}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right)$ représente l'écoulement de Couette pur engendré uniquement par l'entraînement visqueux de la plaque supérieure.
- Le terme parabolique $-\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$ décrit l'écoulement de Poiseuille pur généré par la différence de pression.

Le paramètre $\gamma = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{U_0}$ traduit l'influence relative du gradient de pression et la viscosité au niveau de la paroi mobile sur la forme du profil de vitesse.

- $\gamma = 0$ $\left(\frac{dp}{dx} = 0\right)$ : Le profil de vitesse est linéique.
- $\gamma < 0$ $\left(\frac{dp}{dx} < 0\right)$ : Les forces motrices, c.à.d. force de pression et la force de viscosité à la paroi mobile, agissent dans le même sens.
- $\gamma > 0$ $\left(\frac{dp}{dx} > 0\right)$ : La force de pression s'oppose fortement au mouvement de plaque mobile, la viscosité agit dans le sens positif tandis que la pression s'oppose.

## III. 3. 2. Contrainte visqueuse

La contrainte visqueuse $\tau$ représente la force de friction par unité de surface que les couches de fluide exercent les unes sur les autres ou sur les parois. A partir du profil de vitesse, la contrainte visqueuse dans le fluide est déterminée, en coordonnées cartésiennes, par l'expression suivante

$$\tau_{xy}(x, y) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{III. 6}$$

Dans le cas de cet écoulement parallèle où la vitesse varie uniquement selon l'axe des $y$, l'expression de la contrainte se réduit à

$$\tau(y) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{(III. 7)}$$

De la première dérivée du profil de vitesse, on obtient l'expression générale de la contrainte en tout point $y$ entre les plaques

$$\tau(y) = \frac{dp}{dx} y + \mu \frac{U_0}{2h} \quad \text{(III. 8)}$$

Contrairement à un écoulement de Couette pur sans gradient de pression, où la contrainte est constante partout, en présence du gradient de pression la contrainte varie linéairement avec $y$.

Particulièrement au niveau de la paroi elle notée contrainte pariétale sa valeur est

- Au niveau de la paroi inférieure fixe

$$\tau_{inf} = -\frac{dp}{dx} h + \mu \frac{U_0}{2h} \quad \text{(III. 9)}$$

- Au niveau de la paroi supérieure mobile

$$\tau_{sup} = \frac{dp}{dx} h + \mu \frac{U_0}{2h} \quad \text{(III. 10)}$$

### III. 3. 3. Débit volumique et vitesse moyenne

Le débit volumique représente le volume de fluide qui traverse une section droite de l'écoulement, délimitée par les plaques parallèle, par unité de temps. Comme l'écoulement est bidimensionnel, on calcule le débit volumique, par unité de largeur suivant $z$, défini par

$$q_v = \int_{-h}^{h} u(y) dy = \int_{-h}^{h} \left[ \frac{U_0}{2} \left(1 + \frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \right] dy \quad \text{(III. 11)}$$

On intègre chaque terme séparément de $-h$ à $h$ pour aboutir à l'expression suivante

$$q_v = U_0 h - \frac{2h^3}{3\mu} \frac{dp}{dx} \quad \text{(III. 12)}$$

Une autre caractéristique importante est la vitesse moyenne du fluide définie comme la vitesse uniforme fictive qui permettrait d'obtenir le même débit volumique à travers la même section droite de l'écoulement. Pour une largeur unité l'aire de la section est $S = 2h$ et la vitesse moyenne est ainsi

$$u_{moy} = \frac{q_v}{2h} = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{U_0}{2} \quad \text{(III. 13)}$$

## III. 4. Ecoulement de Poiseuille cylindrique

C'est l'écoulement stationnaire et parallèle d'un fluide visqueux et incompressible à travers une conduite cylindrique rectiligne, de section constante de rayon $R$ et de longueur $L$, posée à l'horizontale. Contrairement à l'exemple précédent, de plaques parallèles, il n'y a pas d'effet de couette et le fluide visqueux est uniquement mis en mouvement par une différence de pression à l'intérieur du tube.

## III. 4. 1. Profil de vitesse

***Hypothèses simplificatrices***

- Ecoulement stationnaire : $\partial/\partial t = 0$.
- Fluide incompressible : masse volumique $\rho = C^{te}$.
- Conduite cylindrique supposée infinie pour éviter les effets de bords.
- Le rayon du tube très petit par rapport à sa longueur se qui rend la force de gravité négligeable devant les forces de viscosité et de pression.
- Symétrie rotationnelle cylindrique : $\partial/\partial\theta = 0$.
- Ecoulement bidimensionnel et parallèle : En coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ où l'axe $(Oz)$ est l'axe du cylindre, le vecteur de vitesse se réduit à : $\vec{V} = v_z(r, z)\vec{k}$.

***Les conditions aux limites***

Le fluide visqueux adhère à la paroi où il est freiné par les forces visqueuses et prend la vitesse de la paroi. La conduite étant fixe, la vitesse du fluide y est rigoureusement nulle :

- En $r = R : v_z(R) = 0$.

Comme l'écoulement possède une symétrie cylindrique la vitesse atteint son maximum, qui est une valeur finie, le long de l'axe de la conduite :

- En $r = 0 : v_z(0) < \infty$ et $(\partial v_z(r)/\partial r)|_{r=0} = 0$.

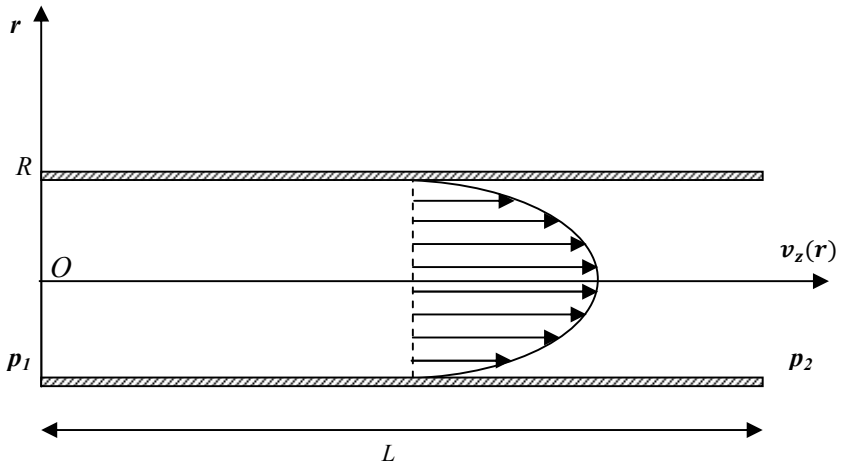



**Figure III. 3 :** Ecoulement de Poiseuille cylindrique

***Equation de continuité***

Dans les conditions de cet écoulement l'équation de continuité se réduit en

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r.v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \text{(III. 14)}$$

Cela traduit que le profil de vitesse ne varie pas d'une section droite à une autre et l'écoulement est donc développé. De ce fait, la composante de vitesse $v_z$ est fonction d'une seule variable qui est la coordonnée radiale $r$.

***Equation de Navier-Stocks***

A l'aide des hypothèses les projections de l'équation vectorielle de Navier-Stokes, dans la base $(O, \overrightarrow{e_r}, \vec{k})$, se réduit à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) \end{cases} \quad \text{(III. 15)}$$

La première projection confirme l'indépendance de pression de la coordonnée radiale, tandis que la deuxième se simplifie en un équilibre entre les forces de pression et les forces visqueuses.

Du fait que le terme du coté droit, de l'équation différentielle de $v_z$, ne dépend que de $r$ et le terme du coté gauche ne peut dépendre que de $z$, le gradient de pression $\partial p/\partial z$ est certainement une constante notons-la $A = dp/dz$.

Ainsi la pression est une fonction linéaire de $z$ et à l'aide des conditions au limites $p_e$ et $p_s$ elle s'écrit comme suit

$$p(z) = \frac{p_s - p_e}{L} z + p_e \quad \text{(III. 16)}$$

En compactant la dérivée de $v_z$ dans l'équation différentielle, on peut écrire

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad \text{(III. 17)}$$

Par une double intégration, par rapport à $r$, de l'équation différentielle de $v_z$, on obtient

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad \text{(III. 18)}$$

On détermine les constantes $C_1$ et $C_2$ à l'aide des conditions aux limites, citées précédemment, pour aboutir à l'expression de vitesse suivante

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{L}(R^2 - r^2) \quad \text{(III. 19)}$$

où $\Delta p = p_e - p_s$ est la différence de pression engendrant l'écoulement à travers le tube.

Ce profil de vitesse est donc parabolique et au centre du tube $r = 0$ elle atteint sa valeur maximale égale à

$$v_{max} = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{L} R^2 \quad \text{(III. 20)}$$

## III. 4. 2. Contrainte visqueuse

La contrainte visqueuse, dans le plan $(r, z)$ des coordonnées cylindriques, est déterminée par l'expression suivante

$$\tau_{rz}(r, z) = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad \text{(III. 21)}$$

Comme l'écoulement est axial $v_r = 0$ et développé $\partial v_z/\partial z = 0$, la relation se simplifie grandement et devient

$$\tau_{rz}(r) = \mu\frac{\partial v_z}{\partial r} \quad \text{(III. 22)}$$

A partir du profil de vitesse, on obtient

$$\tau_{rz}(r) = -\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{L}r \qquad \text{(III. 23)}$$

Elle a une forme linéaire par rapport à la distance radiale. Le signe moins indique qu'elle agit, contrairement au gradient de pression, comme force de freinage.

Au niveau de la paroi de la conduite, elle est pariétale et son intensité est maximale et de valeur égale à

$$\tau_p = \frac{\Delta p.R}{2L} \qquad \text{(III. 24)}$$

### III. 4. 3. Débit volumique (loi de Hagen-Poiseuille)

Le débit volumique est le volume de fluide qui traverse la section droite de la conduite cylindrique par unité de temps. Il défini par la relation

$$q_v = \iint v_z(r)\vec{k}\,.ds\,\vec{k} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} \left[\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{L}\left(R^2 - r^2\right)\right].rdr \qquad \text{(III. 25)}$$

En intégrant chaque terme, séparément sur $r$, de 0 à $R$ et en multipliant le résultat par l'intégrale de $\theta$ qui donne $2\pi$, on aboutit à

$$q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{L} = \frac{\pi D^4}{128\mu}\frac{\Delta p}{L} \qquad \text{(III. 26)}$$

La vitesse moyenne du fluide à travers la section droite de l'écoulement dont l'aire est $S = \pi R^2$ est ainsi

$$v_{moy} = \frac{q_v}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu}\frac{\Delta p}{L} \qquad \text{(III. 27)}$$

## III. 5. Ecoulement de Poiseuille annulaire

L'écoulement de Poiseuille annulaire décrit ce qui se passe dans un espace compris entre deux tubes cylindriques fixes, coaxiaux lorsqu'un fluide y est poussé par une différence de pression. Les deux tubes, interne de rayon $R_1$ et externe de rayon $R_2$, sont de longueur $L$ et posés à l'horizontal et à travers l'espace annulaire entre eux le fluide visqueux et incompressible est en écoulement stationnaire et parallèle.

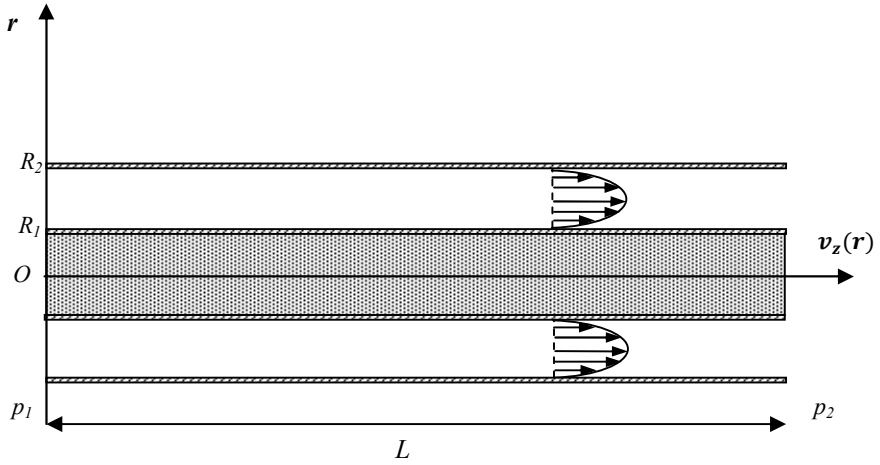



**Figure III. 4 :** Ecoulement annulaire entre deux cylindres coaxiaux

## III. 5. 1. Profil de vitesse

***Hypothèses simplificatrices***

- Ecoulement stationnaire : $\partial/\partial t = 0$.
- Fluide incompressible : $\rho = C^{te}$.
- Ecoulement à symétrie de révolution cylindrique : $\partial/\partial\theta = 0$.
- L'espace annulaire est très petit par rapport à la longueur des tubes se qui rend la force de gravité négligeable devant les forces de viscosité et de pression.
- Ecoulement bidimensionnel et parallèle : En coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ où l'axe $(Oz)$ est l'axe du cylindre, le vecteur de vitesse se réduit à : $\vec{V} = v_z(r,z)\vec{k}$.

***Les conditions aux limites***

Les conditions cinématiques d'adhérence au niveau des parois des cylindres sont

- En $r = R_1$ paroi interne : $v_z(R_1) = 0$.
- En $r = R_2$ paroi externe : $v_z(R_2) = 0$.

***Equation de Navier-Stocks***

A partir des équations, de continuité et de quantité de mouvement, et à l'aide des hypothèses précédentes, on aboutit à une équation différentielle locale régissant la vitesse identique que celle du problème précédent dont la solution est

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + C_1 \ln r + C_2 \qquad \text{(III. 28)}$$

Ce problème est différencié du précédent par les conditions aux limites c.à.d. au niveau des parois fixes, ce qui modifie complètement la forme de la solution finale. Le rayon $r$ ne vaut jamais $0$ car $R_1 < r < R_2$ et le terme $ln(r)$ ne diverge pas la vitesse ce qui rend son coefficient $C_1$ n'est pas nul et son profil dissymétrique et de la forme suivante

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{L}\left[(R_2^2 - r^2) + (R_2^2 - R_1^2)\frac{ln(r/R_2)}{ln(R_2/R_1)}\right] \qquad \text{(III. 29)}$$

## III. 5. 2. Contrainte visqueuse

Comme l'écoulement est axial $v_r = 0$ et développé $\partial v_z/\partial z = 0$, la contrainte visqueuse se réduit à

$$\tau_{rz}(r) = \mu\frac{\partial v_z}{\partial r} \qquad \text{(III. 30)}$$

De la première dérivée de vitesse, on obtient l'expression générale de la contrainte en toute position radiale $r$ entre les deux cylindres

$$\tau_{rz}(r) = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{L}\left[-r + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2ln(R_2/R_1)}\frac{1}{r}\right] \qquad \text{(III. 31)}$$

Au niveau de la paroi du cylindre interne, la contrainte est égale à

$$\tau_{int} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{L}\left[-R_1 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2ln(R_2/R_1)}\frac{1}{R_1}\right] \qquad \text{(III. 32)}$$

Au niveau de la paroi du cylindre externe, la contrainte est égale à

$$\tau_{ext} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{L}\left[-R_2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2ln(R_2/R_1)}\frac{1}{R_2}\right] \qquad \text{(III. 24)}$$

### III. 5. 3. Débit volumique

Le volume du fluide traversant la section droite, de l'espace annulaire des deux cylindres coaxiaux, par unité de temps est

$$q_v = \iint v_z(r)ds = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{L}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2}\left[(R_2^2 - r^2) + (R_2^2 - R_1^2)\frac{ln(r/R_2)}{ln(R_2/R_1)}\right].rdr \qquad \text{(III. 30)}$$

En intégrant chaque terme séparément, on aboutit à

$$q_v = \frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{L}\left[(R_2^4 - R_1^4) - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{ln(R_2/R_1)}\right] \qquad \text{(III. 31)}$$

## III. 6. Ecoulement de Couette cylindrique

Cet écoulement désigne le mouvement stationnaire et laminaire d'un fluide visqueux et incompressible dans l'espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux animés d'un mouvement de rotation relative et uniforme. Contrairement au cas précédent où l'écoulement est provoqué par une différence de pression, ici le mouvement du fluide est uniquement induit par l'entraînement visqueux pariétal créé par les rotations des cylindres.

