

Chapitre II : I. Résidus d'une fct analytique en 1 pt. S.I.

II. principe de l'annulation et th. Rouché

I. le résidu dans 1 pt fini

Soit $f(z)$ une fct analytique dans la couronne $K: 0 < |z-a| < \rho$ où a est 1 pt fini de $\mathbb{C}$. Au pt a , la fct $f(z)$ peut être analytique ou bien a est 1 pt singulier isolé de $f(z)$.

dans K , on a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$

Définition 1 on appelle C_{-1} le résidu de $f(z)$ au pt $z_0 = a$ et on le note $\text{Res}_{z=a} f(z)$, i.e. $\text{Res}_{z=a} f(z) = C_{-1}$ (où $\gamma \subset K$)

Rq 1) d'après le th. de Laurent, on a

$$\text{Res}_{z=a} f(z) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

$$\text{car } C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{k+1}} \quad (-\infty < k < +\infty)$$

$$\text{où } \gamma: |z-a| = \rho \quad (0 < \rho < \rho_0)$$

$$\text{d'où } \boxed{\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=a} f(z)}$$

on note que: si $z=a$ est 1 pt. régulière (analytique) de $f(z)$, alors $\oint f(z) dz = 0$ (th. de Cauchy). par conséquent $\text{Res}_{z=a} f(z) = 0$

Exemple 1 trouver $\text{Res}_{z=0} e^{1/z}$. Déterminer $\int_{|z|=1} e^{1/z} dz$
 Réponse: on a $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$ d'où $C_{-1} = +1$ par conséquent $\text{Res}_{z=0} (e^{1/z}) = +1$

et $\int_{|z|=1} e^{1/z} dz = 2\pi i$ d'où $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^6} dz$

Exemple 2: Soit $f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$, trouver $\text{Res}_{z=0} (f(z))$

Réponse: on a $f(z) = \frac{1}{z^6} (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots)$ $\Rightarrow C_{-2} = \frac{1}{5!} = \text{Res}_{z=0} f(z)$
 d'où $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^6} dz = \frac{2\pi i}{5!}$

Exemple 3: $f(z) = z \cos \frac{1}{z+1}$, trouver $\text{Res}_{z=-1} f(z)$

Réponse: on $f(z) = ((z+1)-1) \cos \frac{1}{z+1} = [(z+1)-1] [1 - \frac{1}{2(z+1)^2} + \dots]$ d'où $C_{-1} = -\frac{1}{2} = \text{Res}_{z=-1} f(z)$

2 le résidu dans le cas des pôles:

I) Cas d'un pôle simple: si $z=a$ est 1 pôle simple de $f(z)$, alors on a $f(z) = C_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$
 d'où $C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$ ou bien

$$\text{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$$

Exemple: Soit $f(z) = \psi(z)/\varphi(z)$ où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont analytiques au pt $z=a$. Montre que si $\varphi(a) \neq 0$, $\varphi(a)=0$ et $\varphi'(a) \neq 0$, alors a est 1 pôle simple.
 et on a $\text{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \frac{\psi(a)}{\varphi'(a)}$

Réponse: Il est clair que $z=a$ est 1 pôle d'ordre 1

$$\text{Res}_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

II) Cas d'un pôle (multiple) d'ordre m :

on a dans ce cas $f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{(z-a)} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$
 d'où, on a : $(z-a)^m f(z) = C_{-m} + \dots + C_{-1}(z-a)^{m-1} + C_0(z-a)^m + \dots$ (2)

Si on dérive l'égalité (2), $(m-1)$ fois, ensuite on passe à la limite qd $z \rightarrow a$, on obtient

$$(m-1)! C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$$

d'où $\text{Res}_{z=a} f(z) = C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$ (3)

Exercice : Montrer que si $f(z) = h(z)/(z-a)^m$ ou $h(z)$ est analytique au pt $z=a$ et $h(a) \neq 0$, alors on a

$$\text{Res}_{z=a} f(z) = \text{Res}_{z=a} h(z)/(z-a)^m = \frac{1}{(m-1)!} h(a)$$

Réponse : (application directe de (3))

Exemple : soit $f(z) = z/(z-1)(z-2)^2$

trouver $\text{Res}_{z=1} f(z)$, et $\text{Res}_{z=2} f(z)$.

