Table des matières

1 Fonctions de plusieurs variables **3**

1.1 Topologies de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$ 3

1.2 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables 4

1.2.1 Domaine de définition 5

1.3 Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ 5

1.4 Limite d'une fonction $\mathbb{R}^n$ de dans $\mathbb{R}^m$ 7

1.5 Continuité uniforme 8

2 Calcul différentiel **10**

2.1 Dérivée suivant un vecteur (dérivation directionnelle) 12

2.2 Les dérivées partielles 13

2.2.1 Les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ 15

2.2.2 Les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ 15

2.2.3 Différentiabilité des fonctions composées 17

2.2.4 Opérateurs différentiels classiques 17

2.2.5 Théorèmes généraux du calcul différentiel 18

2.2.6 Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 21

2.3 Formules de Taylor 22

2.4 Extrema 24

2.4.1 Extrema liés (Extrema sous contraintes) 29

2.5 Difféomorphismes 30

2.5.1 Les fonctions implicites 31

2.6 Exercices 34

2.7 Correction 37

3 Intégrales multiples **45**

3.1 Intégrales doubles en coordonnées rectangulaires : 45

3.1.1 Calcul direct des intégrales doubles 45

3.1.2 Propriétés des intégrales doubles 47

3.1.3 Interpretation géométrique d'une intégrale double 48

3.2 Changement de variables dans une intégrale double 48

3.2.1 Coordonnées polaires 48

3.3 Intégrales triples 50

3.3.1 Intégrales triples en coordonnées rectangulaires : 50

3.3.2 Application du théorème précédente au changement de variables en coordonnées cylindriques 51

3.3.3 Application du théorème précédente au changement de variables en coordonnées sphériques 52

3.4 Exercices 53

3.5 Correction 54

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

1.1 Topologies de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :*

1. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
3. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

E muni de la norme N est appellé espace vectoriel normé, noté plus souvent $(E, \|.\|)$, avec $\|.\| = N(.)$.

Exemple 1.1.2

1. *L'application* $f : \underset{x \mapsto f(x)=|x|}{\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+}$ *est une norme sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'application* $g : \underset{x \mapsto g(x)=|x|}{\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+}$ *est une norme sur $\mathbb{C}$.*

Définition 1.1.3 *(Les normes euclidienne sur $\mathbb{R}^n$)*

Si $x \in \mathbb{R}^n$ i.e. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, alors on a

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;
2. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$;
3. $\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Définition 1.1.4 *On dit que les normes* $\|x\|_1$ *et* $\|x\|_2$ *sont équivalentes s'il existe deux constantes strictement positifs* α, β *telles que*

$$\forall x \in E, \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 .$$

Théorème 1.1.5 *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 1.1.6 *(Les applications linéaires continues)*

Soient E, F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$. *On dit que l'application* L *de* E *dans* F *est linéaire s'il s'atisfait :*

1. $\forall (x, y) \in E^2, L(x + y) = L(x) + L(y)$,
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, L(\lambda x) = \lambda L(x)$.

ou bien

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) .$$

Théorème 1.1.7 *Soient* E, F *deux espaces vectoriels normés,* L *est une application linéaire de* E *dans* F. *Les relations suivantes sont équivalentes.*

1. L *est continue sur* E,
2. L *est continue en point* 0,
3. L *est borné sur la boule unité de* E.

1.2 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

Définition 1.2.1 *Une application de* $\mathbb{R}^n$, *ou d'une partie de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *est appelée fonction numérique de* n *variables réelles.*

Exemple 1.2.2 *Les fonctions* f, g *définies par* $f : \underset{(x,y)\mapsto f(x,y)=x+y}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ $, g : \underset{(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=\frac{xzy}{x^2+y^2+z^2}}{\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}}$.

sont des fonctions réelles à plusieurs variables.

Définition 1.2.3 *Pour tout* $i = \overline{1, n}$, *l'application notée* P_i *définie par* $P_i : \underset{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto P_i(x)=x_i}{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$ *s'appelle le* $i^{\text{ème}}$ *projection canonique de* $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.4 *Soient E une partie de $\mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$ une application de E dans $\mathbb{R}^m$, $P_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\left(i = \overline{1,m}\right)$ les projections canoniques de $\mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}$.*

Les fonctions $f_i : E \to \mathbb{R}$ définies pour tout $i = \overline{1,m}$ par $f_i = P_i \circ f$ sont appellées les composantes de l'application f.

Remarque 1.2.5 *On note généralement, pour une fonction $f : \underset{x \mapsto f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))}{E \to \mathbb{R}^m}$.*

Exemple 1.2.6 *Soit la fonction $f : \underset{(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(x\sin yz, xyz)}{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}$.*

1.2.1 Domaine de définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$ une application de E dans $\mathbb{R}^m$. Alors

- E est appelé le domaine de définition de f.
- L'ensemble $f(E) = \{y \in \mathbb{R}^m, \exists x \in E, y = f(x)\}$ est appelé l'image de E par f.

Exemple 1.2.7 *1. Soit f l'application à deux variables réelles x, y définie par $f(x,y) = x + \ln y$.*

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \text{ définie}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, y > 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = \left(\frac{xy}{z}, \sin xyz\right)$.

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) \text{ définie}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\right\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

1.3 Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.3.1 *Soit f une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage d'un point a, sauf peut être en a, et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f admet l pour limite au point a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que $0 < \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ on ait*

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

et on écrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Théorème 1.3.2 *(Opérations algébriques sur les limites)*

Soient f,g deux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l, \lim\limits_{x\to a} g(x) = l^{'}$. Alors

1. *Pour deux nombres réels $\alpha, \beta, \alpha f(x) + g(x)\beta$ admet $\alpha l + l^{'}\beta$ pour limite au voisinage de a.*
2. *La fonction fg admet une limite au voisinage de a et on a*
$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = ll^{'}.$$
3. *Si $l^{'} \neq 0$: la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite au voisinage de a et on a*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l^{'}}.$$

Exemple 1.3.3 *1. Soit*
$$\underset{(x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{2x+y}{x^2+y^2}}{f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}.}$$

Calcul de
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2x+y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x+y}{x^2+y^2}\right) = 2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 1} \frac{2x+y}{x^2+y^2}\right).$$

Pour voir si f admet une limite au voisinage de $a = (0,0)$ $\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}\right)$ qui est une cas indéterminer on remarque par exemple sur la droite $y = x$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{2x+x}{x^2+x^2} = \infty.$$

Donc f n'admet pas une limite au point $(0,0)$.