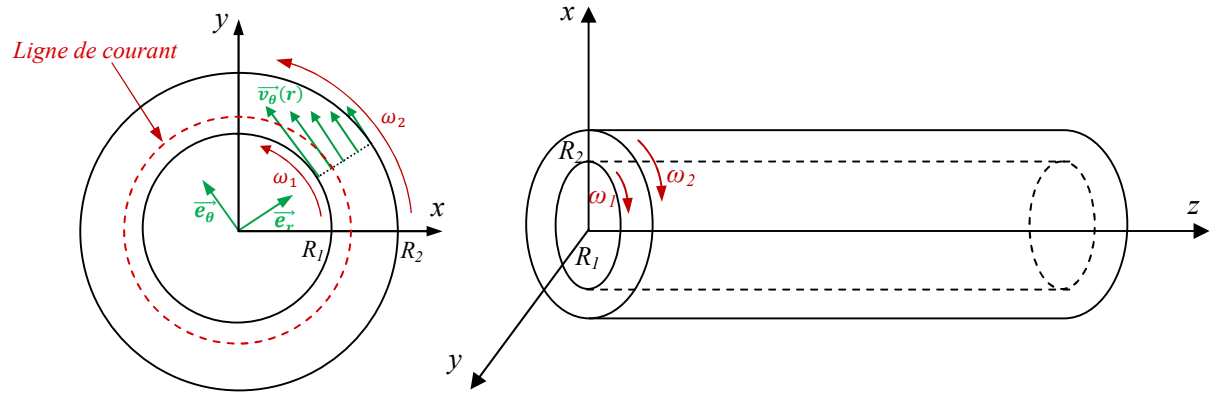



**Figure III. 5 :** Ecoulement de couette cylindrique

### III. 6. 1. Profil de vitesse

***Hypothèses simplificatrices***

- Ecoulement stationnaire : $\partial/\partial t = 0$.
- Fluide incompressible : $\rho = C^{te}$.
- Ecoulement à symétrie de révolution cylindrique : $\partial/\partial\theta = 0$.
- Ecoulement bidimensionnel et laminaire : lignes de courant appartiennent au plan $(xOy)$ et représentent des cercles coaxiaux à $(Oz)$ : $\vec{V} = v_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$.
- Les cylindres sont de longueur infinie (on néglige les effets de bord).
- Force de gravité négligeable devant les forces de viscosité et de pression.

***Les conditions aux limites***

Due aux contraintes visqueuses, le fluide adhère aux parois des cylindres mobiles et prend leurs vitesses.

Au niveau du cylindre interne de rayon $R_1$ tournant à la vitesse angulaire $\omega_1$, la vitesse du fluide est

- En $r = R_1 : v_\theta(R_1) = \omega_1 R_1$.

Au niveau du cylindre externe de rayon $R_2$ tournant à la vitesse angulaire $\omega_2$, la vitesse du fluide est

- En $r = R_2 : v_\theta(R_2) = \omega_2 R_2$.

***Equation de continuité***

L'équation de continuité qui se réduit à

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.v_r) = 0 \Longrightarrow r.v_r(r) = c^{te} \qquad \text{(III. 32)}$$

Au contact des parois des cylindres interne et externe, $r = R_1$, $r = R_2$ le fluide n'est mobile que dans la direction radiale $\overrightarrow{e_\theta}$

$$R_1.v_r(R_1) = R_2.v_r(R_2) = 0 \Longrightarrow v_r(r) = 0 \qquad \text{(III. 33)}$$

Cela confirme que le vecteur de vitesse de cet écoulement bidimensionnel n'a qu'une composante $v_\theta(r)$ suivant la direction angulaire $\overrightarrow{e_\theta}$ variant de façon radiale d'une ligne de courant (cercle) à une autre.

***Equation de Navier-Stocks***

A l'aide des hypothèses précédentes, les projections de l'équation vectorielle de quantité de mouvement, dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, se réduit à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = \rho \dfrac{v_\theta^2(r)}{r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = \mu\left(\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{v_\theta}{r^2}\right) \end{cases} \qquad \text{(III. 34)}$$

Comme le terme du coté droit de la première équation ne dépend que de $r$, la dérivée du gradient de pression $\partial p/\partial r$, par rapport à $\theta$, est nul

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \rho\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\theta^2}{r}\right) = 0 \qquad \text{(III. 35)}$$

Cela confirme l'indépendance de pression de la coordonnée angulaire $\theta$, et annule le terme du coté gauche de la deuxième équation.

Ainsi, il n'existe qu'un gradient de pression radial $\partial p/\partial r$ créant une force de pression afin de maintenir l'écoulement des particules fluides sur des lignes circulaires et équilibrer la force centrifuge, dirigée vers l'extérieur, engendrée par ce mouvement.

Sous une forme plus compacte, l'équation différentielle de $v_\theta$ se réécrit comme suit

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\right)=0 \qquad \text{(III. 36)}$$

A l'aide d'une double intégration, par rapport à $r$, on obtient l'expression générale de la vitesse $v_\theta$ suivante

$$v_\theta(r)=\frac{C_1}{2}r+C_2\frac{1}{r} \qquad \text{(III. 37)}$$

A l'aide des hypothèses précédentes et des conditions cinématiques d'adhérence au niveau des parois des cylindres interne et externe, on aboutit au profil de vitesse

$$v_\theta(r)=\left[\frac{\omega_2R_2^2-\omega_1R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\,r-\frac{(\omega_2-\omega_1)R_2^2R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\,\frac{1}{r}\right] \qquad \text{(III. 38)}$$

## III. 6. 2. Contrainte visqueuse

Dans la base des coordonnées polaires $(\overrightarrow{e_r},\ \overrightarrow{e_\theta})$, la contrainte de cisaillement visqueux est définie de comme suit

$$\tau_{r\theta}(r)=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right] \qquad \text{(III. 39)}$$

Comme cet écoulement plan est purement rotatif, la contrainte de cisaillement visqueux ne dépend que de la variation de la vitesse angulaire avec la distance radiale $r$

$$\tau_{r\theta}(r)=\mu.\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] \qquad \text{(III. 40)}$$

En substituant la première dérivée du profil de vitesse dans l'équation précédente (III.40), on obtient l'expression générale de la contrainte de frottement visqueux en toute position radiale $r$ entre les deux cylindres

$$\tau_{r\theta}(r)=\frac{2\mu(\omega_2-\omega_1)R_2^2R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\,\frac{1}{r^2} \qquad \text{(III. 41)}$$

On remarque que la contrainte visqueuse est maximale au niveau de la paroi du cylindre interne $r=R_1$ et minimale sur la paroi du cylindre externe $r=R_2$.

## III. 6. 3. Débit volumique

C'est le flux de fluide à travers une section rectangulaire de longueur $H$ (hauteur des cylindres) et de largeur $l$ représentant l'espace annulaire entre les deux cylindres coaxiaux.

$$q_v=\int_0^H dz\int_{R_1}^{R_2}v_\theta(r)dr=H\int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{\omega_2R_2^2-\omega_1R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\,r-\frac{(\omega_2-\omega_1)R_2^2R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\,\frac{1}{r}\right]dr \qquad \text{(III. 42)}$$

En intégrant chaque terme séparément, on obtient

$$q_v=H\left[\frac{\omega_2R_2^2-\omega_1R_1^2}{2}-\frac{(\omega_2-\omega_1)R_2^2R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\,ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right] \qquad \text{(III. 43)}$$

## III. 7. Ecoulement à faible nombre de Reynolds

Les écoulements de stokes sont des écoulements très lents dont l'accélération convective est négligeable devant l'accélération de diffusion se qui traduit que les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité.

En partant de l'équation de Navier-Stokes, d'un fluide incompressible, suivante

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\rho(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \nu\Delta\vec{V} \qquad \text{(III. 44)}$$

Et en utilisant $[\vec{V}] = U$ et $[\vec{r}\,] = L$ comme échelles typique, on identifie la condition nécessaire suivant

$$\left[\rho(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right] \ll \left[\mu\Delta\vec{V}\right] \Leftrightarrow \frac{\rho U^2}{L} \ll \mu\,\frac{U}{L^2} \qquad \text{(III. 45)}$$

qui se réécrit comme une condition sur le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho U\, L}{\mu} \ll 1 \qquad \text{(III. 46)}$$

Cela nous permet d'omettre le terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes et la simplifier à l'équation de Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \nu\Delta\vec{V} \qquad \text{(III. 47)}$$

Les équations du régime de Stokes sont linéaires et ainsi il existe de nombreuses méthodes analytiques pour trouver des solutions (superposition de solutions). Dans ce qui suit on discutera la solution choisie «profil de vitesse» dans des exemples d'écoulement de Stokes proposés dont deux sont non permanent et un est stationnaire.

### III. 7. 1. Premier problème de Stocks (Problème de Rayleigh)

Soit une plaque plane infinie ($y = 0$ et $-\infty < x < \infty$ ) limitant un demi-espace ($y > 0$) occupé par un fluide initialement au repos. A l'instant initial ($t = 0$) la plaque est brusquement mise en mouvement de translation uniforme à la vitesse $U_P$, et le fluide est mis en mouvement parallèle. L'écoulement se fait dans le plan $(x, y)$ et est supposé invariant dans la direction du mouvement, donc le gradient de pression longitudinal est nul. De ce fait, l'équation de Navier-Stokes prend la forme d'une équation parabolique de diffusion de quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{(III. 48)}$$

La condition initiale et les conditions aux limites sont pour ce problème

$$\begin{cases} u(y,0) = 0 & \\ u(0,t) = U_p, & t > 0 \\ u(\infty,t) \to 0, & t > 0 \end{cases} \qquad \text{(III. 49)}$$

On cherche une solution auto-semblable de la forme

$$u(y,t) = U_p f(\eta) \tag{III.50}$$

où la variable adimensionnelle est

$$\eta = y/\left(2\sqrt{\nu t}\right) \tag{III.51}$$

pour laquelle les conditions aux limites deviennent

$$\begin{cases} f(0) = 1, & t > 0 \\ f(\infty) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{III.52}$$

En substituant la solution dans l'équation différentielle, on obtient

$$f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0 \tag{III.53}$$

En intégrant l'équation (III.49) deux fois par rapport à η, on obtient la solution suivante

$$f(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_1 \mathrm{erf}(\eta) + C_2 \tag{III.54}$$

En appliquant les conditions aux limites, on aura

$$f(\eta) = 1 - \mathrm{erf}(\eta) = \mathrm{erfc}(\eta) \tag{III.55}$$

où erf et erfc, représentent respectivement, la fonction d'erreur et la fonction d'erreur complémentaire. Ce qui donne pour la solution auto-semblable l'expression suivante

$$u(y,t) = U_p \mathrm{erfc}(\eta) \tag{III.56}$$

Ainsi le profil des vitesses est de la forme suivante

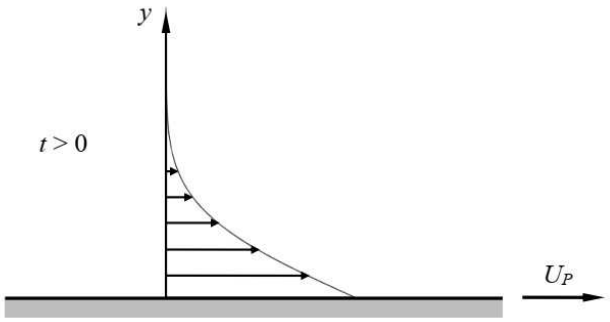



**Figure III. 6 :** Ecoulement engendrée par translation brusque d'une plaque

## III. 7. 2. Deuxième problème de Stocks

Considérons une plaque plane infinie effectuant un mouvement oscillatoire dans son propre plan $(xOy)$. A cause de la viscosité du fluide, créant une adhérence des particules fluides à la paroi, des oscillations longitudinales sont engendrées dans le fluide au-dessus de la plaque. Dans ce cas, $dp/dx = 0$ et $u = u\,(y,t)$ où $y$ est l'axe vertical dans un repère d'inertie (figure ci-dessous). La condition à la limite au niveau de la plaque plane peut donc s'écrire $u(0,t) = U\exp(i\omega t)$ où $U$ traduit l'amplitude de la vitesse de la plaque et $\omega$ la fréquence angulaire des oscillations.

Dans ces conditions, l'équation de Navier-Stokes se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{III. 57}$$

On cherche la solution par la méthode de séparation des variables en posant

$$u(y,t) = f(t).g(y) \tag{III. 58}$$

et on obtient

$$\frac{f'}{f} = \nu \frac{g''}{g} = k \tag{III. 59}$$

d'où

$$\begin{cases} f(t) = C_1 \exp(kt) \\ g(y) = C_2 \exp\left[-\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2} y\right] + C_3 \exp\left[\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2} y\right] \end{cases} \tag{III. 60}$$

Etant donné que $g(y) \to 0$ quand $y \to \infty$, la constante $C_3 = 0$. Par conséquent,

$$u(y,t) = C_1 C_2 \exp\left[kt - \left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2} y\right] \tag{III. 61}$$

Les constantes $C_1$, $C_2$ et $k$ sont définies par la condition à la limite à la paroi. On obtient

$$u(y=0,t) = C_1 C_2 \exp(kt) = U \exp(i\omega t) \tag{III. 62}$$

d'où

$$C_1.C_2 = U, \quad k = i\omega \tag{III. 63}$$

La solution devient donc

$$u(y,t) = U \exp\left[i\omega t - \left(\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2} y\right] \tag{III. 64}$$

où

$$\left(\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2} = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} (1+i) \tag{III. 65}$$

Par conséquent

$$u(y,t) = U \exp\left[-\left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} y + i\left(\omega t - \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} y\right)\right] \tag{III. 66}$$

On ne gardera que la partie réelle de la solution complète

$$u(y,t) = U \exp\left(-\left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} y\right).\cos\left(\omega t - \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} y\right) \tag{III. 67}$$

Selon cette expression le fluide au-dessus de la plaque effectue un mouvement oscillatoire avec une amplitude qui diminue avec la distance à la plaque et un déphasage (Figure III.7).

