

CHV Systèmes a plusieurs degrés de liberté.

Soit un portique a trois(3) niveaux. En tenant compte des conditions suivantes, le nombre de degrés de libertés peut être réduit à 3ddl.

- la masse totale est concentrée au niveau des étages.
- Les poutres sont infiniment rigides par rapport aux poteaux.
- la déformation de la structure est indépendante des forces axiales dans les poteaux :

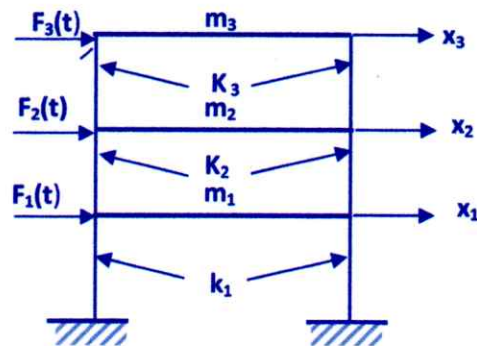


Fig. 5.1

5.1 Formulation de la matrice de rigidité :

Le portique peut être représenté par un système masse-ressort.

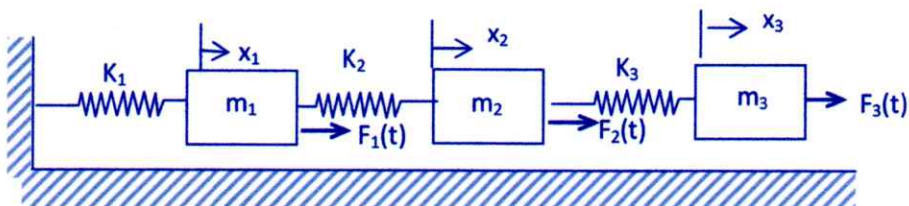


Fig.5.2 modèle masse-ressort

Le diagramme du corps libre, qui montre les forces agissant sur chaque masse .

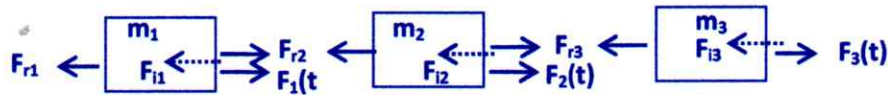


Fig. 5.3

- Forces d'inerties : $F_{i1}=m_1 \ddot{x}_1$ $F_{i2}=m_2 \ddot{x}_2$ $F_{i3}=m_3 \ddot{x}_3$
- Forces élastiques : $F_{r1}=k_1 x_1$ $F_{r2}=k_2 (x_2-x_1)$ $F_{r3}=k_3 (x_3-x_2)$

En utilisant le principe de D'Alembert, les équations de mouvement sont :

$$\Sigma F/x=0$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) - F_1(t) = 0 \quad (1a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) - k_3 (x_3 - x_2) - F_2(t) = 0 \quad (1b)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) - F_3(t) = 0 \quad (1c)$$

En réarrangeant, on obtient les équations suivantes:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \quad (2a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 = F_2(t) \quad (2b)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = F_3(t) \quad (2c)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow [M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (4)$$

avec, $[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$ matrice de masse.

$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$ matrice de rigidité.

$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}$, $\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$, $\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix}$ Vecteurs d'accélérations, de déplacements et de forces.

- Pour un système a n degrés de libertés (nddl) :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \text{ ou bien } M\ddot{x} + kx = F(t)$$

En Introduisant l'amortissement pour un système amorti:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (5a)$$

$$\text{ou simplement, } M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \quad (5b)$$

$$\text{avec, } [M] = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \text{ matrice de masse.}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \text{ matrice de rigidité.}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \text{ matrice d'amortissement.}$$

En général, k_{ij} est une force appliquée en i quand un déplacement unitaire est donné à j , en gardant les autres ddl fixes.

$$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

Vecteurs d'accélérations, de vitesses, de déplacements et de forces.

5.2 Matrice de Flexibilité

Une méthode alternative pour développer les équations de mouvement est la formulation de la matrice des déplacements ou la matrice de flexibilité.