Réponse 1) $z=1$ est un pôle simple d'où

$$\text{Res}_{z=1} f(z) = \left[\frac{z}{(z-2)^2} \right]_{z=1} = 1$$

$$\text{Res}_{z=2} f(z) = \left(\frac{z}{z-1} \right)' \Big|_{z=2} = -1$$

Exemple $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$

$$a_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

trouver $\text{Res}_{z=a_k} f(z)$

Réponse : $a_k = k\pi$ est un pôle simple de $f(z)$ (car c'est zéro simple de $1/f(z)$). on appelle $g = f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

Voilà de $\sin z$ et $\cos z$

on trouve $\text{Res}_{z=k\pi} f(z) = 1$.

II) 1) le Residu logarithmique,

2) le principe de l'argument et

3) et théorème de Rouché

1. ~~principe de l'argument~~ 1. le residu logarithmique

théorème : soit $f(z)$ une fct. anal. dans le domaine G à l'exception (peut être) de pôles et soit D un sous-ensemble borné et contenu dans tel que $D \cup \partial D \subset G$ ou Γ ∂D est la frontière de D .

Si $f(z)$ ne possède ni zéros, ni pôles sur Γ , alors on a

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

où N est le nombre de zéros de $f(z)$ dans D en tenant

compte de la multiplicité de chaque zéro (si z_0 est un zéro multiple d'ordre k , on le compte k fois

P est le nombre de pôles de $f(z)$ dans D en tenant compte de l'ordre de chaque pôle

preuve : on note que le nombre de ~~pôles~~ de $f(z)$ dans D est fini, sinon (si on suppose que le nombre de ~~zéros~~ ^{pôles} est infini dans D) $f(z)$ aurait un point singulier non isolé ($\neq$ pôle) dans G . Contradiction

d'où $f(z) \neq 0$

ii) $f(z)$ possède un nombre fini de zéros dans D ,

sinon $f(z) \equiv 0$ ^{th. unique} Contradiction

iii) les seuls points singuliers de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ sont les zéros ^{et} les pôles de $f(z)$, par conséquent d'après le th. des résidus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{N_0} \operatorname{Res}_{a_k} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right]$$

IV) si $z=a$ est zero de $f(z)$ d'ordre n , alors on a

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \quad \dots (1)$$

où $g(z)$ est analytique au pt $a = z_0$ et $g(a) \neq 0$.
il est clair que $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$

Comme $\frac{g'(z)}{g(z)}$ est analyt. au pt $z_0 = a$ et (car $g'(z)$ et $g(z)$ sont analyt. et $g(a) \neq 0$)

$$\text{On a } \text{Res}_{z=a} F(z) = n \quad \dots (2)$$

V) si $z=b$ est 1 pôle d'ordre p , alors

$$f(z) = (z-b)^{-p} h(z) \quad \dots (3)$$

où $h(z)$ est anal. au pt $z=b$ et $h(b) \neq 0$

$$\left(\text{car } f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-b)^p} + \frac{c_{-p+1}}{(z-b)^{p-1}} + \dots = (z-b)^{-p} \left[c_{-p} + c_{-p+1}(z-b) + \dots \right] \right)$$

$c_{-p} = h(b) \neq 0$

de (3), on a $f'(z) = \dots$

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

Comme $\frac{h'(z)}{h(z)}$ est analyt. au pt $z=b$, alors

$$\text{on a } \text{Res}_{z=b} F(z) = -p$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

Exemple: si f possède les zéros: i) les zéros:

a_1 d'ordre 2, a_2 d'ordre 1, a_3 d'ordre 4

$$\sum_{k=1}^3 \text{Res}_{a_k} f(z) = 2 + 1 + 4 = 7 = N$$

ii) et les pôles b_1 d'ordre 2, b_2 d'ordre 5

$$\text{alors } \sum_{k=1}^2 \text{Res}_{b_k} f(z) = 2 + 5 = 7 = P$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P = 7 - 7 = 0$$