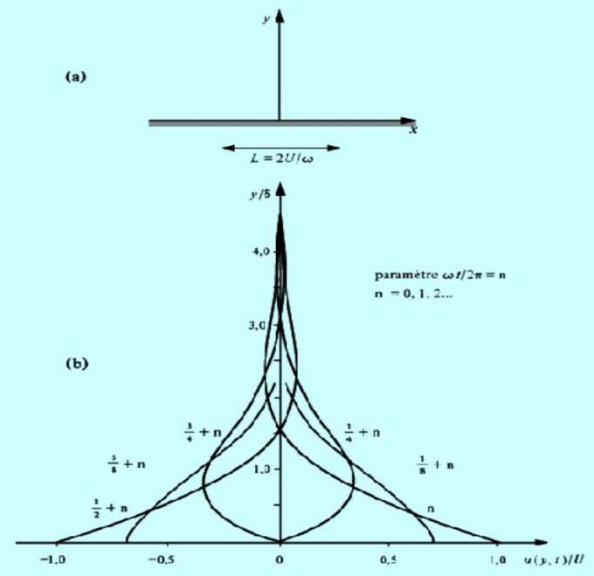



**Figure III. 7 :** Ecoulement engendrée par oscillation brusque d'une plaque
**(a)** Déplacement de la paroi, **(b)** Profil de vitesse à différents instants ($n = \omega t/2\pi$)

Pour une distance caractéristique $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$, l'amplitude est amortie à $e^{-1}$ de sa valeur à la plaque même. Il s'en suit que les oscillations du fluide sont limitées à une couche proche de la plaque. L'épaisseur de cette couche est d'ordre de grandeur $\delta$. Le déplacement $L$ longitudinal qu'effectue la plaque se calcule sur une période d'après la relation

$$L = 2U \int_0^{\pi/2\omega} \cos(\omega t)\, dt = 2\frac{U}{\omega} \qquad \text{(III. 68)}$$

On vérifie ainsi que le rapport $\delta/L$ devient

$$\frac{\delta}{L} = \left(\frac{2\nu}{\omega}\frac{\omega^2}{4U^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\nu}{UL}\right)^{1/2} = (Re)^{-1/2} \qquad \text{(III. 69)}$$

où *Re* correspond au nombre de Reynolds basé sur la distance *L*. Par conséquent, l'effet de la viscosité est limité à une couche d'épaisseur relative inversement proportionnelle à la racine du nombre de reynolds *Re*.

## III. 8. Lubrification hydrodynamique

La lubrification hydrodynamique est un parfait exemple sur les écoulements dominés par la viscosité. Ce régime d'écoulement adapté pour décrire le mouvement de fins films de fluide visqueux (lubrifiant), séparant deux surfaces relativement mobiles, créant une pression qui empêche le contact direct et l'usure des parois.

## III. 8. 1. Modèle de lubrification

Considérons l'écoulement bidimensionnel d'un fluide newtonien incompressible entre deux plaques distantes de $h$, l'une est fixe et légèrement inclinée (patin) et l'autre est mobile (glissière) avec une vitesse $U_p$ comme montré sur la figure III.8.

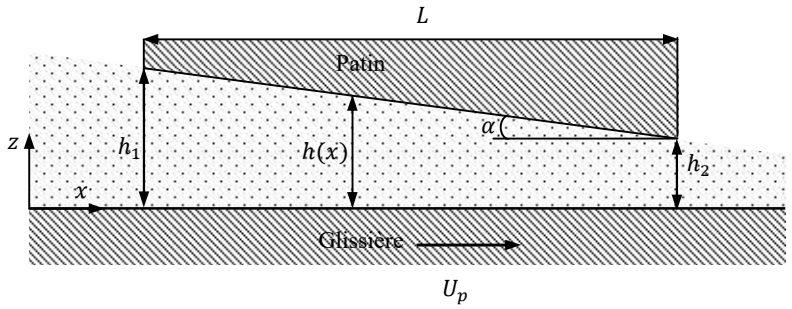



**Figure III. 8 :** Ecoulement induit par le mouvement de glissière par rapport au patin

***Longueurs caractéristiques***

L'écoulement du film de fluide induit par le mouvement de la glissière est régi par les équations de Navier-Stokes. Afin de caractériser cet écoulement, fortement contraint dans l'une des directions du plan $(x0z)$, on introduit deux échelles typiques de longueur :

$h$ : longueur caractéristique dans la direction courte $(Oz)$.

$L$ : longueur caractéristique dans la direction longue $(Ox)$.

Pour que l'approximation de lubrification soit applicable, on doit supposer qu'il existe une séparation d'échelle spatiale $h/L \ll 1$, entre la courte et la longue échelle spatiales typiques du fluide $h$ et $L$.

La simplification des équations de Navier-Stokes, nécessite l'introduction d'autres échelles typiques en outre qu'aux échelles $h$ et $L$, déjà définies, afin d'analyser l'ordre de grandeur de chaque terme de ces équations. On introduit ainsi

$u$ : vitesse caractéristique dans la direction courte $(Oz)$.

$U_p$ : vitesse caractéristique dans la direction longue $(Ox)$.

$P$ : pression caractéristique inconnue et liée à $U_p$ et $h$ et $L$.

$T$ : temps caractéristique.

***Equations de Navier Stocks approximatives***

Analysons ce qu'on peut tirer de la condition d'incompressibilité du fluide

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad \text{(III. 70)}$$

On déduit que les dérivées $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ sont nécessairement du même ordre de grandeur. Par conséquent, le rapport des vitesses est similaire au rapport des deux échelles spatiales

$$\frac{U_p}{L} \sim \frac{u}{h} \Longrightarrow \frac{u}{U_p} \ll 1 \qquad \text{(III. 71)}$$

Afin de simplifier les équations de Navier-Stokes, on estime l'ordre de grandeur de chacun de ses termes

$$\begin{cases} \underbrace{\rho\frac{\partial u_x}{\partial t}}_{\rho U_p/T} + \underbrace{\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}}_{\rho U_p^2/L} + \underbrace{\rho u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}}_{\rho u U_p/h} = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{P/L} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}_{\mu U_p/L^2} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}_{\mu U_p/h^2} \\ \underbrace{\rho\frac{\partial u_z}{\partial t}}_{\rho u/T} + \underbrace{\rho u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}}_{\rho u U_p/h} + \underbrace{\rho u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}}_{\rho u^2/L} = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{P/h} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}}_{\mu u/L^2} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{\mu u/h^2} - \rho g \end{cases} \quad (\text{III.}72)$$

Simplifions tous d'abord le terme visqueux. En comparant l'ordre de grandeur des différents termes visqueux et en se basant sur l'hypothèse géométrique $h/L \ll 1$, on remarque que les dérivées secondes horizontales sont négligeables devant celles verticales

$$\begin{cases} \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \ll \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \Leftrightarrow \frac{\mu U_p}{L^2} \ll \frac{\mu U_p}{h^2} \\ \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \ll \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \Leftrightarrow \frac{\mu u}{L^2} \ll \frac{\mu u}{h^2} \end{cases} \quad (\text{III.}73)$$

Pour les termes non-linéaires d'inertie, l'ordre de grandeur est

$$\begin{cases} \left[\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right] = \left[\rho u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right] \Leftrightarrow \frac{\rho U_p^2}{L} = \frac{\rho u U_p}{h} \\ \left[\rho u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}\right] = \left[\rho u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right] \Leftrightarrow \frac{\rho u U_p}{L} = \frac{\rho u^2}{h} \end{cases} \quad (\text{III.}74)$$

d'où on constate que le terme d'inertie dans la direction horizontale est négligeable devant celui de la direction verticale

$$\left[\rho(\vec{V}.\vec{\nabla})u_z\right] \ll \left[\rho(\vec{V}.\vec{\nabla})u_x\right] \quad (\text{III.}75)$$

Comme le régime de lubrification est caractérisé par le terme d'inertie négligeable devant le terme visqueux. On peut écrire

$$\left[\rho(\vec{V}.\vec{\nabla})u_x\right] \ll \left[\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right] \Leftrightarrow \frac{\rho U_p^2}{L} \ll \frac{\mu U_p}{h^2} \quad (\text{III.}76)$$

similaire pour la composante $u_z$. Cette condition est vérifiée tant que

$$\frac{U_p h}{\nu} \ll \frac{L}{h} \Leftrightarrow Re \ll \frac{L}{h} \quad (\text{III.}77)$$

Ainsi le terme non-linéaire d'inertie possède un poids négligeable devant le terme visqueux tant que le nombre de Reynolds est faible devant le rapport d'aspect $L/h \gg 1$.

Cette condition ressemble à celle du régime de Stokes, mais elle est différente tout de même où il fallait $Re \ll 1$. A l'aide de la similarité entre le rapport des vitesses et le rapport des échelles spatiales $U_p/u \sim L/h$, la condition se réécrit comme suit

$$Re = \frac{U_p h}{\nu} = \frac{uL}{\nu} \ll \frac{L}{h} \Leftrightarrow \frac{uh}{\nu} \ll 1 \quad (\text{III.}78)$$

De ce fait, le nombre $uh/\nu$, basé sur la vitesse lente $u$ et l'échelle de longueur courte $h$, qui doit être inférieur à 1 pour caractériser le régime de lubrification vérifie de plus la condition du régime de Stocks. Pour cela ce nombre est appelé nombre de Reynolds alternatif vérifiant la deuxième hypothèse de ce régime

$$Re^* = \frac{uh}{\nu} \ll 1 \qquad \text{(III. 79)}$$

Pour le régime instationnaire, le terme d'accélération locale non nul est négligeable devant le terme visqueux

$$\left[\rho \frac{\partial u_x}{\partial t}\right] \ll \left[\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right] \Leftrightarrow \frac{\rho U_p}{T} \ll \frac{\mu U_p}{h^2} \qquad \text{(III. 80)}$$

similaire pour la composante $u_z$. L'hypothèse nécessaire pour ignorer ce terme d'inertie est

$$\frac{h^2}{\nu T} \ll 1 \qquad \text{(III. 81)}$$

Ainsi les équations de Navier-Stocks deviennent

$$\begin{cases} 0 = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{P/L} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}}_{\mu U_p/h^2} \\ 0 = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{P/h} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{\mu u/h^2} - \rho g \end{cases} \qquad \text{(III. 82)}$$

A partir de la projection suivant $x$, on détermine l'ordre de grandeur de pression

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right] = \left[\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right] \Leftrightarrow P = \frac{\mu L U_p}{h^2} \qquad \text{(III. 83)}$$

On utilise cette échelle dans la projection suivant $z$ pour comparer l'ordre de grandeur du terme visqueux avec celui de la dérivée de pression

$$\left[\mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] = \frac{\mu u}{h^2}, \qquad \left[\frac{\partial p}{\partial z}\right] = \frac{\mu L U_p}{h^3} \qquad \text{(III. 84)}$$

A l'aide de la similarité entre le rapport des vitesses et le rapport des échelles spatiales $U_p/u \sim L/h$, on obtient

$$\left[\mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] = \left[\frac{\partial p}{\partial z}\right] \cdot \underbrace{\frac{h}{L} \cdot \frac{u}{U_p}}_{h^2/L^2 \ll 1} \qquad \text{(III. 85)}$$

Donc la projection du terme visqueux suivant $z$ joue un rôle négligeable. En conséquence, l'expression des équations de Navier Stocks du modèle de lubrification est

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \end{cases} \qquad \text{(III. 86)}$$

## III. 8. 2. Profil de vitesse

***Hypothèses simplificatrices***

- Fluide incompressible : $\rho = C^{te}$.
- Ecoulement à faible nombre de Reynolds.
- L'espace entre les plaques est très petit par rapport à leur longueur : $h/L \ll 1$
- Le terme non-linéaire d'inertie a un poids négligeable devant le terme visqueux.
- Effet de gravité négligeable.
- L'écoulement est bidimensionnel défini dans $R(O,x,z)$, où $(Oz)$ est perpendiculaire à la paroi horizontale mobile, le vecteur de vitesse est : $\vec{V} \in (x,O,z)$ .
- La projection suivant $z$ du terme visqueux est négligeable : le vecteur de vitesse se réduit à : $\vec{V} = u_x(x,z)\vec{\imath}$.

***Les conditions aux limites***

- La paroi supérieure est à une hauteur de $h_2$ du côté droit, et $h_1 < h_2$ du coté gauche. On note ainsi la hauteur partout pour $x \in [0,L]$ est $h(x) = h_1 + \alpha x$.
- Au niveau de la paroi mobile : $u_x(z=0) = U_p$.
- Au niveau de la paroi fixe : $u_x\big(z = h(x)\big) = 0$.

Le modèle de lubrification adapté aux hypothèses est

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \qquad \text{(III. 87)}$$

La deuxième équation indique que la pression $p = p(x)$ est une fonction linéaire de $x$. Ainsi, à l'aide d'une double intégration de la première équation selon $z$, on obtient la forme générale du profil de vitesse

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}z^2 + C_1 z + C_2 \qquad \text{(III. 88)}$$

En appliquant les conditions cinématiques d'adhérence, citées précédemment, pour déterminer les constantes d'intégration $C_1(x)$ et $C_2(x)$, qui peuvent dépendre de $x$, on obtient finalement

$$u_x(x,z) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(hz - z^2) + \frac{U_p}{h}(h - z) \qquad \text{(III. 89)}$$

On remarque que ce profil de vitesse correspond à une superposition d'un écoulement de Couette et d'un écoulement de Poiseuille.

## III. 8. 3. Débit volumique et pression

Le débit volumique est le volume de fluide qui traverse la section droite du canal par unité de temps. On le calcule, par unité de largeur suivant $y$, comme suit

$$q_v = \int_0^{h(x)} \left[-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(hz - z^2) + \frac{U_p}{h}(h - z)\right] dz = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} + \frac{U_p h}{2} \qquad \text{(III. 90)}$$

Comme le fluide est incompressible, le débit volumique à travers une section transversale se conserve ce qui traduit qu'il est constant et indépendant de $x$. D'où on tire l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dx} = -6\mu\left(\frac{2q_v}{h^3} - \frac{U_p}{h^2}\right) \tag{III.91}$$

qui se réécrit comme suit

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dh}.\frac{dh}{dx} = \alpha\frac{dp}{dh} = -6\mu\left(\frac{2q_v}{h^3} - \frac{U_p}{h^2}\right) \tag{III.92}$$

On en déduit que

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{6\mu}{\alpha}\left(\frac{2q_v}{h^3} - \frac{U_p}{h^2}\right) \tag{III.93}$$

dont la solution est

$$p(x) = \frac{6\mu}{\alpha}\left(\frac{q_v}{h^2} - \frac{U_p}{h}\right) + C \tag{III.94}$$

On détermine la constante $C$ et le débit $q_v$ en exprimant que la pression vaut la pression atmosphérique $p_0$ aux deux côtés $x = 0$ et $x = L$. Ainsi, à l'aide des conditions aux limites $p(x = 0) = p(h = h_1) = p_0$ et $p(x = L) = p(h = h_2) = p_0$, on trouve

$$q_v = U_p\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}, \qquad C = p_0 + \frac{6\mu U_p}{\alpha(h_1 + h_2)} \tag{III.95}$$

Ainsi la pression sous le patin est

$$p(x) = p_0 + \frac{6\mu U_p}{\alpha}\left[\frac{h_1 h_2}{(h_1 + h_2)}\frac{1}{h(x)^2} - \frac{1}{h(x)} + \frac{1}{(h_1 + h_2)}\right] \tag{III.96}$$

# CHAPITRE IV.

# Théorie de la couche limite

## IV. 1. Introduction

Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'écoulement externe d'un fluide autour d'un cylindre fixe déterminé par la théorie des écoulements irrotationnels. Le fluide considéré étant parfait, et il n'y a pas de conditions aux limites particulières pour la vitesse tangentielle d'une particule de fluide sur la paroi solide et elle peut, en particulier, être différente de zéro (glissement). Pour le fluide visqueux ce n'est plus le cas et le champ de vitesse est perturbé au voisinage de la paroi. La viscosité du fluide impose son adhérence à la paroi traduit par une vitesse de l'écoulement nulle sur la paroi du cylindre ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de glissement utilisée pour les écoulements de fluide parfait. Cette contradiction apparente peut être surmontée grâce à l'existence d'une zone fine où les effets de viscosité sont confinés tandis que les effets inertiels dominent l'écoulement au-delà. Cette couche mince, le long de la paroi, est dénommée couche limite.