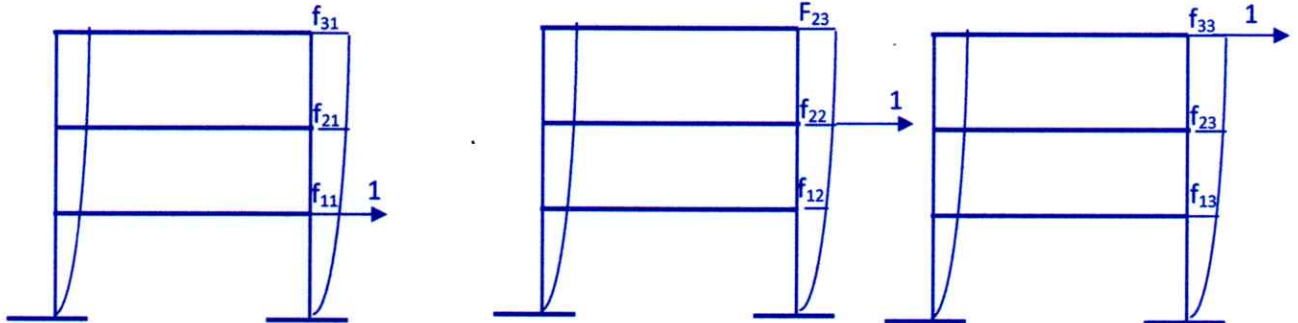


Fig.5.4

La matrice de flexibilité est : $[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$

Le coefficient f_{ij} est le déplacement en i , dû à une force unitaire appliquée en j .

Le déplacement à chaque niveau sous les forces $F_1(t), F_2(t)$ et $F_3(t)$.

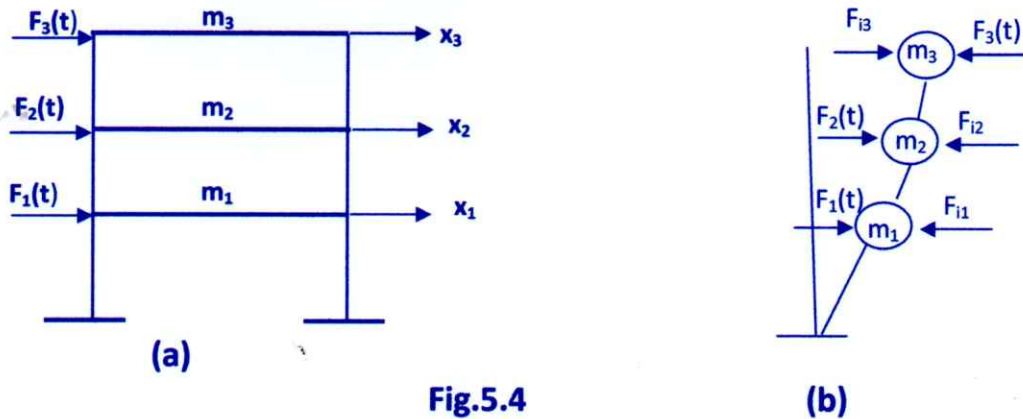


Fig.5.4

$$x_1 = (F_1(t) - F_{i1})f_{11} + (F_2(t) - F_{i2})f_{12} + (F_3(t) - F_{i3})f_{13} \quad (6a)$$

$$x_2 = (F_1(t) - F_{i1})f_{21} + (F_2(t) - F_{i2})f_{22} + (F_3(t) - F_{i3})f_{23} \quad (6b)$$

$$x_3 = (F_1(t) - F_{i1})f_{31} + (F_2(t) - F_{i2})f_{32} + (F_3(t) - F_{i3})f_{33} \quad (6c)$$

- Sous Forme matricielle ;

$$\{x\} = [f]\{F\} - [f]\{F_i\} \Leftrightarrow \{x\} = [f]\{F\} - [f][M]\{\ddot{x}\} \quad (7)$$

avec, $\{f\} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$ matrice de flexibilité ou de déplacement

N.B Les matrices de rigidité et de flexibilité sont des matrices inverses.

$$[f] = [k]^{-1}$$

Exemple : matrice de flexibilité du portique à 3 Niveaux de la figure 5.1

Pour une force unitaire appliquée au 1^{er} Niveau.

