Département de Mathématiques

Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Géométrie

Cours destiné aux étudiants de deuxième année

Licence en Mathématiques

Avril 2020

Belhannache Farida

Chapitre 1

Géométrie affine

1.1 Espaces affines

1.2 Barycentres

1.3 Sous espaces affines

1.4 Repère cartésien

1.5 Repère affine

1.6 Applications Affines

Définition 1.6.1 *Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines de directions E_1 et E_2 respectivement et $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ une application.*
On dit que f est affine si il existe une application linéaire $l : E_1 \to E_2$ vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{E}_1,\ \forall u \in E_1,\ f(A+u) = f(A) + l(u).$$

l est appelée la partie linéaire de f.

Lemme 1.6.1 *Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines de directions E_1 et E_2 respectivement et $l : E_1 \to E_2$ une application linéaire. Alors $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ est une application affine dont la partie linéaire est l si et seulement si $\forall A, B \in \mathcal{E}_1,\ \overrightarrow{f(A)f(B)} = l(\overrightarrow{AB})$.*

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$? Supposons que $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ est une application affine dont la partie linéaire est l. Soit $A, B \in \mathcal{E}_1$, alors

$$f(B) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + l(\overrightarrow{AB}),$$

d'où $\overrightarrow{f(A)f(B)} = l(\overrightarrow{AB})$.

(ii) $\Leftarrow$? Supposons maintenant que $\forall A, B \in \mathcal{E}_1,\ \overrightarrow{f(A)f(B)} = l(\overrightarrow{AB})$. Soient $A \in \mathcal{E}_1$ et $u \in E_1$, on prend $B = A + u$ on trouve

$$f(A+u) = f(B) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(B)} = f(A) + l(\overrightarrow{AB}) = f(A) + l(u),$$

donc f est affine.

■

Proposition 1.6.1 *Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines de directions E_1 et E_2 respectivement et $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ une application affine dont la partie linéaire est l. Alors*

1. *f est injective si et seulement si l est injective.*
2. *f est surjective si et seulement si l est surjective.*
3. *f est bijective si et seulement si l est bijective et f^{-1} est une application affine dont la partie linéaire est l^{-1}.*

Démonstration. On montre le premier cas et de la même manière on peut montrer les deux autres cas.

1. **(i)** $\Rightarrow$? Supposons que f est injective. Soient $u, v \in E_1$ tel que $l(u) = l(v)$ et $A \in \mathcal{E}_1$, alors

$$f(A+u) = f(A) + l(u) = f(A) + l(v) = f(A+v),$$

mais f est injective donc $A + u = A + v$, d'où $u = v$ (car l'application $u \rightarrow A + u$ est bijective). Alors l est injective.

(ii) $\Leftarrow$? Supposons que l est injective. Soit $A, B \in \mathcal{E}_1$ tel que $f(A) = f(B)$. On a

$$f(B) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + l(\overrightarrow{AB}),$$

donc $l(\overrightarrow{AB}) = 0_{E_2} = l(0_{E_1})$. Mais l est injective donc $\overrightarrow{AB} = o_{E_1}$, d'où $A = B$, c'est-à-dire f est injective.

■

Définition 1.6.2 *Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines de directions E_1 et E_2 respectivement et $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ une application affine.*

1. *f est appelée endomorphisme affine de $\mathcal{E}$ si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$.*
2. *f est appelée isomorphisme affine si f est bijective.*
3. *f est appelée automorphisme affine si f est un endomorphisme affine bijectif.*

Proposition 1.6.2 *Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines de directions E_1 et E_2 respectivement et $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ une application. Soit $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1}^p$ un système de points pondérés de $\mathcal{E}_1$ tel que $\sum\limits_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$ et soit G le barycentre de ce système. Alors f est affine si et seulement si $f(G)$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(f(A_i), \lambda_i)\}_{i=1}^p$ de $\mathcal{E}_2$.*

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$? Supposon que f est affine dont la partie linéaire est l. En utilisant la définition de G et la linéarité de l on trouve

$$l\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i l(\overrightarrow{GA_i}) = l(0_{E_1}) = 0_{E_2}.$$

D'après le Lemme 1.6.1 on a $l(\overrightarrow{GA_i}) = \overrightarrow{f(G)f(A_i)}$, donc

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = 0_{E_2},$$

c'est-à-dire $f(G)$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(f(A_i), \lambda_i)\}_{i=1}^p$.