Dans cette section nous allons présenter les équations et paramètres qui nous permettront de mieux comprendre l'écoulement d'un fluide réel autour du profil d'une plaque.

## IV. 2. Notion de la couche limite

Soit un écoulement uniforme à grande vitesse $U_e$ d'un fluide visqueux incompressible autour d'une plaque plane fixe de très faible épaisseur et de longueur $L$. Suivant la normale à la paroi et loin de la plaque, on peut négliger les effets de la viscosité car le nombre Reynolds $Re = \frac{U_e L}{\nu} \equiv \frac{\text{effet d'inertie}}{\text{effet de viscosité}}$ est suffisamment grand et l'écoulement reste irrotationnel et uniforme. Mais en se rapprochant de l'interface plaque-fluide, la vitesse tangentielle va progressivement s'annuler.

Dans cette zone, la viscosité du fluide joue un rôle important car elle induit un frottement entre les couches voisines du fluide : si l'on considère deux couches successives, la couche la plus lente tend à freiner la couche la plus rapide qui, en retour, tend à l'accélérer.

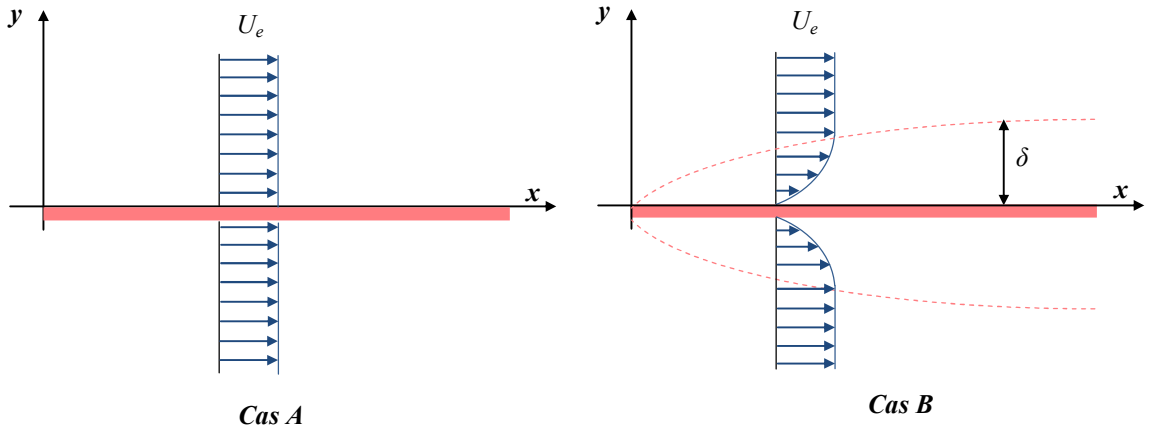



**Figure IV. 1 :** Couche limite. A : écoulement parfait autour d'une plaque mince ;
B : écoulement réel ; en pointillé, la zone de la couche limite

## IV. 3. Caractéristiques de la couche limite

Le temps moyen mis par un élément de fluide pour parcourir la plaque est $\tau = L/U_e$. Pendant cette durée $\tau$, la viscosité engendre une diffusion de la quantité de mouvement entre les couches du fluide sur une distance transversale de l'ordre de

$$\delta \sim \left(\frac{\nu L}{U_e}\right)^{1/2} \Rightarrow \delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}} \qquad \text{(IV. 1)}$$

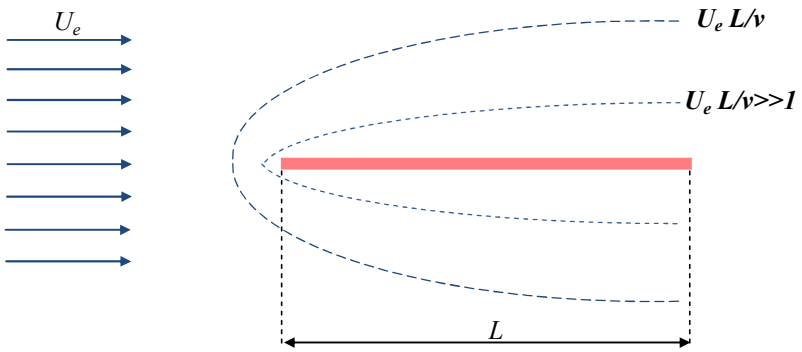



**Figure IV. 2 :** Couche limite autour d'une plaque plane dans le cas où Re est d'ordre unité et dans le cas où Re est très grand

Si le nombre de Reynolds est suffisamment grand, l'épaisseur $\delta$ de la couche limite sera ainsi petite devant la longueur $L$ de la plaque. En dehors de cette couche mince confinée à la paroi l'écoulement reste irrotationnel et les effets visqueux sont négligeables.

On résume quelques caractéristiques de la couche limite comme suit

- L'ordre de grandeur de la distance longitudinale $x$ et la composante de vitesse parallèle $u$ à la paroi est très grand devant celui de la distance transversale $y$ et de la composante de vitesse normale $v$ à la paroi.
- L'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de Reynolds.
- Dans la couche limite, l'écoulement peut être soit laminaire soit turbulent cela dépend du nombre de Reynolds également.

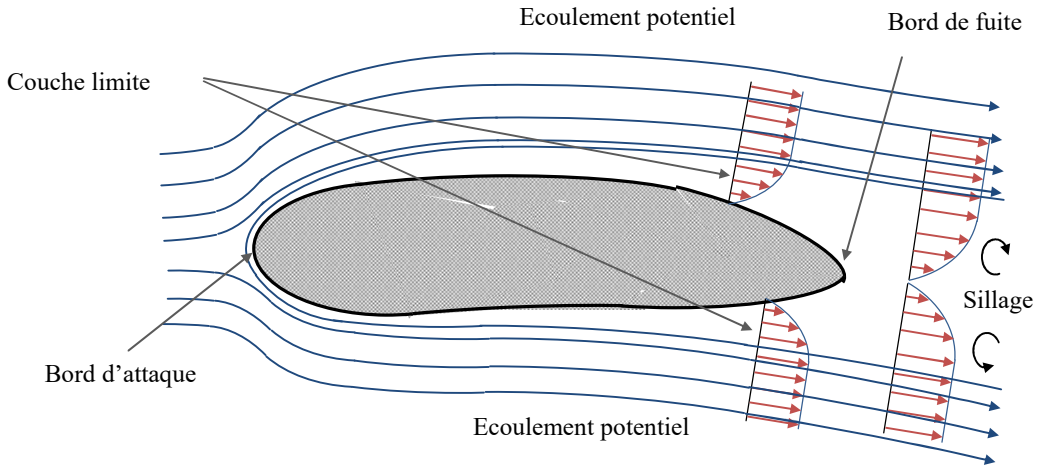



**Figure IV. 3 :** Evolution de la couche limite à partir du point d'arrêt amont

- Au contact de la paroi, quand le profil de vitesse présente une pente infinie, on dit qu'il ya décollement de la couche limite.

- Après le point de décollement *D*, la couche limite devient turbulente et les forces de viscosité ne sont plus assez importantes pour assurer l'adhérence normale du fluide à l'obstacle.

- L'absence de l'adhérence à la paroi traduit la formation d'une zone, où le champ de vitesse est rotationnel, en arrière du bord de fuite appelée sillage de longueur d'aux moins deux ordres de grandeur *L*.

## IV. 4. Grandeurs utiles

### IV. 4. 1. Epaisseur de la couche limite $\delta$

Nous avons établi dans la partie précédente l'épaisseur caractéristique d'une couche limite où il est indiqué que la couche limite est d'autant plus mince que le nombre $Re^{1/2}$ est plus grand.

Une autre définition conventionnelle est tirée de l'évolution asymptotique de la vitesse tangentielle dans la couche limite vers la vitesse externe. On peut ainsi identifier une épaisseur sensible $\delta$ qui traduit la valeur de $y$ pour laquelle la vitesse devient supérieure à 99% de la vitesse de l'écoulement uniforme.

$$u(y = \delta) = 0.99U_e \qquad \text{(IV. 2)}$$

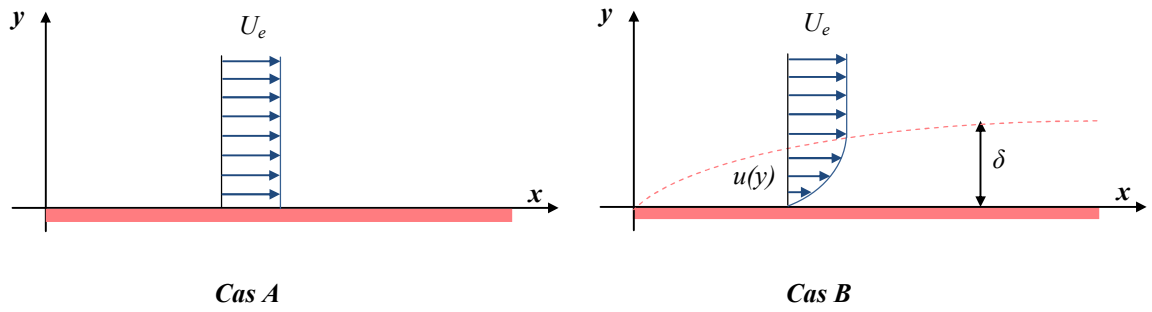



**Figure IV. 4 :** Epaisseur de la couche limite $\delta$ en relation avec le profil de vitesse à l'abscisse *x*

### IV. 4. 2. Epaisseur de déplacement $\delta^*$

Une autre grandeur caractérisant l'influence physique du frottement à la paroi sur le débit de masse dans la zone de couche limite est appelée épaisseur de déplacement $\delta^*$. Celle-ci décrit le déplacement effectif de l'écoulement à l'extérieur de la couche du fait de la réduction du débit de masse près de la paroi.

Afin de définir l'épaisseur de déplacement, on évolue le débit massique manquant par rapport à celui qu'on aurait dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme jusqu'à la paroi.

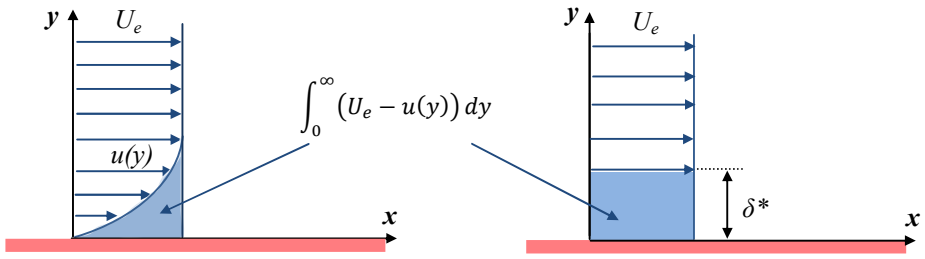



**Figure IV. 5 :** Epaisseur de déplacement $\delta^*$ en relation avec le profil de vitesse à l'abscisse $x$

A cause de la couche limite, qui se développe sur la plaque, une partie du débit massique $\Delta q_m$ est déviée vers le haut. Cette quantité de débit de masse est définie par

$$\int_0^\infty \rho\big(U_e - u(y)\big)\, dy = \int_0^{\delta^*} \rho U_e\, dy = \rho U_e \delta^*(x) \qquad \text{(IV. 3)}$$

L'écoulement externe subit ainsi à l'abscisse $x$ un déplacement $\delta^*(x)$ (figure IV.5) d'où

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) dy \qquad \text{(IV. 4)}$$

### IV. 4. 3. Epaisseur de quantité de mouvement $\theta$

Elle caractérise le manque du flux de quantité de mouvement dans la couche limite par rapport à celui qu'on aurait dans le cas d'un écoulement uniforme jusqu'à la paroi. La différence entre les flux de quantité de mouvement idéal et réel est

$$\int_0^\infty \big(U_e - u(y)\big)\, \rho u(y) dy = \int_0^\theta U_e\, \rho U_e dy \qquad \text{(IV. 5)}$$

d'où l'épaisseur de quantité de mouvement est

$$\theta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) \frac{u(y)}{U_e}\, dy \qquad \text{(IV. 6)}$$

Cette épaisseur correspond à l'épaisseur d'une couche de fluide stagnant à la paroi qui causerait la même perte de flux de quantité de mouvement dans la direction tangentielle que la couche limite.

## IV. 5. Les équations de la couche limite "approximation de Prandtl"

Dans la couche limite, où la viscosité n'est plus négligeable, l'écoulement n'est pas potentiel. Le principe fondamental de la mécanique appliqué à un élément de fluide et en tenant compte de la force de viscosité conduit à l'équation vectorielle de Navier-Stokes définie par

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} \qquad \text{(IV. 7)}$$

La résolution de cette équation s'avère difficile sans poser un certain nombre d'approximations. Pour simplifier, plaçons nous dans le cas d'une couche limite sur une plaque plane, le long de laquelle l'abscisse est notée $x$, et considérons alors, que :

- l'écoulement est bidimensionnel et stationnaire,
- loin de la plaque la vitesse de l'écoulement est $\vec{V}\begin{pmatrix}U_e\\0\end{pmatrix}$,
- les forces d'inertie, de viscosité et de pression sont du même ordre de grandeur dans la couche limite,
- l'épaisseur de couche limite dépend du nombre de Reynolds $\delta/L = 1/Re^m$,
- les effets de la pesanteur sont négligeables,
- $\frac{\delta}{L} \ll 1$, où $L$ est la longueur caractéristique de la plaque.

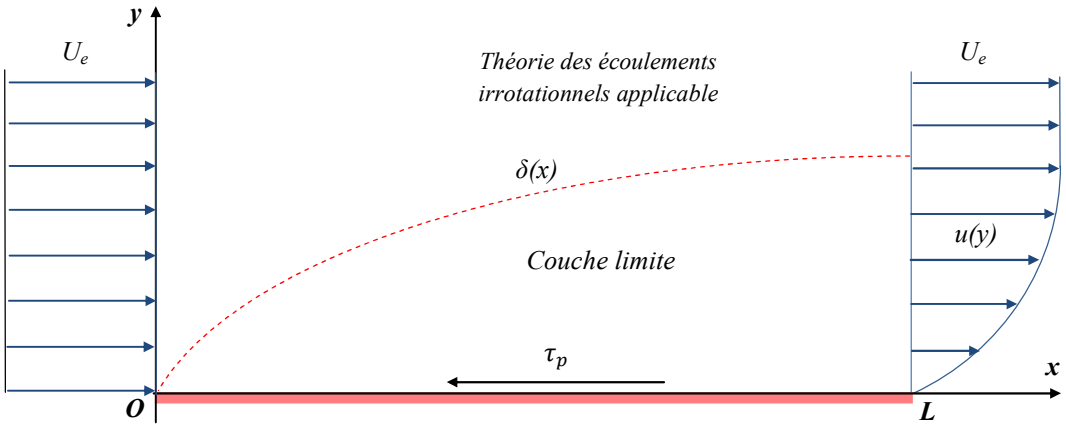



**Figure IV. 6 :** Schéma de la couche limite en développement le long d'une plaque infiniment mince

Avec ces hypothèses, l'équation vectorielle de Navier-Stokes se réduit et ses projections suivant les axes $(Ox)$, $(Oy)$ donnent

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

En lien avec la dernière hypothèse, certains termes dans les équations de Navier-Stokes jouent un rôle négligeable. Une analyse dimensionnelle permet de trouver l'importance relative de chaque terme.