2. *Soit la fonction*
$$\underset{(x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}}{g : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}.}$$

Calcul de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$: on choisit par exemple les droites $y = x, y = 2x$ on obtient

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \;=\; \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \;=\; \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=2x}} \dfrac{2x^2}{5x^2} = \dfrac{2}{5}.$

$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$ donc g n'admet pas une limite au point $(0,0)$.

Théorème 1.3.4 *Soient f,g,h des fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l.$
2. $\exists \delta > 0$ *telle que* $0 < \|x-a\| < \delta : g(x) \le f(x) \le h(x)$. *Alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Exemple 1.3.5 *Soit à calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2xy\ln(x^2+y^2)$.

$$(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2 \ge 2xy \Rightarrow 0 \le |2xy|\ln(x^2+y^2) \le (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2),$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2xy\ln(x^2+y^2) = 0.$$

Théorème 1.3.6 *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f une application définie au voisinage d'un point (a,b) à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ existe pour y voisin de b et $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ existe pour x voisin de a alors*

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = l.$$

Remarque 1.3.7 *Si $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right) = 0$ n'implique pas que f admet une limite au point a.*

1.4 Limite d'une fonction $\mathbb{R}^n$ de dans $\mathbb{R}^m$

Définition 1.4.1 *Soit f une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, définie au voisinage d'un point a, sauf peut être en a, et soit $l = (l_1, l_2, \cdots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. On dit que la fonction $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ admet l pour limite au point a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que $0 < \|x-a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ on ait*

$$\|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon,$$

et on écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Théorème 1.4.2 *Soit $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, définie au voisinage d'un point a, sauf peut être en a, et soit $l = (l_1, l_2, \cdots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
2. *Pour tout* $j = \overline{1, m}$: $\lim\limits_{x \to a} (f_j(x)) = l_j$.

Exemple 1.4.3 *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y)$ *telle que*

$$f : \underset{(x,y)\mapsto f(x,y)=\left(\frac{x}{y^2+1}, \sin(x-y)\pi, \frac{e^{xy}-1}{y}\right)}{\mathbb{R}^2 - \triangle \to \mathbb{R}^3},$$

où

$$\triangle = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \left(\frac{x}{y^2+1}, \sin(x-y)\pi, \frac{e^{xy}-1}{y}\right) =$$

$$\left(\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x}{y^2+1}, \lim_{(x,y)\to(2,0)} \sin(x-y)\pi, \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{e^{xy}-1}{y}\right) = (2,0,2).$$

1.5 Continuité uniforme

Définition 1.5.1 *Une application continue d'une partie de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *est dite uniformément continue sur* E *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *telle que* $0 < \|x-y\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ *on ait*

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon,$$

Remarque 1.5.2 *Dans la définition de la continuité uniforme le nombre* δ *ne dépent que de* ε *(et de* f*).*

Exemple 1.5.3 *L'application norme* $f : \underset{x\mapsto f(x)=\|x\|}{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$ *est uniformément continue car grâce à l'inégalité triangulaire, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

Donc il suffit de prendre dans la définition précédente $\delta = \varepsilon$*.*

Exercice 1.5.4 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|xy|+(x+y)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Etudier l'existence de* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. *Vérifier que* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$.

   Solution

1. *On a* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{0}{0}$ *(cas indéterminer), donc on choisit par exemple les droites* $y = x, y = -x$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5}. \\ \bullet \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}} -\frac{x^2}{x^2} = -1. \end{aligned}$$

$-1 \neq \frac{2}{5}$ *donc* f *n'admet pas une limite au point* $(0,0)$.

2. *Il est facile de voir que*

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0, \lim_{x\to 0} f(x,y) = 0 \Rightarrow \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0.$$

On conclut d'après (1) *et* (2) *que l'égalité ne garantie pas l'existence de* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Chapitre 2

Calcul différentiel

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. f différentiable au point a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ où } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

On définit la fonction ζ au voisinage de 0 comme suit :

$$\zeta(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \Rightarrow h\zeta(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a).$$

$$\lim_{h \to 0} h\zeta(h) = 0 \Leftrightarrow f(a+h) - f(a) - hf'(a) = \circ(|h|).$$

Donc on peut définir une application linéaire sous forme :

$$L : h \mapsto hf'(a),$$

et comme ça on peut généraliser la dévirentiabilité sur les espaces vectoriels normés, il suffit de remplacer $|h|$ par $\|h\|$.

Définition 2.0.5 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert non vide de E, a un poit de U et f une fonction de U dans F. On dit que l'application f est différentiable au point a de U s'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que on ait*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_E} (f(a+h) - f(a) - L(h)) = 0. \tag{1}$$

i.e.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_E} \Big(f(a+h) - f(a) - hf'(a) \Big) = 0.$$

Théorème 2.0.6 *(L'unicité)*

Sous les conditions précédentes (Définition 2.0.5) il existe une seule application linéaire $L : E \to F$ *vérifie la relation* (1).

Définition 2.0.7 *Si f est différentiable au point* a*, alors le seul application linéaire* L *vérifie la relation* (1) *appelé la différntielle de* f *au point* a*. et on note* $f'(a)$ *ou* $Df(a)$.

Remarque 2.0.8 $f'(a)$ *n'est pas un élément de* F *mais de* $\mathcal{L}(E, F)$. *On note* $f'(a)h$ *l'image d'un élément* h *de* E*.*

Exemple 2.0.9 *Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *défini par* $f(x, y) = xy$.

Démontrer que f *est différentiable en tout point* (x_0, y_0) *de* $\mathbb{R}^2$ *et sa différentielle est l'application* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$L(u, v) = x_0 v + u y_0.$$

Solution

1. *Montrons que* L *est linéaire :*

   Soient $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* α, β *deux éléments de* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} L(\alpha(u_1, v_1) + \beta(u_2, v_2)) &= x_0(\alpha v_1 + \beta v_2) + y_0(\alpha u_1 + \beta u_2) \\ &= \alpha(x_0 v_1 + y_0 u_1) + \beta(x_0 v_2 + y_0 u_2) \\ &= \alpha L(u_1, v_1) + \beta L(u_2, v_2). \end{aligned}$$

2. *Continuité de* f *: il suffit de montrer que*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |L(u, v)| \leq k \|(u, v)\|_{\mathbb{R}^2}.$$

$$|L(u, v)| = |x_0 v + u y_0| \leq |x_0| |v| + |y_0| |u| \leq k \|(u, v)\|_{\mathbb{R}^2},$$

   où $k = \max(|x_0|, |y_0|)$, *d'où la continuité de* L*.*

3. *Montrons que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_{\mathbb{R}^2}} (f(a + h) - f(a) - L(h)) = 0.$$