On a : $k_1 f_{11} = 1$

$$f_{11} = f_{21} = f_{31} = 1/k_1$$

Force unitaire appliquée au 2^{ème} Niveau.

$$f_{12} = 1/k_1 \quad f_{22} = f_{32} = 1/k_1 + 1/k_2$$

Force unitaire appliquée au 3^{ème} Niveau.

$$f_{13} = 1/k_1 \quad f_{23} = 1/k_1 + 1/k_2 \quad f_{33} = 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3$$

La matrice de flexibilité est donc ;

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 1/k_1 & 1/k_1 & 1/k_1 \\ 1/k_1 & 1/k_1 + 1/k_2 & 1/k_1 + 1/k_2 \\ 1/k_1 & 1/k_1 + 1/k_2 & 1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3 \end{bmatrix}$$

5.3 Valeurs et Modes propres de vibrations.

Les valeurs et modes propres de vibrations s'obtiennent à partir d'un système libre non-amorti.

L'équation de mouvement s'écrit ;

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

Sol. de l'équation ; $x_i = a_i (\sin \omega t + \alpha)$ avec ; $i=1,2,\dots,n$

a_i Amplitude de mouvement du $i^{\text{ème}}$ degré de liberté.
 $\{x\} = \{a\} \sin(\omega t + \alpha)$ (8)

En substituant dans l'équation de mouvement.

$$\begin{aligned} & [K] - \omega^2 [M] \{a\} = \{0\} \\ \{a\} \neq \{0\} & \rightarrow \Delta = |[K] - \omega^2 [M]| = 0 \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degrés n. sa solution sont les pulsations ou valeurs propres ; $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$
 pour chaque pulsation propre (ω_i), correspond un mode (vecteur) propre $\{a\}_i$.

$$[K] - \omega_i^2 [M] \{a\}_i = \{0\} \quad (9)$$

Par analogie avec la matrice de flexibilité.

$$\{x\} + [f][M]\{\ddot{x}\} = \{0\} \quad (10)$$

Sol. de l'équation $\{x\} = \{a\} \sin(\omega t + \alpha)$

par substitution dans (10) on obtient;

$$\{a\} - 1/\omega^2 [f][M]\{a\} = \{0\} \Leftrightarrow [[D] - \lambda_i [I]]\{a\} = 0 \quad (11)$$

avec, $[D] = [f][M]$ matrice dynamique et $\lambda_i = 1/\omega_i^2$

$$\det(\lambda) = |[D] - \lambda_i [I]| = 0$$

C'est l'équation caractéristique du système. C'est un polynôme de degré n, en λ .

à chaque λ_i correspond un mode propre a_i .

5.4 Propriétés d'orthogonalité des modes propres.

$$[K]\{a_i\} = \omega_i^2 [M]\{a_i\} \quad (11)$$

Multiplions par ; $\{a_j\}^T \Rightarrow \{a_j\}^T [K]\{a_i\} = \omega_i^2 \{a_j\}^T [M]\{a_i\}$ (a)

de même $[K]\{a_j\} = \omega_j^2 [M]\{a_j\} \Leftrightarrow \{a_i\}^T [K]\{a_j\} = \omega_j^2 \{a_i\}^T [M]\{a_j\}$

Transposé des 2 côtés ; $\{a_j\}^T [K]\{a_i\} = \omega_j^2 \{a_j\}^T [M]\{a_i\}$ (b)

$$(a)-(b) \Rightarrow (\omega_i^2 - \omega_j^2) (\{a_j\}^T [M]\{a_i\}) = 0$$

$$\text{Pour } i \neq j, \omega_i \neq \omega_j \Rightarrow \{a_j\}^T [M]\{a_i\} = 0 \quad (12)$$

de même $\{a_j\}^T [M] \{a_i\} = 0$

Les modes propres sont orthogonaux aux matrices de masse et de rigidités ;

$$\omega_i^2 = \frac{\{a_i\}^T [k] \{a_i\}}{\{a_j\}^T [M] \{a_j\}} \quad (12)$$

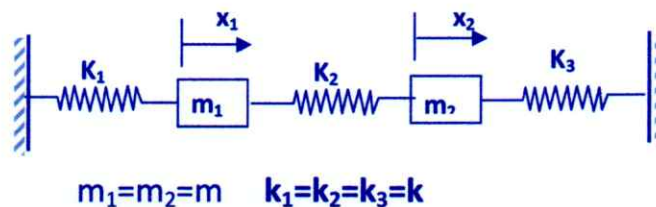
N.B Les modes propres peuvent être normalisés :

$$\phi_i = \frac{1}{\sqrt{a_i M a_i}}$$

ϕ_i : mode i normalisé.

$$\phi_i M \phi_i = 1$$

Exemple 5.2 Déterminer les valeurs et les vecteurs propres du système suivant.