Afin d'analyser l'ordre de grandeur de chaque terme de ces équations, on prend comme échelle de longueur caractéristique, $L$ dans la direction de l'écoulement et $\delta$ dans la direction transversale. Concernant l'échelle caractéristique de la composante de la vitesse longitudinale $u$, on prend $U_e$.

A partir de la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (IV.9)$$

on peut déduire que les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont nécessairement du même ordre de grandeur dans la couche limite. Par conséquent, on obtient

$$v\sim \frac{\delta}{L}U_e \sim U_e Re^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow v \ll U_e \qquad (IV.10)$$

Cette faiblesse de la deuxième composante $v$ de vitesse vis-à-vis de la composante longitudinale $u$ indique que l'écoulement est presque parallèle à la paroi dans la couche limite.

Ainsi, l'ordre de grandeur des dérivées premières introduites dans la première équation de Navier-Stokes

$$u\frac{\partial u}{\partial x}\sim \frac{U_e^2}{L}, \qquad v\frac{\partial u}{\partial y}\sim v\frac{U_e}{\delta}\sim \frac{U_e^2}{L} \qquad (IV.11)$$

et d'autre part l'ordre de grandeur de chaque dérivée seconde s'exprime comme

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sim \frac{\nu U_e}{L^2}, \qquad \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sim \frac{\nu U_e}{\delta^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (IV.12)$$

L'écoulement externe de vitesse $U_e$ est celui d'un fluide parfait autour d'un objet. Il constitue une ligne de courant le long de laquelle il est possible d'intégrer l'équation d'Euler

$$\rho U_e\frac{\partial U_e}{\partial x}=-\frac{\partial p_e}{\partial x} \qquad (IV.13)$$

Comme il y a continuité des pressions à la frontière de la couche limite, on peut estimer que l'ordre de grandeur de la pression est

$$p\sim \rho U_e^2 \qquad (IV.14)$$

L'analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes dans la direction des $x$ donne

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{U_e^2}{L}}+\underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{U_e^2}{L}}=-\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\frac{U_e^2}{L}}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{\nu U_e}{L^2}=\frac{U_e^2}{L}\frac{1}{Re}}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\frac{\nu U_e}{\delta^2}=\frac{U_e^2}{L}\frac{1}{Re}\frac{L^2}{\delta^2}} \qquad (IV.15)$$

On voit que le premier terme de dérivée seconde contenant la viscosité est plus petit que le second et peut être négligé. On en déduit ainsi que l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite est

$$\frac{1}{Re}\sim\frac{\delta^2}{L^2}\Longrightarrow \delta\sim\sqrt{\frac{\nu L}{U_e}} \qquad (IV.16)$$

La composante *x*, de l'équation vectorielle de Navier-Stokes se simplifie alors pour donner la première équation approximative de la couche limite

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (IV.17)$$

De même pour la composante *y* de l'équation de Navier-Stokes, les différents ordres de grandeurs de ses termes sont

$$\underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{U_e^2}{L}\frac{\delta}{L}}+\underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{U_e^2}{L}\frac{\delta}{L}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\frac{U_e^2}{L}\frac{\delta}{L}\frac{\delta^2}{L^2}}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\frac{U_e^2}{L}\frac{\delta}{L}} \qquad (IV.18)$$

il s'en suit que

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\sim O\left(\frac{\delta U_e^2}{L^2}\right) \qquad (IV.19)$$

Ainsi, le gradient de pression dans la direction perpendiculaire à la paroi est au premier ordre égal à zéro

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\approx 0 \Longrightarrow p(x) \qquad (IV.20)$$

et la pression varie seulement dans la direction $x$ et sa variation est imposée par l'écoulement non visqueux à l'extérieur de la couche limite.

Par conséquent, les équations de Navier-Stokes approximatives de la couche limite s'écrivent au premier ordre $\frac{\delta}{L}$ comme suit

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p_e}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ \dfrac{\partial p}{\partial y}=0\end{cases} \qquad (IV.21)$$

Elles ont été établies pour la première fois par Prandtl (1904) c'est pour ça qu'elles sont dénommées par les équations de Prandtl. Associés aux conditions aux limites qui imposent

$$\begin{cases}u(x,0)=v(x,0)=0, \quad 0<x<L\\ \lim\limits_{y\to\infty}u(x,y)=U_e, \quad 0<x<L\\ u(0,y)=U_e\end{cases} \qquad (IV.22)$$

***Remarque***

Afin de décrire les écoulements à grand nombre de Reynolds, on utilise ainsi la combinaison de deux modèles,

- le modèle de Prandtl pour décrire l'écoulement dans la couche limite,
- et le modèle d'Euler (fluide parfait) pour décrire l'écoulement hors de la couche limite.

## IV. 6. Couche limite sur une plaque plane "solution de Blasius"

Considérons la couche limite qui se développe sur une plaque plane mince de longueur *L* d'incidence nulle. En utilisant les équations approximatives de la couche limite couplées aux conditions aux limites justifiées ci-dessus, on va déterminer le champ de vitesse dans la couche limite.

### IV. 6. 1. Résolution

L'équation à résoudre est

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_e}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (IV.23)$$

Comme l'écoulement extérieur est uniforme, la vitesse est constante et donc, le gradient de pression est nul.

$$\frac{\partial p_e}{\partial x}\approx 0 \qquad (IV.24)$$

De la continuité de pression à la frontière de la couche limite, on en déduit que $\frac{\partial p}{\partial x}\approx 0$ dans la couche limite et on écrit

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (IV.25)$$

L'écoulement étant incompressible, la vitesse dérive de la fonction de courant désignant le débit volumique à travers une surface. En raisonnant en termes de ligne de courant dans la couche limite, on peut écrire

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=-\upsilon dx+udy\simeq udy \qquad (IV.26)$$

Le flux à travers une hauteur *y* est donc par

$$\psi(x,y)=\int_0^y u(x,y')dy' \qquad (IV.27)$$

Au niveau de la paroi, l'effet des forces de frottement visqueuses imposées par l'adhérence du fluide à la paroi est prédominant où chaque partie de la plaque contribue à retarder l'écoulement du fluide. De ce fait, l'épaisseur de la couche limite augmente dans le sens de l'écoulement et sa valeur locale $\delta(x)$, à *x* l'abscisse depuis le bord d'attaque, ne dépend que de la partie de la plaque située en amont de cette position et pas de sa longueur totale. Ainsi, cette épaisseur est exprimée par

$$\delta(x)=\sqrt{\nu x/U_e} \qquad (IV.28)$$

Suite à l'autosimilarité des profils de vitesse, avec des changements d'échelles, en prenant une coordonnée spatiale sans dimension, on les ramène à une courbe unique. La coordonnée verticale adimensionnelle est

$$\eta=\frac{y}{\delta(x)} \qquad (IV.29)$$

On cherche une solution pour $u$ de la forme

$$g(\eta) = \frac{u(x,y)}{U_e} \qquad (IV.30)$$

Ce qui conduit à une fonction de courant $\psi$ de la forme suivante

$$\psi(\eta) = U_e \delta \int_0^{\eta} g(\eta')d\eta' = U_e \delta\, f(\eta) \qquad (IV.31)$$

où la fonction $f(\eta)$ est telle que

$$f' = \frac{df}{d\eta} = g(\eta) \qquad (IV.32)$$

A partir de la fonction de courant $\psi(\eta)$ on dérive les expressions des composantes de vitesse

$$u = U_e f'(\eta), \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -U_e f \sqrt{\frac{\nu}{U_e}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - U_e \delta f' \frac{d\eta}{dx} \qquad (IV.33)$$

En reportant les expressions précédentes dans l'équation (II.25) avec

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_e \frac{d\eta}{dx} f'', \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_e}{\delta} f'', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_e}{\delta^2} f''' \qquad (IV.34)$$

on obtient

$$2f''' + ff'' = 0 \qquad (IV.35)$$

L'équation dite « de Blasius », décrivant le profil de vitesse, dont sa variable qui est la fonction *f* doit vérifier les conditions aux limites suivantes

$$f(0) = f'(0) = 0, \lim_{\eta \to \infty} f'(\eta) = 1 \qquad (IV.36)$$

Il n'existe pas de solution analytique à cette équation et il était donc nécessaire de recourir à une résolution numérique. Sa solution qui a été obtenue par Howarth Karman (1938) est de la forme suivante

$$f(\eta) = \frac{1}{2} 0.332\eta^2 + 0(\eta^5) \qquad (IV.37)$$

Ainsi les composantes de vitesse parallèle et normale à l'écoulement sont

$$u(\eta) = 0.332 U_e \eta, \qquad v(\eta) = 0.86 U_e \left(\frac{\nu}{x U_e}\right)^{1/2} \qquad (IV.38)$$

**Tableau IV.1:** Résolution numérique de l'équation différentielle

| $\eta$ | $f$ | $f$ (Ref) | $f'$ | $f'$ (Ref) | $f''$ | $f''$ (Ref) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.3324149 | 0.3320571 |
| **0.5** | 0.0415374 | 0.0414928 | 0.1660637 | 0.1658851 | 0.3312661 | 0.3309107 |
| **1.0** | 0.1657495 | 0.1655716 | 0.3301327 | 0.3297798 | 0.3233453 | 0.3230069 |
| **1.5** | 0.3705335 | 0.3701382 | 0.4873017 | 0.4867890 | 0.3028761 | 0.3025803 |
| **2.0** | 0.6507098 | 0.6500239 | 0.6304093 | 0.6297654 | 0.2669765 | 0.2667514 |
| **2.5** | 0.9973429 | 0.9963104 | 0.7519941 | 0.7512593 | 0.2175484 | 0.2174115 |
| **3.0** | 1.3982207 | 1.3968070 | 0.8468255 | 0.8460440 | 0.1614126 | 0.1613603 |
| **3.5** | 1.8395053 | 1.8376970 | 0.9138312 | 0.9130400 | 0.1077642 | 0.1077726 |
| **4.0** | 2.3079460 | 2.3057450 | 0.9562963 | 0.9555179 | 0.0641969 | 0.0642341 |
| **4.5** | 2.7927180 | 2.7901320 | 0.9802722 | 0.9795140 | 0.0339409 | 0.0339809 |
| **5.0** | 3.2862317 | 3.2832720 | 0.9922822 | 0.9915417 | 0.0158770 | 0.0159068 |
| **5.5** | 3.7838969 | 3.7805700 | 0.9976076 | 0.9968786 | 0.0065906 | 0.0065786 |

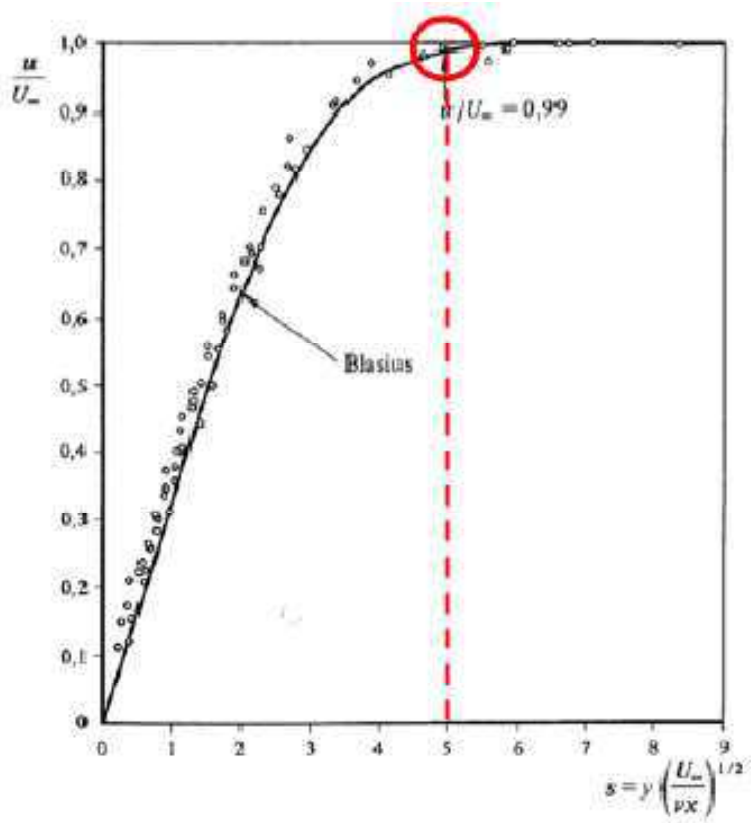



**Figure IV. 7 :** Solution numérique du profil de vitesse de la couche limite à la surface d'une plaque plane

La figure ci-dessus montre la variation du profil de vitesse avec $\eta$. Ce profil est adimensionnel c'est-à-dire il est le même quelque soient la vitesse $U_e$, la position $x$ sur la plaque plane et la viscosité cinématique du fluide. On peut noter que lorsque la variable $\eta$ est inférieure à 2, le profil de vitesse est très proche d'une droite et lorsque $\eta$ atteint 5, $f'$ est supérieur à 0,99.

L'épaisseur de la couche limite a été choisie comme l'ordonné où la vitesse correspond à 99% de la vitesse externe

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5}{\sqrt{U_e x/\nu}} \qquad (IV.39)$$

On définit un nombre de Reynolds local à une distance $x$ du bord d'attaque de la plaque plane dans la couche limite

$$Re_x = \frac{U_e x}{\nu} \qquad (IV.40)$$

Ainsi toutes les grandeurs adimensionnelles peuvent être définies à partir de ce nombre. Il vient

$$\frac{\delta(x)}{x} \approx \frac{5}{\sqrt{Re_x}}, \qquad \frac{\upsilon(x)}{U_e} \approx \frac{0{,}86}{\sqrt{Re_x}} \qquad (IV.41)$$

## IV. 6. 2. Force de traînée

A partir du profil de vitesse, on détermine la force de traînée exercée sur la plaque par l'écoulement. La contrainte de cisaillement (tangentielle) sur la plaque est

$$\tau_p = \tau_{xy}\Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \left(U_e f'(\eta)\right)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} \qquad \text{(IV. 42)}$$

d'où

$$\tau_p(x) = \mu U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} f''(0) \qquad \text{(IV. 43)}$$

En faisant apparaître la pression dynamique $(1/2)\rho U_e^2$ et en prenant la valeur de $f'(0) = 0{,}33$ trouvée par la résolution numérique, la contrainte prend la forme suivante

$$\tau_p(x) = \frac{1}{2}\rho U_e^2 \frac{0{,}66}{\sqrt{Re_x}} \qquad \text{(IV. 44)}$$

La force de traînée totale appliquée par le fluide sur la plaque (par unité d'envergure) est donc définie comme suit

$$F_T = \frac{1}{2}\rho U_e^2 0{,}66 \int_0^L \left(\frac{\nu}{U_e x}\right)^{1/2} dx = \frac{1}{2}\rho U_e^2 \underbrace{(L \times 1)}_{S} \frac{1{,}32}{\sqrt{Re_L}} \qquad \text{(IV. 45)}$$

avec $Re_L = \sqrt{U_e/\nu L}$ est le nombre de Reynolds global.