(ii) $\Leftarrow$? Supposons que si G est le barycentre d'un système de points pondérés quelconque $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i=1}^p$ alors $f(G)$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(f(A_i), \lambda_i)\}_{i=1}^{p}$ et montrons que f est affine. Soit $A \in \mathcal{E}_1$, on considère l'application $l : E_1 \to E_2$ définie par

$$\forall u \in E_1,\ l(u) = \overrightarrow{f(A+u)f(A)} = f(A+u) - f(A).$$

Il est clair que si l est linéaire alors f est affine, donc il suffit de montrer que l est linéaire.

Soient $u, v \in E_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $B, C, D \in \mathcal{E}_1$ tels que $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ et $\alpha u + \beta v = \overrightarrow{AD}$.

En utilisant la relation de Chasles on trouve

$$(1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{AD} - \alpha\overrightarrow{DB} - \beta\overrightarrow{DC} = 0_{E_1}.$$

Alors D est le barycentre du système $\{(A, \alpha + \beta - 1), (B, -\alpha), (C, -\beta)\}$, donc $f(D)$ est le barycentre du système $\{(f(A), \alpha + \beta - 1), (f(B), -\alpha), (f(C), -\beta)\}$, c'est-à-dire

$$(\alpha + \beta - 1)\overrightarrow{f(D)f(A)} - \alpha\overrightarrow{f(D)f(B)} - \beta\overrightarrow{f(D)f(C)} = 0_{E_1}.$$

En utilisant encore la relation de Chasles on obtient

$$\overrightarrow{f(D)f(A)} = \alpha\overrightarrow{f(B)f(A)} + \beta\overrightarrow{f(C)f(A)},$$

d'où

$$l(\alpha u + \beta v) = \alpha l(u) + \beta l(v),$$

donc l est linéaire.

■

Proposition 1.6.3 *Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines de directions E_1 et E_2 respectivement et $f : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ une application affine dont la partie linéaire est l. Alors*

(a) *Si ζ_1 est un sous espace affine de $\mathcal{E}_1$ de direction F, alors $f(\zeta)$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}_2$ de direction $l(F)$.*

(b) *Si ζ_2 est un sous espace affine de $\mathcal{E}_2$ de direction G, alors $f^{-1}(\zeta_2)$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}_1$ de direction $l^{-1}(G)$.*

Démonstration. (TD). ■

Définition 1.6.3 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. On appelle forme affine toute application affine $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$.*

Remarque 1.6.1 *Si f est une forme affine, alors sa partie linéaire est une forme linéaire.*

Proposition 1.6.4 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie n et de direction E.*

1. *Soient $k \in \mathbb{K}$ et $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ une forme affine non constante dont la partie linéaire est l. Alors $f^{-1}(\{k\})$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$ de direction $Ker(l)$, et l'équation $f(m) = k$ est une équation de cet hyperplan.*
2. *Soit H un hyperplan de $\mathcal{E}$. Alors il existe une forme affine non constante $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ telle que $H = f^{-1}(\{0\})$.*
3. *Soit H un hyperplan de $\mathcal{E}$ d'équation $f(m) = 0$. Alors les hyperplans parallèles à H sont ceux dont une équation $f(m) = k$, où $k \in \mathbb{K}$.*

1.7 Translation

Définition 1.7.1 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.*
On appelle dilatation de rapport $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ toute application affine dont la partie linéaire est αid_E.