Posons $h = (u, v)\,, a = (x_0, y_0)\,.$

$$\begin{aligned}
& \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{1}{\|(u,v)\|_{\mathbb{R}^2}} \left(f\left(x_0+u, y_0+v\right) - f\left(x_0, y_0\right) - L\left(u, v\right)\right) \\
= & \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{1}{\|(u,v)\|_{\mathbb{R}^2}} \left(\left(x_0+u\right)\left(y_0+v\right) - x_0 y_0 - x_0 v + u y_0\right) \\
= & \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{1}{|v|+|u|} \left(uv\right).
\end{aligned}$$

Grace à l'inégalité $\left(\sqrt{|u|} - \sqrt{|v|}\right)^2 \geq 0,$ *on obtient*

$$\sqrt{|v|\,|u|} \leq \frac{1}{2}\left(|u| + |v|\right),$$

d'où

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{1}{|v|+|u|}\left(uv\right) \leq \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{1}{4}\left(|u|+|v|\right) = 0,$$

donc f *est différentiable en tout point* (x_0, y_0) *de* $\mathbb{R}^2$ *et sa différentielle est l'application* $L = f'\left(x_0, y_0\right).$

2.1 Dérivée suivant un vecteur (dérivation directionnelle)

Soient X un vecteur quelconque de E, f une application de U un voisinage de a de E, f est différentiable au point a i.e il existe $L \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$ vérifie la relation (1).

Calculons la limite suivant le vecteur X :

Posons $h = tX$, donc

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1}{\|tX\|_{\mathbb{R}^2}} \left(f\left(a+tX\right) - f\left(a\right) - L\left(tX\right)\right) = 0.$$

On choisit t pour que $a + tX \in U$; il suffit de prendre $|t| \leq \frac{\delta}{\|X\|_{\mathbb{R}^2}}$ telle que le rayon de la boule ouverte de centre a et inclus dans U (dans les espaces normés les ouvert sont des boules ouvertes). D'où

$$\begin{aligned}
(1) \quad \Leftrightarrow \quad & \lim_{t\to 0} \frac{1}{|t|\,\|X\|_{\mathbb{R}^2}} \left(f\left(a+tX\right) - f\left(a\right) - tL\left(X\right)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{t\to 0} \left(\frac{f\left(a+tX\right) - f\left(a\right)}{|t|} - \frac{t}{|t|} L\left(X\right)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \lim_{t\to 0} \frac{f\left(a+tX\right) - f\left(a\right)}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} L\left(X\right).
\end{aligned}$$

On définit la fonction φ comme suit $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(a + tX)$. Donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{|t|} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}L(X) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \overset{\geq}{\to} 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = L(X), \\ \lim\limits_{t \overset{\leq}{\to} 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{-t} = -L(X). \end{cases}$$

Donc l'application linéaire φ dérivable au point 0 et la dérivée égale $L(X)$ i.e. $L(X) = \varphi^{'}(0)$.

On dit que le vecteur $\varphi^{'}(0) = f^{'}(a)X$ est la dérivé de f au point a suivant le vecteur X, si X est un vecteur unitaire sur E, le vecteur $f^{'}(a)X$ appelé la dérivée directionnelle de f suivant X.

2.2 Les dérivées partielles

Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$. Si l'application f différentiable au point a, alors il admet une dérivée d'ordre i suivant n'importe qu'elle vecteur e_i et il donné par la relation

$$\begin{aligned} f^{'}(a)e_i &= \varphi^{'}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_i + t, \cdots, a_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_n)}{t}. \end{aligned}$$

On peut considère la dérivée de l'application partielle

$$\varphi_i : x_i \mapsto f(a_1, a_2, \cdots, a_i + t, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n),$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i)}{t} = \varphi_i^{'}(a_i) = f^{'}(a).e_i.$$

qui est dérivée partielle de φ_i au point a_i.

Définition 2.2.1 *Soit f une application définie sur un voisinage U d'un point a à valeurs dans un espace vectoriel normé F. On appelle une dérivée partielle de au point a pour la composante i l'application φ_i au point a_i, et on l'a note :$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ ou $D_i f(a)$ ou $f_{x_i}^{'}(a)$.*

Exemple 2.2.2 *Déterminer les dérivées partielles de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x, y) = e^x \sin y.$$

1. *Calcul de* $\frac{\partial f(a)}{\partial x}$ *: On définit l'application* $\varphi_1 : t \mapsto f(a_1+t, a_2) = f(a+te_1)$. *D'où*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(a)}{\partial x} &= \varphi_1^{'}(a_1) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{a_1+t}\sin a_2 - e^{a_1}\sin a_2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{a_1}\sin a_2\left(e^t-1\right)}{t} = e^{a_1}\sin a_2.\end{aligned}$$

2. *Calcul de* $\frac{\partial f(a)}{\partial y}$ *: On définit l'application* $\varphi_2 : t \mapsto f(a_1, a_2+t) = f(a+te_2)$. *D'où*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(a)}{\partial y} &= \varphi_2^{'}(a_2) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2+t)-f(a_1,a_2)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{a_1}\sin(a_2+t) - e^{a_1}\sin a_2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{a_1}\left(\sin(a_2+t)-\sin a_2\right)}{t} = e^{a_1}\sin a_2 \lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t - 1}{t}\right) + \lim_{t\to 0} e^{a_1}\cos a_2 \frac{\sin t}{t} \\ &= e^{a_1}\cos a_2.\end{aligned}$$

Théorème 2.2.3 *Soit f une application définie sur un voisinage U de $\mathbb{R}^n$. Pour que la fonction f soit différentiable au point a il faut et il suffit que toute les dérrivées partielles $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ existe et s'il est différentiable au point a sa diférentielle est l'application linéaire $f^{'}(a)$: $(h_1, h_2, \cdots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.*

Remarque 2.2.4 *L'existence des dérivées partielles est une condition nécessaire et pas suffisante pour la différentiabilité de f.*

Exemple 2.2.5 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

On définit les fonctions $\varphi_1 : x \mapsto f(x,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \varphi_1^{'}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,$$

et $\varphi_2 : y \mapsto f(0,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \varphi_2^{'}(0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