## IV. 6. 3. Coefficient de trainée local

La traînée se quantifie par un coefficient adimensionnel de traînée établi en référence à la pression dynamique. Le coefficient de traînée local $C_T(x)$ est défini ainsi comme le rapport entre la contrainte de cisaillement et la pression dynamique. Cela mène à la formule de Blasius

$$C_T(x) = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = \frac{0{,}66}{\sqrt{Re_x}} \qquad \text{(IV. 46)}$$

Ce coefficient de frottement montrant cependant une forte dépendance au nombre de Reynolds qui préside au phénomène. En exprimant le Reynolds dans cette relation, on constate qu'en régime laminaire le coefficient de trainée évolue comme $U_e^{1,5}$.

## IV. 6. 4. Coefficient de trainée global

Afin d'obtenir le coefficient de traînée global, il suffit d'intégrer $C_T(x)$ sur toute la longueur de la plaque (par unité d'envergure), soit

$$C_T = \frac{1}{L}\int_0^L C_T(x)\, dx = \frac{1{,}32}{\sqrt{Re_L}} \qquad \text{(IV. 47)}$$

qui est équivalent au rapport entre la force de traînée et la force qui serait exercée par la pression dynamique appliquée uniformément sur toute la plaque

$$C_T = \frac{F_T}{\frac{1}{2}\rho U_e^2 S} \qquad \text{(IV. 48)}$$

## IV. 7. Solution approchée de Von Karman

Considérons la couche limite qui se développe sur une plaque plane mince de longueur L parallèlement placé à un écoulement sans gradient de pression. Partons des équations de Prandtl

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (IV.49)$$

La première équation se réécrit comme suit

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (u\,v)}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (IV.50)$$

En intégrant cette équation par rapport à la variable $y$ sur l'intervalle de la couche limite, on obtient

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dy + U_e\, v(x,\delta) = -\frac{\tau_p}{\rho} \qquad (IV.51)$$

On détermine la deuxième composante de vitesse $v$, à une distance $\delta$ de la plaque, à partir de l'équation de continuité

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy = v(x,\delta) \qquad (IV.52)$$

En substituant l'expression ci-dessus dans l'équation, on aboutit à l'expression suivante

$$\frac{d}{dx}\left[U_e^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e}\left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy\right] = \frac{d(U_e^2\theta)}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho} \qquad (IV.53)$$

Plusieurs solutions approximatives ont été proposées, l'une de ces formulations importantes, du profil de vitesse, a été proposée par Von Karman. Il a considéré un profil parabolique dans la couche limite c'est-à-dire une forme polynomiale du deuxième degré

$$\frac{u}{U_e} = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2, \qquad \frac{y}{\delta} = \eta \qquad (IV.54)$$

Les coefficients $a_0, a_1, a_2$ sont déterminés par les conditions aux limites

$$\begin{cases} \eta = 0, & u = 0 \Longrightarrow a_0 = 0 \\ \eta = 1, & u = U_e \Longrightarrow a_1 + a_2 = 1 \\ \eta = 1, & \tau_\delta = \mu\dfrac{U_e}{\delta}\left.\dfrac{\partial (u/U_e)}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = 0 \Longrightarrow (a_1 + 2\eta a_2)|_{\eta=1} = 0 \end{cases} \qquad (IV.55)$$

La solution de ce système de deux équations à deux inconnus mène à l'expression suivante

$$\frac{u}{U_e} = 2\eta - \eta^2 \qquad \text{(IV. 56)}$$

d'où l'épaisseur de quantité de mouvement est

$$\int_0^{\delta} \frac{u}{U_e}\left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \delta \int_0^1 (2\eta - \eta^2)\,(1 - 2\eta + \eta^2) d\eta = \frac{2}{15}\delta \qquad \text{(IV. 57)}$$

En substituant ce résultat dans l'équation de Von Karman, on obtient

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2U_e^2}{15}\delta(x)\right] = \frac{\tau_p(x)}{\rho} \qquad \text{(IV. 58)}$$

Cette expression représente l'équation différentielle d'évolution de $\delta$ en fonction de l'abscisse *x*. Afin de l'intégrer on évalue d'abord la contrainte de traînée au niveau de la paroi

$$\tau_p(x) = \mu \frac{U_e}{\delta} \frac{\partial(u/U_e)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0} = \mu \frac{U_e}{\delta}(2 - 2\eta)\bigg|_{\eta=0} = \mu \frac{2U_e}{\delta(x)} \qquad \text{(IV. 59)}$$

et on substitue le résultat dans l'équation (II.57)

$$\int_0^{\delta} \delta d\delta = \int_0^x \frac{15\nu}{U_e} dx \qquad \text{(IV. 60)}$$

Par intégration, on aboutit à l'épaisseur approchée de la couche limite locale

$$\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{15\nu}{U_e}x \Longrightarrow \delta(x) = 5{,}48\sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} = \frac{5{,}48x}{\sqrt{Re_x}} \qquad \text{(IV. 61)}$$

En substituant l'épaisseur de la couche limite locale dans l'équation (II.58), on obtient l'expression approchée de la contrainte de cisaillement au niveau de la plaque la plaque

$$\tau_p(x) = \frac{1}{2}\rho U_e^2 \frac{0{,}73}{\sqrt{Re_x}} \qquad \text{(IV. 62)}$$

***Exemple 1***

On considère l'écoulement permanent, d'un fluide incompressible et visqueux, de vitesse $U_e$ arrivant sur une plaque plane mince. Si la distribution des vitesses dans la couche limite laminaire sur une plaque plate est supposée être donnée par le polynôme de premier ordre $u = a + by$, où *a* et *b* sont constants, déterminer :

1. Le rapport $\delta^*/\delta$ entre l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de la couche limite ;
2. Le rapport $\theta/\delta$ entre l'épaisseur de quantité de mouvement et l'épaisseur de la couche limite.

***Solution***

La distribution de vitesse est : $u = a + by$. Afin de déterminer les constantes *a* et *b*, on utilise les conditions aux limites suivantes :

- A $y = 0 : u(0) = 0$

Alors : $0 = a + b \times 0$, d'où : $a = 0$

- A $y = \delta : u(\delta) = U_e$

Alors : $U_e = b \times \delta$, d'où : $b = U_e/\delta$

Par conséquent, le profil de vitesse est linéaire et de la forme

$$u(y) = \frac{U_e}{\delta} y \qquad \text{(IV. 63)}$$

**1.** Le rapport $\delta^*/\delta$

$$\delta^*(x) = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) dy$$
$$= \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy$$
$$= \left(y - \frac{y^2}{2\delta}\right)_0^\delta \Big| = \frac{\delta}{2} \qquad \text{(IV. 64)}$$

D'où $\delta^*/\delta = 1/2$.

**2.** Le rapport $\theta/\delta$

$$\theta = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) \frac{u(y)}{U_e} dy$$
$$= \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{y}{\delta} dy$$
$$= \left(\frac{y^2}{2\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2}\right)_0^\delta \Big| = \frac{\delta}{6} \qquad \text{(IV. 65)}$$

D'où $\theta/\delta = 1/6$.

***Exemple 2***

Le coefficient de traînée local $C_T$ d'une plaque lisse (30m×3m) placée parallèlement à la vitesse $U_e$ (6m/s) caractérisant l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible ($\nu_{eau}=10^{-6}m^2/s$) loin de la plaque, est donné par une des expressions suivantes

- Si la couche est laminaire, pour Re < $5.10^5$ : $C_T = \frac{1{,}328}{(\mathrm{Re})^{1/2}}$
- Si la couche est turbulente, pour Re < $10^7$ : $C_T = \frac{0{,}074}{(\mathrm{Re})^{1/5}}$
- Si la couche est turbulente, pour Re > $10^7$ : $C_T = \frac{0{,}455}{(\log \mathrm{Re})^{2{,}58}}$

**1.** Déterminer la force de frottement s'exerçant sur l'une des faces de la plaque.
**2.** Déterminer la force s'exerçant sur les 3 premiers mètres de la plaque.

***Solution***

**1.** La force de traînée s'exerçant sur une face de la plaque plane
Tout d'abord, il faut déterminer le type de la couche limite. Pour cela, on calcule le nombre de Reynolds global

$$Re_L = \frac{U_e L}{\nu} = \frac{6 \times 30}{10^{-6}} = 1{,}8.10^8 > 10^7 \qquad \text{(IV. 66)}$$

Donc la couche limite au bord de la plaque est turbulente et le coefficient de frottement est déterminé par la relation

$$C_T = 0,455(\log \mathrm{Re})^{-2,58} = 0,455(\log 1,8.10^8)^{-2,58} = 1,965.10^{-3} \qquad (IV.67)$$

L'aire d'une face de la plaque est : $S = 3 \times 30 = 90\mathrm{m}^2$.

Donc la force de traînée s'exerçant sur une face est

$$F_T = \frac{1}{2}\rho U_e^2 C_T S = \frac{1}{2}10^3 \times 36 \times 1,965 \times 10^{-3} \times 90 = 3180N \qquad (IV.68)$$

**2.** La force de frottement s'exerçant sur les *3* premiers mètres de la plaque

Le nombre de Reynolds critique de transition correspond à : Re=$5.10^5$, la position de la ligne transversale de transition est située à la distance x du bord d'attaque telle que

$$Re_x = \frac{U_e x}{\nu} = 5.10^5$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\nu Re_x}{U_e} = \frac{10^{-6} \times 5 \times 10^5}{6} = 0,083m \qquad (IV.69)$$

Comme $x = 0,083m \ll 3m$, on pourra négliger en première approximation l'influence particulière des frottements dans la couche limite laminaire *0<x<0,083m* de sorte si on calcule le coefficient pour les 3 premières mètres de la plaque on a

$$L' = 3m \Longrightarrow Re_{L'} = \frac{6 \times 3}{10^{-6}} = 1,8.10^7$$

$$\Longrightarrow C_T = 0,455(\log Re_{L'})^{-2,58} = 2,74.10^{-3} \qquad (IV.70)$$

Ainsi la force de frottement appliquée sur $S' = 9m^2$ est

$$F_T = \frac{1}{2}\rho U_e^2 C_T S' = \frac{1}{2}10^3 \times 36 \times 2,74 \times 10^{-3} \times 9 = 444N \qquad (IV.71)$$

# CHAPITRE V.

# Ecoulements turbulents

## V. 1. Introduction

Les écoulements turbulents se caractérisent par une apparence très désordonnée, un comportement imprévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. A grand nombre de Reynolds, l'écoulement devient extrêmement sensible aux conditions initiales et aux limites. Des variations infinitésimales peuvent alors mener, sur la durée de l'expérience, à des divergences majeures dans le champ de vitesse du fluide. Cette sensibilité est directement liée au caractère non linéaire du terme d'accélération convective de l'équation Navier-Stokes. Face à ce comportement aléatoire, l'analyse passe obligatoirement par l'étude de grandeurs statistiques.

Dans ce chapitre, on présente la structure tourbillonnaire de la turbulence qui se manifeste par la formation de nombreuses échelles tourbillonnaires, de tailles variées. De plus, l'approche de Reynolds utilisée pour reformuler aux équations de Navier-Stocks pour l'étude des écoulements turbulents y est exposée. Cependant, cette approche ajoute des inconnues au problème à travers le tenseur de Reynolds. On présente ainsi les modèles du tenseur (relation de fermeture) proposés pour la résolution des équations moyennées de l'écoulement.

## V. 2. Nombre de Reynolds

On réécrit l'équation vectorielle de Navier Stocks à l'aide d'un changement de variables basé sur certaines grandeurs caractéristiques. On prend $L$ et $U$ comme échelles respectives de longueur et de vitesse de l'écoulement

$$\vec{r}' = \vec{r}\,L, \qquad \vec{v}' = \vec{v}\,U, \quad p - p_0 = \rho U^2 p', \qquad t = \frac{L}{U}t' \tag{V.1}$$

En substituant ces variables dans l'équation

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{v} \tag{V.2}$$

On obtient

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \left(\vec{v}'.\vec{\nabla}\right)\vec{v}' = -\vec{\nabla}p' + \frac{1}{Re}\Delta\vec{v}' \tag{V.3}$$

Un nombre sans dimension apparait comme une combinaison de $L$, $U$ et $\nu$ est appelé nombre de Reynolds.

$$Re = \frac{UL}{\nu} \tag{V.4}$$

Il représente le rapport entre les forces d'inertie poussant le fluide à continuer son mouvement et les forces de viscosité qui tendent à freiner l'écoulement. Ainsi il constitue un rapport entre les effets convectif et un diffusif, qu'on peut l'écrire en fonction des temps convectif $\tau_c$ et diffusif $\tau_d$ comme suit

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\tau_d}{\tau_c} \tag{V.5}$$

Ainsi les solutions de l'équation de Navier Stocks dépendent de façon prépondérante de la valeur de ce nombre. Lorsque ce nombre est très petit $Re \ll$ le fluide est freiné de manière

homogène et l'écoulement est laminaire, et quand il est grand $Re \gg$ le fluide est agité et les perturbations s'amplifient et l'écoulement est turbulent.

## V. 3. Structures tourbillonnaires

Un nombre de Reynolds élevé signifie que la viscosité n'a plus le temps d'amortir les perturbations. Les moindres aspérités de la paroi ou les fluctuations de vitesse créent des instabilités qui s'amplifient et s'enroulent pour former des structures tourbillonnaires. Ainsi, plus le nombre de Reynolds augmente, plus l'écoulement apparait comme désordonné, avec des structures diverses en taille et en forme.

Cependant, la présence d'une vorticité dans un écoulement ne fait pas nécessairement de celui-ci un écoulement turbulent. La turbulence se manifeste dans des situations décrites par la formation de nombreuses échelles tourbillonnaires, de tailles variées. Par conséquent, la turbulence d'un écoulement représente une instabilité qui rompt sa régularité pour le faire évoluer vers un état désordonné.

### V. 3. 1. Echelles caractéristiques

On considère un écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds, caractérisé à l'échelle globale une vitesse macroscopique $U_{ec}$ et une longueur de référence $L_{ec}$. Cet écoulement est constitué d'une multitude de structures tourbillonnaires de tailles diverses. Les plus grandes structures de cet écoulement, appelées échelles intégrales, ont pour taille caractéristique $l_0$ et pour vitesse caractéristique $u_0$. A ce niveau ces grandeurs sont du même ordre de grandeur que les échelles macroscopiques de l'écoulement global $l_0 \sim L_{ec}$ et $u_0 \sim U_{ec}$. Par conséquent, le nombre de Reynolds de ces grands tourbillons $Re_0 = \frac{u_0(l_0)l_0}{\nu}$ est lui aussi du même ordre que le nombre de Reynolds global de l'écoulement $Re_0 \sim Re$.