Remarque 1.7.1 *De la Proposition 1.6.1 on trouve que toute dilatation est une application affine bijective.*

Proposition 1.7.1 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, Δ une droite affine de direction F et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une dilatation de rapport α. Alors $f(\Delta)$ est une droite affine parallèle à Δ.*

Démonstration. On a f est une application affine dont la partie linéaire est αid_E donc l'image de Δ par f est un sous espace affine de direction $\alpha id_E(F) = F$, d'où $f(\Delta) \parallel \Delta$. ■

Définition 1.7.2 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $u \in E$.*
On appelle translation de vecteur u toute application $T_u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{E}, \, T_u(A) = A + u.$$

Proposition 1.7.2 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $u \in E$. Alors toute translation T_u est une dilatation de rapport 1.*

Démonstration. Soient $A \in \mathcal{E}$ et $u \in E$. On définit l'application $l : E \to E$ par

$$\forall v \in E, \, l(v) = T_u(A + v) - T_u(A),$$

donc

$$\forall v \in E,\, l(v) = v = id_E(v).$$

D'où T_u est une dilatation de rapport 1. ■

Lemme 1.7.1 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine dont la partie linéaire est $l = id_E$. Alors f est une translation.*

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{E}$. Posons $u = \overrightarrow{Bf(B)}$, donc $\forall A \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} f(A) &= f(B + \overrightarrow{BA}) \\ &= f(B) + l(\overrightarrow{BA}) \\ &= f(B) + \overrightarrow{BA} \\ &= B + \overrightarrow{Bf(B)} + \overrightarrow{BA} \\ &= A + u \\ &= T_u(A). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.7.3 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, $u, v \in E$ et $T_u, T_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux translations de vecteurs u et v respectivement. Alors*

1. $T_u \circ T_v = T_{u+v}$,
2. $T_u \circ T_v = T_v \circ T_u$,
3. T_u *est inversible et* $T_u^{-1} = T_{-u}$.

Démonstration. (TD). ■

1.8 Homothéties

Définition 1.8.1 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, $W \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0,1\}$ On appelle homothétie de centre W et de rapport α toute application $h_{W,\alpha} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par*

$$\forall A \in \mathcal{E},\ h_{W,\alpha}(A) = W + \alpha\overrightarrow{WA}.$$

Lemme 1.8.1 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, $W \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ Alors toute homothétie $h_{W,\alpha}$ est une dilatation de rapport α.*

Démonstration. Soient $A \in \mathcal{E}$ et $u \in E$. On définit l'application $l : E \to E$ par

$$\forall u \in E,\ l(u) = h_{W,\alpha}(A+u) - h_{W,\alpha}(A),$$

alors

$$\begin{aligned} l(u) &= \overrightarrow{(W+\alpha\overrightarrow{WA})(W+\alpha(\overrightarrow{W(A+u)})} \\ &= \overrightarrow{(W+\alpha\overrightarrow{WA})(W+\alpha\overrightarrow{WA}+\alpha u)} \\ &= \alpha u \\ &= \alpha id_E(u) \end{aligned}$$

D'où $h_{W,\alpha}$ est une dilatation de rapport α. ■

Lemme 1.8.2 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine dont la partie linéaire est $l = \alpha id_E$ avec $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$. Alors f est une homothétie de centre $W = A + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{Af(A)}$ et de rapport α où A est un point quelconque de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. (TD). ■

Proposition 1.8.1 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, $W_1, W_2 \in \mathcal{E}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ et h_{W_1,α_1} et h_{W_2,α_2} deux homothéties de centres W_1 et W_2 respectivement et de rapports α_1 et α_2 respectivement. Alors*

(a) *$h_{W_1,\alpha_1} \circ h_{W_2,\alpha_2}$ est une homothétie de centre $W = W_1 + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{W_1W_2}$ et de rapport $\alpha_1\alpha_2$ si $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$.*

(b) *Si $\alpha_1\alpha_2 = 1$, alors $h_{W_1,\alpha_1} \circ h_{W_2,\alpha_2}$ est une translation de vecteur $u = (\alpha_1 - 1)\overrightarrow{W_1W_2}$.*