Les dérivées partielles au point $(0,0)$ *existent, on suppose que f est différentiable au point* $(0,0)$ *i.e. pour tout* $h \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} L(h) &= f^{'}(0,0).h = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0), \\ &= h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,,0) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,,0) = 0.\end{aligned}$$

Par définition f est différentiable au point $(0,0)$ si

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|_{\mathbb{R}^2}}\left(f(h_1,h_2)-f(0,0)-0\right)=0?.$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-0-0\right)=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}.$$

On pose $h_1=h_2$ d'où

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^2}{2h_1^2}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Donc f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

2.2.1 Les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 2.2.6 *Soient E,F_1,F_2 des espaces vectoriels normés, f une application définie au voisinage V d'un point a de E, pour que l'application $f:V\to F_1\times F_2$ soit différentiable au point a il faut et il suffit que les composantes f_1,f_2 l'est aussi et sa différentielle au point a est l'application linéaire*

$$f'(a)=\left(f_1'(a),f_2'(a)\right).$$

Généralisation : Par reccurence on peut généraliser ce théorème pour une application f à valeurs dans $F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$.

En particulier on a le théorème

Théorème 2.2.7 *Pour que la fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ soit différentiable au point a il faut et il suffit que toute les composantes soit aussi et la différentielle au point a est l'application linéaire de composantes $f_i'(a), i=\overline{1,n}$.*

2.2.2 Les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

• Soit $f:U\to\mathbb{R}^p$ tal que $U\subset\mathbb{R}^n$ un voisinage de $a.f$ différentiable au point a, alors $f'(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} f'(a) \quad : \quad & \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p \\ x \quad \mapsto \quad & \left(f_1'(a)x, f_2'(a)x,\cdots,f_p'(a)x\right). \end{aligned}$$

• Soient $(e_i)_{i=\overline{1,n}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\left(e_i^{'}\right)_{i=\overline{1,p}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. D'une part

$$f^{'}(a)\,x = \sum_{i=1}^{p} f_i^{'}(a)\,e_i^{'} = \begin{pmatrix} f_1^{'}(a)\,x \\ \vdots \\ f_p^{'}(a)\,x, \end{pmatrix} \qquad (2)$$

et d'autre part

$$f_1^{'}(a)\,x = f_1^{'}(a)\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f_1^{'}(a)\,e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_i}.$$

d'où

$$(2) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$f^{'}(a)\,x = Ax/A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Nous avons trouvé la matrice associer à l'application linéaire $f^{'}(a)$, cette matrice appelé la matrice Jacobienne de f au point a qui est une matrice de p ligne et n colonne, noté par $\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}, i = \overline{1,p}, j = \overline{1,n}$.

Exemple 2.2.8 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

La matrice Jacobienne de f *au point* (r,θ) *de* $\mathbb{R}^2$ *est*

$$Jf(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow |Jf(r,\theta)| = r.$$

Théorème 2.2.9 *Si* f *est une fonction différentiable au point* a, *alors* f *est continue au point* a.

2.2.3 Différentiabilité des fonctions composées

Théorème 2.2.10 *Si f est une fonction différentiable au point a et g différentiable au point $b = f(a)$, alors l'application composée $F = g \circ f$ est différentiable au point a de différentielle*

$$F'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

Corollaire 2.2.11 *Soit f une fonction numérique différentiable au point a. Les fonctions composées :*

$$\begin{aligned} f^n &: x \mapsto f^n(x), \forall n \in \mathbb{N}, \\ e^f &: x \mapsto e^{f(x)}. \end{aligned}$$

sont différentiables au point a, et si $f(x) \neq 0$, alors les fonctions

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &: x \mapsto \frac{1}{f(x)}, \\ \ln|f| &: x \mapsto \ln|f(x)|, \end{aligned}$$

l'est aussi. Ces différentielles données par les relations :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : Df^n = nf^{n-1}Df, De^f = e^f Df, D\frac{1}{f} = \frac{-Df}{f^2}, D\ln|f| = \frac{Df}{f}.$$

2.2.4 Opérateurs différentiels classiques

1. **Gradient :**

   Pour une fonction à valeurs scalaires $f : E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dont les dérivées partielles existent, le gradient et définie par

$$\operatorname{grad}(f) : \underset{x \mapsto \operatorname{grad}(f)(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_p}\right)^t}{E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p}.$$

2. **Divergence :**

   Pour une fonction à valeurs scalaires $f : E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ de composante $f_1, , f_2, \cdots, f_p$ dont les dérivées partielles existent, on définie sa divergence par

$$\operatorname{div}(f) : \underset{x \mapsto \operatorname{div}(f)(x) = tr\left(J(f)_x\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}}{E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}},$$

où $tr\left(J\left(f\right)_x\right)$ est la matrice Jacobienne, on peut écrire parfois

$$\operatorname{div}\left(f\right) = \nabla \cdot f,$$

où le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$ est définie par

$$xy = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i.$$

2.2.5 Théorèmes généraux du calcul différentiel

Théorème 2.2.12 *(Des accroissements finis dans $\mathbb{R}$)*

Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace normé E. Si f est continue sur $[a, b]$ et admet une dérivée partiel à droite en chaque point de $]a, b[$ tel que $\left\|f_d'\left(x\right)\right\| \leq k$. Alors on a

$$\left\|f\left(b\right) - f\left(a\right)\right\|_E \leq k\left|b - a\right|.$$

Théorème 2.2.13 *(Des accroissements finis généralisée, cas d'une fonction de plusieurs variables)*

Soit f une fonction définie et continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, différentiables en chaque point de U d'un espace vect normé F tel que le segment $[x, y]$ est contenu dans U, alors on a

$$\left\|f\left(y\right) - f\left(x\right)\right\|_F \leq k\left\|y - x\right\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Généralisation :

Soit U un ouvert d'un espace normé E. $f : U \to \mathbb{R}$. Si $x \in U$ et le segment $[x, x+h]$ $(h \in E)$ inclus dans U, alors il existe un nombre réel $0 < \theta < 1$ tel que

$$f\left(x+h\right) - f\left(x\right) = f'\left(x + \theta h\right).h.$$

Cas particulier : $E = \mathbb{R}^n$

La relation précédente s'écrite

$$f\left(y\right) - f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x + \theta h\right).$$

Cas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, x \mapsto \left(f_1, f_2, \cdots, f_p\right).$

On peut restreindre l'étude sur les fonctions numériques car

$$f \text{ différentiable} \Leftrightarrow (f_i)_{i=\overline{1,n}} \text{ différentiable.}$$

Théorème 2.2.14 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe au point a et les dérivées partielles sont continues au point a, alors f différentiable au point a.*

Exemple 2.2.15 *On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Démontrer que f différentiable au point $(0,0)$.