Physiquement, un tourbillon est défini comme une région de l'espace animé d'un mouvement de rotation, ou fluctuation locale, se développant sur un domaine de taille caractéristique. Cette structure persiste pendant une durée au moins égale à son temps de retournement $l_0/u_0$, où $u_0$ est la vitesse caractéristique associé à l'échelle $l_0$. On peut estimer que l'énergie cinétique de ce tourbillon est proportionnelle à ${u_0}^2$ et le temps de rotation est $l_0/u_0$, donc le taux de transfert de l'énergie cinétique, par unité de masse, «dissipation $\epsilon$» de ce tourbillon aux plus petit est proportionnel à $u_0^3/l_0$.

### V. 3. 2. Echelles de turbulence

Les échelles de turbulence désignent spécifiquement les dimensions des tourbillons qui coexistent à l'intérieur de l'écoulement lorsque celui ci devient instable.

Contrairement à un écoulement laminaire qui ne possède que l'échelle macroscopique de l'écoulement global, un écoulement turbulent possède un spectre continu d'échelles, une infinité de tailles de tourbillons, logé entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. Ces échelles de turbulence se divisent en trois grandes familles caractéristiques :

- Les grandes échelles $l_0$ directement liées à l'échelle globale du système (liées à la géométrie). Elles contiennent l'essentiel de l'énergie cinétique.

- Les échelles intermédiaires $l$ : les tailles des tourbillons en cours de division (zone d'inertie de Richardson) et l'énergie est dissipée par $\epsilon$.
- Les petites échelles $l_\eta$: les micro-tourbillons de Kolmogorov, où l'énergie est dissipée par la viscosité $\nu$.

## V. 3 .3. Cascade de Richardson

La description des écoulements turbulents est basée sur l'idée que les grosses échelles $l_0$ sont instables et se décomposent pour former des échelles de taille inférieure $u_0, l_0 \rightarrow u, l$.

Ce processus de nature non-visqueuse ($Re_l \gg$) n'est associé à aucune dissipation visqueuse et revient à transférer de l'énergie cinétique des grosses structures vers des structures de taille inférieure $l$. Il se poursuit tant que le nombre de Reynolds des structures générées est suffisamment grand : $Re_l = ul/\nu \gg 1$.

Ce mécanisme s'arrête lorsque le nombre de Reynolds des structures engendrées devient suffisamment réduit pour que les fluctuations soient stabilisées, par les forces de frottement. On atteint alors les échelles de Kolmogorov $l_\eta$, où l'énergie cinétique est intégralement dissipée en chaleur par la viscosité $\nu$.

## V. 3. 4. Théorie de Kolmogorov

Cette théorie explique comment l'énergie circule dans un fluide turbulent où de grands tourbillons d'énergie se brisent en tourbillons de plus en plus petits. Elle est basée sur les deux concepts suivants

### a. Isotropie des échelles

Dans un écoulement autour d'un objet, par exemple de l'air contournant une voiture de longueur de référence $L_{ec}$, les gros tourbillons à l'échelle de $l_0 \sim L_{ec}$ sont fortement influencés par la géométrie de l'obstacle. Ils ont une direction privilégiée : ils sont anisotropes. Lors de la cascade de Richardson où les grands tourbillons se brisent en plus petits $l$, il existe une échelle $l_\eta$ à partir de laquelle les mouvements du fluide deviennent homogènes et isotropes et le fluide perd la mémoire de la géométrie globale.

### b. Similitude locale

A partir du concept des petites échelles, Kolmogorov postule deux hypothèses dimensionnelles basées sur deux paramètres clés : la viscosité cinématique $\nu$ et le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence $\epsilon$.

***Forme universelle est échelle dissipative***

Hypothèse H1: A grand nombre de Reynolds, les statistiques des fluctuations universelles de petites échelles $l$, suffisamment indépendantes des condition aux limites, ne dépendent que de la dissipation visqueuse $\epsilon$ et la viscosité cinématique $\nu$.

***Gamme d'échelles innertielles***

L'existence de cette gamme d'échelles résulte de l'hypothèse H2 de sa théorie.
Hypothèse H2 : A grand nombre de Reynolds, il existe une sous zone d'échelles intermédiaires $l_\eta \ll l \ll l_0$ (zone inertielle), suffisamment petites devant $l_0$ mais assez grande pour que le nombre de Reynolds local soit grand $Re_l = u.l/\nu \gg 1$. Dans cette

zone, l'énergie ne fait que passer à travers les tourbillons sans être détruite et les statistiques des fluctuations ne dépendent plus de la viscosité mais uniquement du taux de dissipation de l'énergie cinétique $\epsilon$.

***Caractéristiques de la zone dissipative***

Les plus petites échelles présentes dans un écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds sont appelées échelles de Kolmogorov ou dissipatives.

Cette zone, dans laquelle les statistiques dépendent de dissipation visqueuse $\epsilon$ et la viscosité cinématique $\nu$, est délimité par l'échelle de Kolmogorov $l_\eta$. On peut ainsi, construire dimensionnellement à l'aide des grandeurs $\epsilon$ et $\nu$, cette échelle ayant pour longueur $l_\eta$, vitesse $u_\eta$ et temps caractéristique $\tau_\eta$ et dont le nombre de Reynolds est égale à $Re_\eta = u_\eta l_\eta/\nu \sim 1$, et les statistiques des mouvements de tailles plus petites que $l_\eta$ sont responsable de la dissipation de l'énergie cinétique par viscosité sous forme de chaleur.

Les caractéristiques, taille et vitesse, des plus petites échelles de Kolmogorov ou dissipative vérifient la condition

$$Re_\eta = \frac{u_\eta l_\eta}{\nu} \sim 1, \qquad l_\eta = l_\eta(\epsilon, \nu), \qquad u_\eta = u_\eta(\epsilon, \nu) \tag{V.6}$$

Le taux de dissipation $\epsilon \sim {u^3}_0/l_0$ est imposé par les grandes structures, puisque la cascade énergétique se fait à grand nombre de Reynolds.

A partir de l'ordre de grandeur de Reynolds et de la dissipation $Re_\eta \sim 1$ $\varepsilon \sim u^3/l$ et à l'aide d'une simple analyse dimensionnelle, on obtient

$$l_\eta \sim \frac{\nu}{u_\eta}, \qquad u_\eta \sim \frac{\nu}{l_\eta} \quad \Rightarrow \epsilon \sim \frac{u_\eta^3}{l_\eta} \sim \frac{\nu^3}{{l_\eta}^4}, \quad \epsilon \sim \frac{u_\eta^3}{l_\eta} \sim \frac{u_\eta^4}{\nu} \tag{V.7}$$

Ce qui conduit aux caractéristiques des plus petites échelles de Kolmogorov ou dissipative

$$l_\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \qquad u_\eta \sim (\nu\,\epsilon)^{1/4}, \qquad \tau_\eta \sim \sqrt{\nu/\epsilon} \tag{V.8}$$

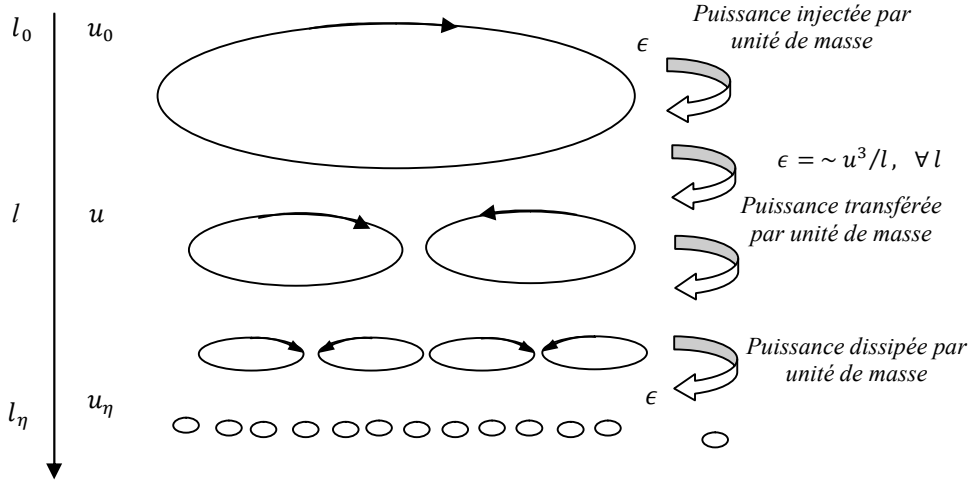



**Figure V. 1 :** Représentation schématique de la théorie de Kolmogorov

## V. 4. Champ moyen et fluctuation

Le caractère imprédictible d'un écoulement turbulent, s'explique par sa sensibilité extrême aux conditions initiales et aux perturbations. Face à ce comportement aléatoire, l'analyse passe obligatoirement par l'étude de grandeurs statistiques. Ainsi chaque grandeur instantanée est décomposée en une somme d'une composante moyenne, et d'une fluctuation.

La valeur moyenne est comptée sur un intervalle de temps assez long et désignée, pour la composante $v_i$ de vitesse, par exemple, par $\overline{v_i}$. Tandis que la fluctuation de la composante $v_i$ de vitesse est notée par $v_i'$. De cette manière on pose

$$u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w', p = \bar{p} + p' \qquad (V.9)$$

La moyenne en temps est calculée en un point fixe dans l'espace et donnée par

$$\bar{u} = \frac{1}{t_1}\iint_{t_0}^{t_0+t_1} u\, dt \qquad (V.10)$$

où l'intervalle $t_1$ est assez long de sort que

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = \overline{p'} = 0, \qquad \overline{u'^2} \neq 0, \qquad \overline{v'^2} \neq 0, \qquad \overline{w'^2} \neq 0, \qquad \overline{p'^2} \neq 0 \qquad (V.11)$$

Avant établir les équations pour l'écoulement turbulent il est utile de rappeler les règles à suivre pour le calcul des grandeurs moyennées

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}, \qquad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \qquad \overline{f.g} = \bar{f}.\bar{g}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, \qquad \overline{\int f ds} = \int \bar{f} ds \qquad (V.12)$$

où $s$ représente l'une des variables $x, y, z$ ou $t$.

Par contre

$$\overline{f.g} \neq \bar{f}.\bar{g} \qquad (V.13)$$

Appliquons ces formules aux grandeurs de flux, par exemple, $\overline{v_i.v_j}$ où $v_i = u, v$ ou $w$

$$v_i.v_j = (\bar{v_i} + v_i')(\bar{v_j} + v_j') = \bar{v_i}\bar{v_j} + \bar{v_i}v_j' + v_i'\bar{v_j} + v_i'v_j' \qquad (V.14)$$

qui, d'après les règles citées ci-dessus, conduit à

$$\overline{v_i.v_j} = \bar{v_i}\bar{v_j} + \overline{v_i'v_j'} \qquad (V.15)$$

## V. 5. Equations de Reynolds

En appliquant l'approche de Reynolds, qui consiste à séparer chaque variable instantanée en une valeur moyenne et fluctuation, aux équations de Navier-Stocks on obtient deux ensembles d'équations distinctes.

### V. 5. 1. Equations de l'écoulement moyennées « RANS »

Afin de déterminer les équations régissant le mouvement moyen, on reprend d'abord l'équation de continuité et les équations de Navier–Stokes incompressibles en système de coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (V.16)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (V.17)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (V.18)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (V.19)$$

Ensuite, nous multiplions l'équation de continuité par $\rho u$ et puis ajoutons le résultat à la projection de l'équation de N.S. suivant $x$, ainsi on obtient

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}+\frac{\partial(uw)}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (V.20)$$

De la même manière, pour les autres équations, on obtient

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(vw)}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (V.21)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial(uw)}{\partial x}+\frac{\partial(vw)}{\partial y}+\frac{\partial(w^2)}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (V.22)$$

Maintenant, on remplace les champs de vitesse $u(\vec{r},t), v(\vec{r},t), w(\vec{r},t)$ et de pression $p$ respectivement par $\bar{u}(\vec{r}) + u'(\vec{r},t)$, $v(\vec{r}) + v'(\vec{r},t)$, $\bar{w}(\vec{r}) + w'(\vec{r},t)$ et $\bar{p}(\vec{r}) + p'(\vec{r},t)$ et par la suite prenons la moyenne en temps des équations ainsi trouvées. On rappelle que l'écoulement moyen est stationnaire, et donc que la quantité de mouvement doit être constante en un point fixe $\vec{r}$ de l'écoulement.

L'équation de conservation de masse moyennée conserve la même forme que l'équation instantannée

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0 \quad (V.23)$$

Les équations de quantité de mouvement régissant l'écoulement moyen devient

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{u}-\rho\left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right) \quad (V.24)$$

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\mu\nabla^2\bar{v}-\rho\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right) \quad (V.25)$$

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\mu\nabla^2\bar{w}-\rho\left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right) \quad (V.26)$$

ayant la forme tensorielle suivante

$$\rho\bar{v}_j\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right)-\rho\frac{\partial\left(\overline{v_i'v_j'}\right)}{\partial x_j} \quad (V.27)$$

Cette équation est presque la même qu'on aurait obtenue en remplaçant $v_i$ par $\overline{v_i}$ dans l'équation de Navier Stocks instantanné. La seule différence est le terme quadratique en composante de vitesse turbulente $-\rho\partial_j\left(\overline{v_i'v_j'}\right)$ au côté droit de l'équation.

Le terme de viscosité de l'écoulement moyen se réécrit sous la forme suivante

$$\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j}\right)=2\mu\left(\frac{\partial\overline{\varepsilon_{ij}}}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial\overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} \qquad (V.28)$$

où $\overline{\varepsilon_{ij}}$ est le tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen exprimé comme suit

$$\overline{\varepsilon_{ij}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v_j}}{\partial x_i}\right) \qquad (V.29)$$

On regroupe le terme de pression et de pesanteur, en utilisant la pression motrice au lieu de la pression. A l'aide de la divergence du champ de vitesse moyen nulle, l'expression tensorielle de l'équation du mouvement moyenné s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v_j}\overline{v_i}+\bar{p}\delta_{ij}-\overline{\tau_{ij}}+\rho\overline{v_i'v_j'}\right)=0 \qquad (V.30)$$

Cette équation représente du bilan du flux de quantité de mouvement $\rho\overline{v_i}$ de l'écoulement moyen. Du fait que, ce dernier est stationnaire $\partial(\rho\overline{v_i})/\partial t=0$, la somme des flux moyens, entrant et sortant, à travers une surface fermée englobant le point fixe $\vec{r}$, est nulle. Ces flux représentent le transport de quantité de mouvement moyen $\rho\overline{v_i}$ dans la direction j associé aux effets de : flux convectif $\rho\overline{v_j}\overline{v_i}$, forces de pression $\bar{p}\delta_{ij}$, forces de frottement visqueux $-\overline{\tau_{ij}}=2\mu\overline{\varepsilon_{ij}}$, et aux fluctuations de la turbulence $\rho\overline{v_i'v_j'}$.

Ce dernier terme de transport moyen, réalisé par diffusion turbulente, est appelé tenseur de Reynolds. Il décrit l'effet des fluctuations de vitesse sur l'écoulement moyen

$$\tau_{ij}'=-\rho\overline{v_i'v_j'} \qquad (V.31)$$

Ces fluctuations turbulentes constituent une source supplémentaire de friction autre que les frottements d'effet visqueux créés dans l'écoulement moyen. Elles jouent le même rôle que les contraintes visqueuses, mais elles expriment la diffusion de quantité de mouvement à l'échelle de la turbulence.