$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad k_{11} = k_1 + k_2 \quad k_{12} = k_{21} = -k_2 \quad k_{22} = k_2 + k_3$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

1. Pulsations naturelles, (valeurs propres)

$$\det(\omega) = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(\omega) = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2^2 = 3k/m, \quad \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

2. Modes propres:

- pour $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{bmatrix} 2k - \frac{k}{m}m & -k \\ -k & 2k - \frac{k}{m}m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} ka_{11} - ka_{21} = 0 & (1a) \\ -ka_{11} + ka_{21} = 0 & (2a) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow a_{11} = a_{21}$$

on pose $a_{11} = 1 \Rightarrow a_{21} = 1$

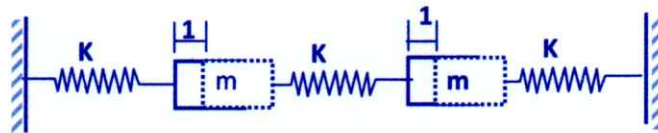
Le mode 1 est ; $a_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ C'est le mode fondamental.

- Pour, $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$

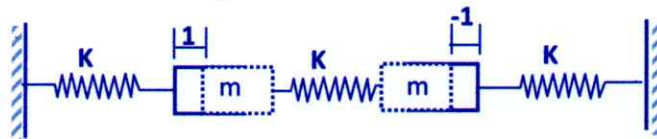
$$\begin{bmatrix} 2k - \frac{3k}{m}m & -k \\ -k & 2k - \frac{3k}{m}m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} -ka_{12} - ka_{22} = 0 & (1b) \\ -ka_{12} - ka_{22} = 0 & (2b) \end{cases}$$

$$(1b) \Rightarrow a_{12} = -a_{22}$$

On pose $a_{12} = 1 \Rightarrow a_{22} = -1$. Le 2^{ème} mode est : $a_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$



mode 1.



mode 2.

2) Vérification des propriétés d'orthogonalité

$$a_1^T M a_2 = \{1 \ 1\} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = m - m = 0 \quad (c.v)$$

$$\omega_1^2 = \frac{a_1^T k a_1}{a_1^T M a_1} = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{2k}{2m} = \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{a_2^T K a_2}{a_2^T M a_2} = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} = \frac{6k}{2m} = \frac{3k}{m}$$

Mr Driss Chaker Dpt. Génie Civil et hydraulique

Niveau : M₁ Structures

Module : DDS2

5.5 Méthode de Superposition modale.

La méthode de superposition modale est une méthode qui permet de déterminer la réponse du système $u(t)$, par l'utilisation des fréquences naturelles et des modes propres du système, et de leurs propriétés d'orthogonalités. La technique utilisée pour résoudre le système d'équations à N inconnues est de procéder à un changement de coordonnées afin de découpler les équations de mouvement et obtenir des équations à 1ddl.

$$\{x\} = [a]\{z\} \quad \text{ou} \quad x = a z = \sum_{i=1}^n a_i z_i$$

avec, x : vecteur de coordonnées physiques ou réelles

Z : coordonnées modales ou normales.

$$a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \quad \text{matrice modale}$$

5.5.1 Systèmes non-amortis :

a partir des pulsations propres ω^2 , et modes propres, pour $i = 1, 2, \dots, N$, les masses modales, M_r et les rigidités modales, K_r ,

sont déterminées.

$$M_i = a_i^T M a_i$$

$$K_i = a_i^T K a_i = \omega^2 M_i$$

$$a_i^T M a_j = a_i^T K a_j = 0 \quad i \neq j$$

Les équations transformées en 1ddl, seront donc :

$$M_1 \ddot{z}_1 + K_1 \dot{z}_1 = a_1^T F(t) = p_1(t)$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + K_2 \dot{z}_2 = a_2^T F(t) = p_2(t)$$