Solution :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^2y^3}{x^2+y^2} - \frac{2x^4y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

f est symétrique par apport à x et y donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0. \end{aligned}$$

2. *Continuité de* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *au point* $(0,0)$:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \left|\frac{2x^2y^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{2x^4y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{2|xy^2||xy|}{x^2+y^2} + \frac{2|x^2y^2||xy|}{(x^2+y^2)^2},$$

vu l'inégalité

$$2xy \leq x^2+y^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\leq \frac{3}{2}\frac{2(x^2+y^2)|xy|}{(x^2+y^2)}, 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 0 \\ &\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0). \end{aligned}$$

Par la même méthode on démontre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

donc f est différentiable de différentielle nul.

Remarque 2.2.16 *L'existence et la continuité des dérivées partielles est une condition suffisante et non pas nécessaire pour la différentiabilité de f.*

Exemple 2.2.17 *Soit la fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0. \end{aligned}$$

Donc $f'(0)$ s'il existe elle est nulle. vérifions que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|_E}\left(f(h)-f(0)-hf'(0)\right) = 0.$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(f(h)-f(0)-hf'(0)\right) = \lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(h_1^2+h_2^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

D'où la différentiabilité de f.

Théorème 2.2.18 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour que f soit de classe C^1 sur U il faut et il suffit que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et continues sur U.*

2.2.6 Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1

Définition 2.2.19 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n, a \in U$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ admettent sur U une dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ par apport à la $i^{\text{ème}}$ variable. Si l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ par apport à la $j^{\text{ème}}$ variable au point a, on dit que $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ est une dérivée partielle d'ordre 2 au point a par apport à la $j^{\text{ème}}$ variable.*

$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ est également noté : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ou encore $f''_{x_j x_i}$.

Exemple 2.2.20 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ et \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 y + 3x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0.$$

Généralisation :

A partie des dérivées partielles d'ordre 2, on définit les dérivées partielles d'ordre 3 (lorsqu'elles existes). Ainsi de proche en proche on définit les dérivées partielles d'ordre quelconque (lorsqu'elles existes). La dérivée partielle d'ordre p de $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ au point a par apport au variables $x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \cdots, x_i$, est notée $\frac{\partial^p f}{\partial_{x_1} \partial_{x_1} \cdots \partial x_{i_p}}(a)$ ou encore $f^{(p)}_{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_p}}(a)$.

Exemple 2.2.21 *Calculer les dérivées partielles d'ordre 3 de la fonction*

$$f(x,y) = x + y - x^2 y^3.$$

1. *Les dérivées partielles d'ordre 1 :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - 3x^2 y^2.$$

2. *dérivées partielles d'ordre 2 :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x^2 y.$$

3. *dérivées partielles d'ordre 3 :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) &= 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = -12xy, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -6x^2 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = -6y^2.\end{aligned}$$

Définition 2.2.22 *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, f une application de U dans $\mathbb{R}^p$ et $f_i : U \to \mathbb{R}^p, i = \overline{1,p}$ les applications composantes de f. On dit que f est de classe C^p sur U et en écrit $f \in C^p(U)$ si toutes les dérivées partielles d'ordre l de chaque fonctions $(f_i)_{i=\overline{1,p}}$ existent et continues sur U.*

Théorème 2.2.23 *(de Schwarz)*

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n, a \in U$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existent au voisinage de a et sont continues en a, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

2.3 Formules de Taylor

Théorème 2.3.1 *(Cas dans $\mathbb{R}$)*

Soit f une fonction numérique de classe C^n sur $[a, a+h]$ et admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $[a, a+h]$. Ainsi il existe $c \in]a, a+h[$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_n(a,h)$$

avec

$$\begin{aligned} R_n(a,h) &= \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, 0 < \theta < 1 \text{ (reste de Lagrange)}, \\ R_n(a,h) &= \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a+th)}{(n)!}(1-t)^n, \text{ (reste intégrale)}. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 *(Cas dans $\mathbb{R}^n$)*

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^{p+1}, $a, a+h$ deux points de U on a

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\circ\left(\|h\|^2\right).$$

Preuve. Soit la fonction g définie par $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(t)=f(a+th), t\in\mathbb{R}$.

$$g(1)=f(a+h), g(0)=f(a).$$

En appliquant la formule de Taylor pour g sur $[0,1]$ on obtient

$$g(1)=g(0)+g^{'}(0)+\frac{1}{2}g^{''}(c), c\in\,]0,1[\tag{*}$$

$$g(t)=f(a+th)\Rightarrow g^{'}(t)=hf^{'}(a+th)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th),$$

d'où

$$g^{'}(0)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

De plus on a $\frac{\partial f}{\partial x_i}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$g^{''}(t)=h^2f^{''}(a+th)=\sum_{j=1}^{n}h_j\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+th)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}h_jh_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+th).$$

Substituons dans $(*)$ on obtient

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+ch). \tag{**}$$

Ajouter et rajouter $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ à $(**)$ et posons

$$\begin{aligned}\|h\|^2\zeta(h) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+ch)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+ch)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|h\|^2|\zeta(h)| &\leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2|h_ih_j|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+ch)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right|\\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(h_i^2+h_j^2\right)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+ch)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right|.\end{aligned}$$

La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ est continue donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+ch) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \Rightarrow \zeta(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

■

Remarque 2.3.3

$$D^{(k)} f(a)\, h^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k}(a)\, h_1.h_2 \cdots h_k.$$

2.4 Extrema

Dans ce paragraphe U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f est une application de U dans $\mathbb{R}$ et a un point de U.

Définition 2.4.1

1. *On dit que f admet un minimum (respectivement un maximum) global ou absolu en a si*

$$\forall x \in U : f(a) \leq f(x) \ \ (\textit{respectivement } f(a) \geq f(x)).$$

2. *On dit que f admet un minimum (respectivement un maximum) local ou relatif en a si il existe un voisinage V de a tel que*

$$\forall x \in U, \|x-a\| < V \Rightarrow f(a) \leq f(x) \ \ (\textit{respectivement } f(a) \geq f(x)).$$

3. *On dit que le minimum (respectivement le maximum) est strict si les inégalités précédents sont strictes.*
4. *On dit que f admet un extremum en a si elle présente un minimum ou un maximum en a.*

Exemple 2.4.2 *Soit la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \textit{si } x \neq 0, \\ 1 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{|x|}{|x|} = 1,$$

donc f admet un maximum global au point $x = 0$.