1.9 Projections

Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

Définition 1.9.1 *On appelle projection vectorielle sur F dans la direction de G l'application $\Pi_{F,G} : E \to E$ définie par*

$$\forall u \in E,\, u = v + w,\, v \in F \text{ et } w \in G,\, \Pi_{F,G}(u) = v.$$

Proposition 1.9.1 *La projection vectorielle $\Pi_{F,G}$ est une application linéaire et on a*

1. $Ker(\Pi_{F,G}) = G$.
2. $Im(\Pi_{F,G}) = F$.
3. $u = \Pi_{F,G}(u) \Leftrightarrow u \in F$.
4. $\Pi_{F,G} \circ \Pi_{F,G} = \Pi_{F,G}$.

Démonstration. (TD). ■

Définition 1.9.2 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions F et G respectivement.*
On appelle projection sur $\mathcal{E}_1$ dans la direction de $\mathcal{E}_2$ l'application $P_{\mathcal{E}_1,G} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{E},\ P(M) = M' \text{ avec } (M+G) \cap \mathcal{E}_1 = \{M'\}.$$

Proposition 1.9.2 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions F et G respectivement. Alors*

1. *La projection $P_{\mathcal{E}_1,G}$ est une application affine et sa partie linéaire est la projection vectorielle $\Pi_{F,G}$.*
2. *$P_{\mathcal{E}_1,G} \circ P_{\mathcal{E}_1,G} = P_{\mathcal{E}_1,G}$ et $P_{\mathcal{E}_1,G}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_1$.*
3. *$P_{\mathcal{E}_1,G}(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathcal{E}_1$.*
4. *Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application affine avec $f \circ f = f$, alors f est une projection.*

Démonstration. (Exercice). ■

1.10 Symétries

Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

Définition 1.10.1 *On appelle symétrie vectorielle par rapport à F dans la direction de G l'application $\sigma_{F,G} : E \to E$ définie par*

$$\forall u \in E,\ u = v + w,\ v \in F \text{ et } w \in G,\ \sigma_{F,G}(u) = v - w.$$

Proposition 1.10.1 *La symétrie vectorielle $\sigma_{F,G}$ a les propriétés suivantes*

1. $\sigma_{F,G}$ *est une application linéaire.*
2. $u = \sigma_{F,G}(u) \Leftrightarrow u \in F$.
3. $\sigma_{F,G}(u) = -u \Leftrightarrow u \in G$.
4. $\sigma_{F,G} \circ \sigma_{F,G} = id_E$.
5. $\sigma_{F,G} = \Pi_{F,G} - \Pi_{G,F}$.

Démonstration. (TD). ■

Définition 1.10.2 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions F et G respectivement.*
On appelle symétrie par rapport à $\mathcal{E}_1$ dans la direction de $\mathcal{E}_2$ l'application $S_{\mathcal{E}_1,G} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{E},\ S_{\mathcal{E}_1,G}(M) = M + 2\overrightarrow{MP_{\mathcal{E}_1,G}(M)},$$

où $P_{\mathcal{E}_1,G}$ est la projection affine sur $\mathcal{E}_1$ dans la direction de $\mathcal{E}_2$.

Proposition 1.10.2 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions F et G respectivement. Alors*

1. *La symétrie $S_{\mathcal{E}_1,G}$ est une application affine et sa partie linéaire est la symétrie vectorielle $\sigma_{F,G}$.*
2. $S_{\mathcal{E}_1,G}(M)$ *est l'unique point M' de $\mathcal{E}$ tel que $P_{\mathcal{E}_1,G}(M)$ est le milieu de $[MM']$.*
3. $S_{\mathcal{E}_1,G} \circ S_{\mathcal{E}_1,G} = id_{\mathcal{E}}$.
4. $S_{\mathcal{E}_1,G}(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathcal{E}_1$.

5. *Si* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *est une application affine avec* $f \circ f = id_{\mathcal{E}}$*, alors* f *est une symétrie.*

Démonstration. (TD). ■