⋮

$$M_r \ddot{z}_r + K_{rr} \dot{z}_r = a_r^T F(t) = p_r(t)$$

⋮

$$M_n \ddot{z}_n + K_n \dot{z}_n = a_n^T F(t) = p_n(t)$$

avec,

$$p_r(t) = a_r^T F(t) \quad \text{force modale de la } r^{\text{ième}} \text{ équation}$$

Ce sont des équations à 1ddl (inconnue) et peuvent donc être résolues par une méthode adéquate des systèmes à 1ddl.

$$\text{Sous forme matricielle : } M_z \ddot{Z} + K_z \dot{Z} = a^T F(t) = p(t)$$

M_z : matrice de masse modale

K_z : matrice de rigidité modale

5.5.2 Systèmes amortis

$$M_z \ddot{z} + C_z \dot{z} + K_z z = a^T F(t) = p(t)$$

C_z : matrice d'amortissement modale

5.5.2.1 Modèle d'amortissement de Rayleigh- Ritz :

La matrice d'amortissement est donnée en fonction de la matrice de masse et celle de rigidité

$$C = \alpha M + \beta K$$

α et β Constantes qui peuvent être déterminées, en connaissant 2 valeurs du coefficient d'amortissement ξ , (ξ_i, ξ_j).

$$C_r = a_r^T C a_r = 2\xi_r \omega_r M_r \quad \text{amortissement modale}$$

5.5.2.2 Réponse du système en coordonnées physiques :

$$x = a z = \sum_{i=1}^n a_i z_i$$

5.3.2.3 Forces dynamiques développées dans le système :

$$f = K x = K a z = K a_1 z_1 + K a_2 z_2 + \dots + K a_n z_n$$

Exemple 5.1 système soumis à une excitation harmonique

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t).$$

Pour la $r^{\text{ième}}$ équation :

$$M_r \ddot{z}_r + C_r \dot{z}_r + K_r z_r = a_r^T F(t) = p_r(t)$$

1. La réponse en régime permanent (réponse principale) en coordonnées

modales .

$$z_r = \frac{p_r(t)}{k_r} \frac{1}{\sqrt{(1-r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2}} \sin(\omega t + \alpha_r)$$

avec, $r_r = \frac{\omega}{\omega_r}$ $\tan \alpha_r = \frac{2 \xi_r r_r}{1-r_r^2}$

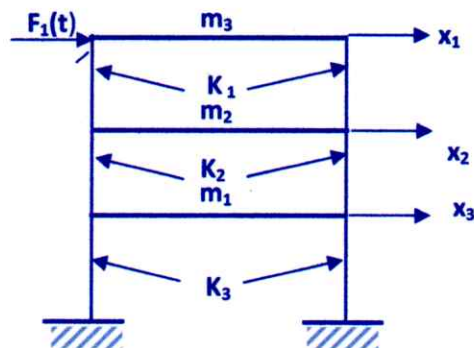
2 Réponse en coordonnées réelles.

$$x = a z = \sum_{r=1}^n a_r z_r =$$

$$x = \sum_{r=1}^n a_r \frac{P_{0r}(t)}{k_r} \frac{1}{\sqrt{(1-r_r^2)^2 + (2\xi_r r_r)^2}} \sin(\omega t + \alpha_r)$$

Exercice

Déterminer la réponse en termes de déplacements du portique ci-après soumis à une force concentrée exercée à son sommet.



Données :

$$F_1(t) = 445 \text{ KN}$$

$$m_1 = 175 \text{ t} \quad m_2 = 263 \text{ t} \quad m_3 = 350 \text{ t}$$

$$k_1 = 105 \text{ KN/m} \quad k_2 = 210 \text{ KN/m} \quad k_3 = 315 \text{ KN/m}$$

$$\omega_1 = 14,5 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 31,1 \text{ rad/s} \quad \omega_3 = 46,1 \text{ rad/s}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \text{ matrice de rigidité}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 0,644 & -0,601 & -2,570 \\ 0,300 & -0,676 & 2,470 \end{bmatrix} \text{ matrice modale}$$