Théorème 2.4.3 *(Condition nécessaire d'existence d'un extremum)*

Soit f une fonction numérique définie sur un voisinage U de a dans un espace vectoriel normé E. Si f est différentiable en a sur U et qu'elle présente un extremum (local ou global) alors

$$Df\left(a\right)=f^{'}\left(a\right)=0.$$

Remarque 2.4.4 *Remarquons que la nullité de la différentielle constitue une condition nécessaire mais non pas suffisante d'existence d'un extremum. En effet soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f\left(x,y\right)=x^3+y^3.$$

$$Df\left(a\right)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x^2=0\\ 3y^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=0.$$

D'autre part

$$-h^3=f\left(-h,0\right)<f\left(0,0\right)<h^3=f\left(h,0\right),\forall h\in\mathbb{R}_+^*.$$

Ce qui prouve que f n'admet pas d'extremum au point $\left(0,0\right)$.

Théorème 2.4.5 *(Condition suffisante d'existence d'un extremum)*

Soit f un application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 et a un point de U. Si les conditions suivantes sont remplies :

1. *$Df\left(a\right)=f^{'}\left(a\right)=0$, et on pose*

$$P_2\left(h\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\forall h\in\mathbb{R}^n-\left\{0_{\mathbb{R}^n}\right\}.$$

Alors on a les implications

a. *Si*

$$D^2f\left(a\right)h^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(a\right)>0,$$

alors f admet un minimum en a.

b. *Si*

$$D^2f\left(a\right)h^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(a\right)<0,$$

alors f admet un maximum en a.

Définition 2.4.6 *Si f différentiable sur U. On appelle point* ***critique*** *ou* ***stationnaire*** *de f tout point où la différentielle de f s'annule.*

Le Théorème 2.4.5 dite alors que les extrema d'une fonction différentiable (quand ils existent) sont à chercher parmi ses points critiques i.e. parmi les solutions de l'équation

$$Df(x) = 0.$$

Exemple 2.4.7 *Soit la fonction* $f : \underset{(x,y)\mapsto \sin x \sin y \sin(x+y)}{[0,\pi]^2 \to \mathbb{R}}$.

Démontrer que f admet un maximum au point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ *et un minimum au point* $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Solution :

Les points ***critiques*** *de f est solution de*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y \sin(2x+y) = 0, \\ \sin x \sin(2y+x) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 0. \end{cases}$$

d'où $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ *est un point critique de f.*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = 0. \end{cases}$$

d'où $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ *est un point critique de f.*

1. *Au point* $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2\sin y \cos(2x+y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin x \cos(2y+x), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \sin(2x+2y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) &= -\sqrt{3}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + yx \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ &= -\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy - \frac{\sqrt{3}}{2}yx = -\sqrt{3}\left(x^2 + y^2 + xy + yx\right) \leq 0. \\ P_2(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, P_2(x,y) < 0. \end{aligned}$$

P_2 *définie négatif* $\Rightarrow$ f *admet un maximum au point* $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

2. *Au point* $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$:

$$P_2(x, y) = \sqrt{3}\left(x^2 + y^2 + xy + yx\right) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, P_2(x, y) > 0.$$

P_2 *définie positif* $\Rightarrow f$ *admet un minimum au point* $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Proposition 2.4.8 *Soit f une fonction de deux variables, admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues au voisinage de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifie*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0,$$

et on pose

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b).$$

Ainsi

1. *Si $AC - B^2 > 0$ et $A < 0$, alors f admet un maximum en (a, b).*
2. *Si $AC - B^2 > 0$ et $A > 0$, alors f admet un minimum en (a, b).*
3. *Si $AC - B^2 < 0$, alors f n'admet pas des extrema en (a, b).*
4. *Si $AC - B^2 = 0$, les deux cas possible.*

Exemple 2.4.9 1. *Soit la fonction*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

a. *Les point critiques*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases},$$

donc les points sont $(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$.

b. *Au point* $(1, -2)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

D'où

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) = 6, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 2) = 12, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 0.$$

$AC - B^2 = 72 > 0$ *et* $A > 0$, *alors f admet un minimum en* $(1, 2)$.

- *Au point* $(1,-2)$:

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=6, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)=-12, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)=0.$$

$AC-B^2=-72<0,$ *alors f n'admet pas des extrema en* $(1,-2)$.

- *Au point* $(-1,2)$:

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=-6, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)=12, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)=0.$$

$AC-B^2=-72<0,$ *alors f n'admet pas des extrema en* $(-1,2)$.

- *Au point* $(-1,-2)$:

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=-6, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)=-12, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)=0.$$

$AC-B^2=72>0$ *et* $A<0,$ *alors f admet un maximum en* $(-1,-2)$.

2. *Soit la fonction*

$$f(x,y)=x^3+y^3$$

a. Les point critiques

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0,$$

Le point critique est $(0,0)$.

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0.$$

$AC-B^2=0,$ *les deux cas possible.*

Si $x>0, y>0$:

$$f(x,y)>f(0,0)=0.$$

Donc f n'admet pas un maximum au point $(0,0)$.

Si $x<0, y<0$:

$$f(x,y)<f(0,0)=0.$$

Donc f n'admet pas un minimum au point $(0,0)$.

2.4.1 Extrema liés (Extrema sous contraintes)

Soient E un espace vectoriel normé, U un ouvert de E, f, g deux fonctions numériques de classe C^1 sur U.

On pose

$$A = \{x \in U \text{ tel que } g(x) = 0\},$$

et on cherche à des conditions nécessaire pour que $f_{|A}$: la restriction de f à A admet un extremum au point a.

Théorème 2.4.10 *Soient f, g deux fonctions numériques de classe C^1 sur U d'un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$g(a,b) = 0.$$

On définit A comme suit :

$$A = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } g(x,y) = 0\right\}.$$

Si la restriction de f à A admet un extremum au point (a,b) et si

$$g_x^{'}(a,b) \neq 0 \text{ ou } g_y^{'}(a,b) \neq 0.$$

Alors

$$\left(f_x^{'} g_y^{'} - f_y^{'} g_x^{'}\right)_{(a,b)} = 0.$$

Théorème 2.4.11 *(Cas générale)*

Soient f, g deux fonctions numériques de classe C^1 sur U un ouvert d'un espace vectoriel normé réel E.