On constate que le tenseur de contraintes turbulentes est symétrique mais il diffère du tenseur de contraintes visqueuses dans la caractéristique de trace non nulle

$$\bar{\bar{\tau}}'=-\rho\begin{pmatrix}\overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'}\\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'}\\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2}\end{pmatrix}\Longrightarrow \mathrm{tr}\bar{\bar{\tau}}'=-\rho\overline{v_i'v_i'} \qquad (V.32)$$

## V. 5. 2. Equations de l'écoulement fluctuant

Ces équations gouvernent uniquement les fluctuations de vitesse $v_j'$ et de pression $p'$. On les obtient en soustrayant les équations de l'écoulement moyenné des équations instantannées.

On aboutit à l'équation de continuité en variables de fluctuation gardant la même forme de divergence nulle

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0 \qquad (V.33)$$

La soustraction de l'équation de l'écoulement moyen RANS de l'équation de quantité de mouvement instantané, donne le résultat suivant

$$\rho\left[\frac{\partial v_i'}{\partial t}+\left(v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\overline{v_j}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}\right)\right]=-\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i'}{\partial {x_j}^2}+\rho\frac{\partial\left(\overline{v_i'v_j'}\right)}{\partial x_j} \qquad (V.34)$$

Afin de faire apparaitre toutes les fluctuations, on développe le terme advectif du mouvement instantané

$$v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\left(\overline{v_j}+v_j'\right)\frac{\partial(\overline{v_i}+v_i')}{\partial x_j}=\overline{v_j}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}+\overline{v_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}+v_j'\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}+v_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \qquad (V.35)$$

En substituant cette expression dans l'équation (V.34), on obtient

$$\rho\left(\frac{\partial v_i'}{\partial t}+\overline{v_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i'}{\partial {x_j}^2}+\rho v_j'\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}-\rho\left(v_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}-\frac{\partial\left(\overline{v_i'v_j'}\right)}{\partial x_j}\right) \qquad (V.36)$$

En utilisant l'équation de continuité et en réorganisant les termes, l'équation de l'écoulement fluctuant prend la forme suivante

$$\rho\left(\frac{\partial v_i'}{\partial t}+\overline{v_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i'}{\partial {x_j}^2}-\rho v_j'\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}-\rho\frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i'v_j'-\overline{v_i'v_j'}\right) \qquad (V.37)$$

dont le terme $-\rho v_j'\partial_j\overline{v_i}$ représente l'interaction entre les fluctuations et le gradient de vitesse moyenne responsable du transfert d'énergie de l'écoulement moyen pour alimenter la turbulence. Quant au terme $\rho\partial_j\left(v_i'v_j'-\overline{v_i'v_j'}\right)$, il représente le transport de fluctuation par elles mêmes et responsable de la création de la turbulence ou du transfert d'énergie dans la cascade turbulente.

A partir de cette équation de l'écoulement fluctuant, on peut obtenir l'équation de l'énergie cinétique turbulente notée par la variable $k = (1/2)\,\overline{v_i'v_i'}$. Cela consiste à effectuer un produit scalaire de l'équation fluctuante par le vecteur de vitesse fluctuante puis appliquer une moyenne.

Ainsi, en multipliant l'équation (V.37) par $v_i'$, on obtient

$$v_i'\frac{\partial v_i'}{\partial t}+v_i'\overline{v_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}v_i'\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu v_i'\frac{\partial^2 v_i'}{\partial {x_j}^2}-v_i'v_j'\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}-v_i'v_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}+v_i'\frac{\partial\overline{v_i'v_j'}}{\partial x_j} \qquad (V.38)$$

En appliquant la moyenne sur les parties de l'équation (V.38), et après un réarrangement à l'aide de l'équation de continuité, on obtient

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}+\overline{v_j}\frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Advectiio de k}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\overline{p'v_j'}\right)}{\partial x_j}}_{\text{diffusion spatiale par p}'} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\overline{v_i'v_i'v_j'}\right)}{\partial x_j}}_{\text{diffusion par turbulence}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 k}{\partial {x_j}^2}}_{\text{Diffusion visqueuse}}$$
$$+ \underbrace{\nu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}}_{\text{Dissipation turbulente}} - \underbrace{\overline{v_i'v_j'}\frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_j}}_{\text{Production de turbulence}} \qquad (V.39)$$

## V. 6. Modèles de viscosité turbulente

La décomposition de Reynolds ajoute six inconnus supplémentaires, appelées contraintes de Reynolds $\rho\overline{v_i'v_j'}$, au problème autres que les valeurs moyennes de composantes du vecteur vitesse et les valeurs moyenne de pression. Ainsi, la résolution des équations de Reynolds nécessite de chercher des relations de fermeture.

### V. 6. 1. Modèle de Boussinesq

Afin de résoudre le problème de fermeture des équations de Reynolds, Boussinesq a postulé que le transfert de quantité de mouvement par tourbillons turbulent puisse être modélisé de la même manière que le transfert par l'agitation moléculaire. Il a proposé de faire une analogie entre les contraintes turbulentes et les contraintes visqueuses des fluides newtoniens en considérant une linéarité entre les contraintes de Reynolds $\overline{\overline{\tau}'}$ et taux de déformation $\overline{\varepsilon_{ij}}$ de l'écoulement moyen dont le facteur de proportionnalité est appelé viscosité dynamique turbulente $\mu_t$.

$$\tau'_{ij} = -\rho\overline{v_i'v_j'} = 2\mu_t\overline{\varepsilon_{ij}} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \qquad (V.40)$$

où $k$ est l'énergie cinétique turbulente et $\delta_{ij}$ le symbole de Kroneker.

Cependant, cette viscosité $\mu_t$ présente une propriété de l'écoulement variant avec la position et le temps, contrairement à la viscosité moléculaire qui constitue une propriété du fluide.

Ce qui est séduisant dans le problème, c'est qu'en réinjectant cette expression dans l'équation de l'écoulement moyen RANS, les deux termes du gradient de vitesse moyennes $\left(\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v_j}}{\partial x_i}\right)$ dans le tenseur visqueux et le tenseur de Reynolds se factorisent et le terme de transport visqueux dans l'équation retrouve une forme identique tout en prenant une viscosité effective $\mu_{\text{eff}}(\vec{r},t) = \mu + \mu_{\text{t}}(\vec{r},t)$. Le terme qui reste $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$ est, quant à lui, simplement absorbé dans un terme de pression $p^*.\delta_{ij} = p^- + \frac{2}{3}\rho k$, ce qui garde la même forme de l'équation de l'écoulement moyen.

L'idée de Boussinesq s'inspire de la théorie cinétique des gaz de Maxewell et Boltzman qui repose sur les hypothèses suivante

- En régime laminaire, la viscosité moléculaire provient de l'échange de quantité de mouvement à l'échelle microscopique.

- En régime turbulent, les tourbillons dans le fluide agissent comme grosses molécules macroscopique qui se mélangent et échangent de la quantité de mouvement à grande échelle.

Cependant, cette analogie soufre de trois failles qui sont : l'absence de l'échelle de séparation et l'hypothèse d'isotropie.

Afin de calculer la viscosité turbulente des modèles, qui diffèrent dans le nombre, des équations différentielles de transport supplémentaires introduites, ont été proposés. Le plus simple est le modèle de longueur de mélange.

### V. 6. 2. Modèle de Prandtl : longueur de mélange

Ce modèle est le plus connu parmi les modèles qui n'utilisent pas d'équations de transport. Il suppose que la turbulence s'adapte instantanément aux modifications locales de l'écoulement et que la viscosité turbulente est déterminée directement des formules basées sur des grandeurs géométriques caractéristiques des écoulements pariétaux comme la distance à la paroi et le gradient local de vitesse.

Il repose sur la notion de longueur de mélange de Prandtl $l_m$. L'idée fondatrice est une analogie avec l'expression de la viscosité cinématique moléculaire calculée en théorie cinétique des gaz parfait

$$\nu \sim v_{th}\lambda_c \qquad (V.41)$$

où $u_{th}$ est la vitesse d'agitation thermique des molécules et $\lambda_c$ est leur libre parcours moyen.

En transportant cette idée à la turbulence, Prandtl postule que la viscosité cinématique turbulente $\nu$ dépend d'une échelle de vitesse turbulente $v_t$ et d'une échelle de longueur locale, appelée longueur du mélange $l_m$

$$\nu_t \sim u_t l_m \qquad (V.42)$$

En estimant que l'échelle de vitesse est proportionnelle au gradient local de vitesse moyenne multiplié par cette longueur $u_t \sim l_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, on obtient l'expression classique de la viscosité turbulente de Prandtl

$$\nu_t \sim l_m^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \qquad (V.43)$$

Le modèle ne donne pas de valeur intrinsèque de $l_m$ ; il faut la spécifier de manière empirique selon la géométrie de l'écoulement.

Dans une couche limite proche d'une paroi, les structures tourbillonnaires sont physiquement limitées par la présence de la paroi solide. Plus on s'éloigne de la paroi, plus les tourbillonnaires peuvent grandir.

$$l_m = \kappa y \qquad (V.44)$$

où $\kappa$ est la constante de Van Karman ($\kappa \approx 0.41$) et $y$ la distance à la paroi.

## V. 7. Modèles de turbulence à deux équations

La modélisation numérique des écoulements turbulents à deux équations est basée sur l'approche RANS (*Reynolds-Averaged-Navier-Stockes*). Elle permet de résoudre le problème de fermeture, qui est le calcul du tenseur de Reynolds, en se basant sur l'hypothèse de Boussinesq, qui introduit une relation linéaire entre le tenseur de Reynolds et le tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen. Pour cela, le système est complété par l'adjonction de deux équations de transport : l'une pour l'équation cinétique turbulente $k$ et l'autre pour le taux de dissipation de la turbulente $\epsilon$. Parmi ces modèles les plus utilisés on cite le modèle $k-\omega$, le modèle $k-\epsilon$.

$$k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'}, \qquad \epsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\right)^2}, \quad \omega = \frac{\epsilon}{C_\mu k} \tag{V.45}$$

### V. 7. 1. Modèle (k − ϵ)

Le modèle standard $k-\epsilon$ est le plus utilisé parmi les modèles statistiques, reposant sur l'hypothèse de la viscosité turbulente, cependant il s'applique uniquement à l'extérieur de la sous-couche visqueuse et il s'écrit comme suit

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{v_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + G_k - \rho\epsilon \tag{V.46}$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \bar{v_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{\epsilon}{k}(C_1 G_k - C_2 \rho\epsilon) \tag{V.47}$$

où $G_k$ représente le taux de production de turbulence $k$ défini par

$$G_k = -\rho\overline{v_i' v_j'}\frac{\partial \bar{v_i}}{\partial x_j} = \left[\mu_t\left(\frac{\partial \bar{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v_j}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}\right]\frac{\partial \bar{v_i}}{\partial x_j} \tag{V.48}$$

avec

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \tag{V.49}$$

Les constantes sont fixées de manière à ce que le modèle se comporte bien pour un certain nombre de configurations académiques bien connues.

| $C_\mu$ | $C_1$ | $C_2$ | $\sigma_k$ | $\sigma_\varepsilon$ | $\sigma_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,09 | 1,44 | 1,92 | 1 | 1,3 | 0,9 |

### V. 7. 2. Modèle (k − ω)

Le modèle standard $k$-$\omega$ a été conçu pour pallier la principale faiblesse du modèle $k$-ε ayant une incapacité à traiter de manière naturelle les zones proches des parois solides. Ce modèle k- $\omega$ peut s'appliquer directement jusqu'à la paroi à travers la sous couche visqueuse, sans avoir recours à des fonctions d'amortissement complexes ou à des lois de paroi empiriques. La seconde variable physique transférée est $\omega$ la fréquence turbulente spécifique.

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t}+\ \rho\bar{v_j}\frac{\partial k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\vartheta_{k1}\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]+G_k-\beta^*\rho\omega k \qquad (V.50)$$

$$\rho\frac{\partial \omega}{\partial t}+\ \rho\bar{v_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\vartheta_{\omega 1}\mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right]+\alpha_1\frac{\omega}{k}G_k-\beta_1\rho\omega^2 \qquad (V.51)$$

où $G_k$ représente le taux de production de turbulence $k$ défini par

$$G_k=-\rho\overline{v_i{}'v_j{}'}\frac{\partial \bar{v_i}}{\partial x_j}=\left[\mu_t\left(\frac{\partial \bar{v_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{v_j}}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}\right]\frac{\partial \bar{v_i}}{\partial x_j} \qquad (V.52)$$

avec

$$\mu_t=\rho\frac{k}{\epsilon} \qquad (V.53)$$

| $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\beta^*=\mathrm{C}_\mu$ | $\vartheta_{k1}$ | $\vartheta_{\omega 1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5/9 | 3/40 | 0.09 | 1/2 | 1/2 |

# Références bibliographiques

[1] R. Comolet, *Mécanique Expérimentale des Fluides, Tome II, Dynamique des Fluides Réels, Turbomachines, Editions Masson, 1982.*

[2] T. C. Papanastasiou, G. C. Georgiou and A. N. Alexandrou, *Viscous Fluid Flow,* CRC Press LLC, 2000.

[3] H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, Mc-Graw-hill, 1979.

[4] S. Candel, *Mécanique des Fluides*, Dunod, 1990.

[5] B. Jack Evett, Cheng Liu, *2500 Solved Problems in Fluid Mechanics and Hydraulics*, Mc-Graw-hill, Inc. 1988.

[6] D. Desjardins, M. Touzet-Cortina, *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus ; cours et exercices corrigés*, Dunod, 1999.

[7] Frank M. White, *Fluid mechanics*, 7th Ed., Mc-Graw-hill, Inc. 2011.

[8] Yunus A. Çengel, John M. Cimbala, *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. 1st.Ed. Mc-Graw-Hill, 2006.

[9] B. R. Muson, D. F. Young, T. H. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, John Wiley & Son, 2002.

[10] D. Desjardins, M. Combarnous, N. Bonneton, *Mécanique des Fluides-Problèmes Rrésolus avec Rappels de Cours*, Dunod, Paris, 2002.

[11] T. Faure, *Dynamique des Fluides Appliqué - Application à l'Aérodynamique*, Dunod, Paris, 2008.

[12] P. K. Kundu, I. M. Cohen, *Fluid Mechanics*, Elsevier Academic Press, 3rd Ed., 2004.

[13] S. K. Som, G. Biswas, *Introduction to Fluid Mechanics and Fluid Machines*, Tata Mc-Graw-hill Publishing Company Limited, New-Delhi, 2004.

[14] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, David R. Dowling, *Fluid Mechanics*, 5th. Ed. Elsevier Inc. 2012.

[15] B. S. Massey, A. J. Ward-Smith, *Mechanics of Fluids*, 8th. Ed. Taylor & Francis, 2006.

[16] W.P. Graebel, *Advenced Fluid Mechanics,* Academic Press 2007.

[17] J. J. Bloomer, *Practical Fluid Mechanics for Engineering Applications*, Marcel Dekker Inc. edition, 2000.

[18] H. Tennekes and J. L. Lumeley, *A first Course in Turbulence,* The MIT Press 1972.

[19] P. Chassaing, *Turbulence en Mécanique des Fluides*, Cepadues, 1997.

[20] A. Laissaoui, *Mécanique des Fluides II,* Support de Cours de 3ème année Génie Mécanique : spécialité Energétique, Université de Mohamed Seddik Benyahia, 2022.

[21] A. Ridha, *Cours de Dynamique des Fluides Réels,* M1 Mathématiques et applications : spécialité Mécanique, Université de Caen, 2009.