On pose

$$A = \{x \in U \text{ tel que } g(x) = 0\}.$$

Si la restriction de f à A admet un extremum au point a tel que $g^{'}(a) \neq 0$. Alors il existe un nombre réel λ tel que

$$f^{'}(a) = \lambda g^{'}(a).$$

Exemple 2.4.12 *Trouver les extrema de la fonction*

$$f(x,y) = xy,$$

lié à la condition $x+y=1$.

Slution :

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \Rightarrow y = 1-x \Rightarrow F(x) = f(x,1-x) = x(1-x), \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x) &= -2x+1, \frac{\partial F}{\partial x}(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$F'(x)$ *s'annulle en* $x=\frac{1}{2}$ *et chagé le signe donc* F *admet un maximum au point* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *tel que* $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Méthode 2 : *On pose* $g(x,y)=x+y-1$ *(les contraintes),* $a=(x,y)$

$$f'(a) = \lambda g'(a) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Donc le point est $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *vérifie* $g\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0$ *et* $g'_x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\neq 0$ *ou* $g'_y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\neq 0$.

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

donc f *admet un maximum* $\frac{1}{4}$ *au point* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2.5 Difféomorphismes

Définition 2.5.1 *(difféomorphisme)*

Soient U *et* V *des ouverts non vides de* $\mathbb{R}^p$. *On dit q'une application* $f : U \to V$ *est un difféomorphisme de* U *sur* V *si*

1. f *est une bijection.*
2. f *est de classe* C^1, *c'est à dire continument différentiable sur* U.
3. f^{-1} *est de classe* C^1 *sur* V.

Proposition 2.5.2 *(difféomorphisme et réciproque)*

Si $f : U \to V$ *est un difféomorphisme, alors sa différentielle est en tout point de* U *un isomorphisme (de* $\mathbb{R}^p$ *dans lui même) et la différentielle de sa réciproque* f^{-1} *est liée à celle de* f *par la formule*

$$D\left(f^{-1}\right)y = \left(Df_{f^{-1}(y)}\right)^{-1}, \text{ pour tout } y \in V.$$

Remarque 2.5.3 *Un difféomorphisme de U sur V est évidemment un homéomorphisme de U sur V. Mais la réciproque est fausse, par exemple l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3$ est un homéomorphisme différentiable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas un difféomorphisme sur $\mathbb{R}$ puisque la réciproque $f^{-1} : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ n'est pas différentiable au point $x = 0$.*

2.5.1 Les fonctions implicites

Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de $E \times F$. $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application de U dans G.

Soit

$$A = \{(x, y) \in U \text{ tel que } f(x, y) = 0\},$$

et posons $A \neq \not{c}$. Nous nous intéresssons à l'étude de l'ensemble S tel que S est la trajectoire d'une fonction φ définie d'un sous ensemble B de E dans F vérifie

$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$

Théorème 2.5.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et (a, b) un élément de $U, f : U \to \mathbb{R}$ vérifie :*

1. *f est de classe $C^k\,(k \geq 1)$ sur U.*
2. *$f(a, b) = 0$.*
3. *$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.*

   Ainsi il existe un voisinage ouvert A de a et un voisinage ouvert B de b et $\varphi : A \to B$ une fonction unique de classe $C^k\,(k \geq 1)$ sur A vérifie :

a. *$A \times B \subset U$.*

b. *$\varphi(a) = b$.*

c. *$\forall x \in A : f(x, \varphi(x)) = 0$.*

d. *$\forall x \in A$:*

$$\varphi^{'}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Exemple 2.5.5 *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1.$$

1. *Montrer qu'il existe dans un voisinage de **zéro** une fonction implicite $y = \varphi(x), \varphi(0) = 1$.*

2. *Donner un développement de φ d'ordre 2 au voisinage de* ***zéro.***

Solution

1. *f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

- $f(0,1) = 0$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 3 \neq 0$.

Donc il existe un voisinage ouvert A de 0 et un voisinage ouvert B de 1 et une fonction unique $\varphi : A \to B$ de classe C^∞ sur A vérifie :

- $A \times B \subset \mathbb{R}^2$.
- $\varphi(0) = 1$.
- $\forall x \in A : f(x, \varphi(x)) = 0$.
- $\forall x \in A : \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$ *tel que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x,$$

d'où

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))} = \frac{x^2 - \varphi(x)}{x - (\varphi(x))^2}.$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{1}{2}x^2\varphi''(0) + \circ\left(x^2\right), \\
\varphi'(0) &= -\frac{-\varphi(0)}{(\varphi(0))^2} = 1, \\
\varphi''(x) &= \frac{\left(2x - \varphi'(x)\right)\left(x - (\varphi(x))^2\right) - \left(1 - 2\varphi(x)\varphi'(x)\right)\left(x^2 - \varphi(x)\right)}{\left(x - (\varphi(x))^2\right)^2}, \\
\varphi''(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(x) = 1 + x + \circ\left(x^2\right).$$

Théorème 2.5.6 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ tel que U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ vérifie*

1. *f est de classe $C^k\,(k \geq 1)$ sur U.*
2. $f(a,b,c) = 0$.
3. $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$.

Ainsi il existe un voisinage ouvert A de a et un voisinage ouvert B de b et un voisinage ouvert C de c et une fonction unique $\varphi : A \times B \to C$ de classe $C^k\,(k \geq 1)$ sur $A \times B$ vérifie :

a. $A \times B \times C \subset U.$

b. $\varphi(a, b) = c.$

c. $\forall (x, y) \in A \times B : f(x, y, \varphi(x, y)) = 0.$

d. $\forall (x, y) \in A \times B :$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}.$$

Exemple 2.5.7 *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y, z) = z^3 - 2xz + y.$$

1. *Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = 0\}$ définie au voisinage du point $(1, 1, 1)$ un trajectoire d'une fonction implicite de classe C^∞ définie d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifie $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0.$*
2. *Donner un développement d'ordre 2 de la fonction φ au voisinage de $(1, 1)$.*

Solution

1. *f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

- $f(1, 1, 1) = 0.$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = 3z^2 - 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 1 \neq 0.$

  Donc il existe un voisinage ouvert $U = A \times B$ du point $(1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ et une fonction unique $\varphi : U \to C$ de classe C^∞ sur U vérifie :

- $A \times B \times C \subset \mathbb{R}^3.$
- $\varphi(1, 1) = 1.$
- $\forall (x, y) \in A \times B : f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ *et*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 2\frac{\varphi(x, y)}{3(\varphi(x, y))^2 - 2x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{3(\varphi(x, y))^2 - 2x}.$$

Le développement d'ordre 2 de φ au point $(1,1)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \varphi(1,1) + x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1) + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1) + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1,1) + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(2xy\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(1,1)\right) + \circ\left(\|x,y\|^2\right). \\
\varphi(1,1) &= 1, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1) = 2, \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1) = -1, \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) &= 2\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\left(3(\varphi(x,y))^2 - 2x\right) - 2\varphi(x,y)\left(6\varphi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) - 2\right)}{\left(3(\varphi(x,y))^2 - 2x\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1,1) = -16, \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{6\varphi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)}{\left(3(\varphi(x,y))^2 - 2x\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1) = -6, \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{6\varphi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) - 2}{\left(3(\varphi(x,y))^2 - 2x\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1) = 10.
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(x,y) = 1 + 2x - y + \frac{1}{2}\left(-16x^2 - 6y^2 + 20xy\right) + \circ\left(\|x,y\|^2\right).$$

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1 *Montrer que les fonctions suivantes admet des dérivées partielles, et puis calculer ces dérivées*

$$1) f(x,y) = (x+y)\tan x^2, \quad 2) f(x,y,z) = \left(x^2+z\right)\sin x, \quad 3) f(x,y) = \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{\tan y}.$$

Exercice 2.6.2 *Soit les fonctions définies pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :*

$$g_k(x,y) = \begin{cases} yx^k \sin\frac{1}{x} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que g_0 n'est pas continue au point $(0,1)$.*
2. *Montrer que g_1 continue au point $(0,1)$, mais n'admet pas une dérivée partielle par apport à x au point $(0,1)$.*
3. *Montrer que g_2 admet une dérivée partielle $g'_{2,x}$ au point $(0,1)$, mais $g'_{2,x}$ n'est pas continue au point $(0,1)$.*
4. *Montrer que g_4 admet une dérivée partielle $g''_{4,x}$ au point $(0,1)$, mais $g''_{2,x}$ n'est pas continue au point $(0,1)$.*

5. *Montrer que* g_5 *admet une dérivée partielle d'ordre* 2 :$g''_{4,x}$ *continue au point* $(0,1)$, *mais n'admet pas une dérivée partielle d'ordre* 3 :$g'''_{2,x}$ *au point* $(0,1)$.

Exercice 2.6.3 *Montrer que les fonctions suivantes sont de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)\ln(x^2+y^2) & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}, g(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 2.6.4 1. *Montrer que l'application* f *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x,y,z) = \left(x+y^2, xy^2z\right),$$

est différentiable en chaque point (x,y,z) *de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Ecrire la matrice Jacobienne de* f.
3. *Même questions pour l'application* $g : \underset{(u,v)\mapsto g(u,v)=(u^2+v,uv,e^v)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$.
4. *Ecrire la matrice Jacobienne de* $g \circ f$ *au point* (x,y,z) *de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.6.5 1. *Calculer* $\frac{\partial z}{\partial t}$ *si*

$$z = f(x,y) = e^{3x+2y}, x = \cos t, y = t^2.$$

2. *Calculer* $\frac{\partial z}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial v}$ *si*

$$z = f(x,y) \ \text{où}\ x = uv, y = \frac{u}{v}.$$

3. *Montrer que la fonction* $z = \varphi(x^2+y^2)$ *vérifie l'équation :*

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Exercice 2.6.6 *Calculer le gradient des fonctions :*

1. f *au point* $(2,1)$ *si* $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$.
2. f *au point* $(5,3)$ *si* $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$.
3. *Calculer toutes les dérivées partielles du seconde ordre de la fonction*

$$f(x,y,z) = xy+yz+xz.$$

4. *Montrer que la fonction* $u = \arctan\frac{y}{x}$ *satisfait à l'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 2.6.7 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et* $\varphi : \underset{(r,\theta)\mapsto\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$.

1. *Montrer que la fonction* $g = f \circ \varphi$ *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Ecrire les dérivées partielles de* g *en fonction des dérivées partielles de* f.
3. *Ecrire les dérivées partielles de* f *en fonction des dérivées partielles de* g.
4. *Donner la différentielle de* g.

Exercice 2.6.8 *Déterminer les extrema de* f *où*

$$\begin{aligned} 1)\ f(x,y) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2, \qquad 2)\ f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - y \\ 3)\ f(x,y) &= \tfrac{1}{g(x,y)} \text{ où } g(x,y) = x^2 + 2 + (\cos y)^2 - 2\cos y, \end{aligned}$$

Exercice 2.6.9 1. *Trouver la distance entre un point* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ *et le centre* $(0,0)$ *à condition que*

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy = 8.$$

2. *Trouver les extrema de la fonction* $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ *tel que* $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 2.6.10 *Soient les fonctions* f, g *définies par :*

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + xy, \quad f(x,y) = \left(2x^2 - 4\right)^2 + \left(y^2 - 1\right)^2 + \left(2x^2 - 4\right)^2 \left(y^2 - 1\right)^2.$$

1. *Calculer les dérivées partielles d'ordre* 1 *de* g*, trouver les points critiques et étudier les extrema de* g.
2. *Calculer l'extrema au point* $(0,0)$ *et puis montrer qu'elle est un minimum absolu sur* $\mathbb{R}^2$.
3. *Montrer d'après la question* 2 *que* f *admet un minimum en* 4 *points que l'on déterminera.*
4. *Nous pouvons étudier les extrema liées de* g *sur le cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* r.

a. *Ecrire l'expression de* g *en fonction des coordonnées polaires* (r,θ),$\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$.

b. *Montrer que* $\forall \theta \in \left]-\pi, \pi\right[$:

$$\frac{r^2}{2} \le g(r,\theta) \le 3\frac{r^2}{2}.$$

c. *Déduire que* g *admet un minimum liée en deux points et un maximum en deux points.*

2.7 Correction

Correction de l'exercice 1.6.1 :

Montrons que les fonctions admet des dérivées partielles

1. $f(x,y) = (x+y)\tan x^2$:
   - La fonction $x \mapsto (x+y)\tan x^2 \in C^\infty$ sur $\mathbb{R} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe.
   - La fonction $y \mapsto (x+y)\tan x^2 \in C^\infty$ sur $\mathbb{R} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe.

Correction de l'exercice 1.6.2 :

1. On a

$$g_0(x,y) = \begin{cases} y\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,1)} g_0(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} y\sin\frac{1}{x} = 1 \neq 0,$$

Donc g_0 n'est pas continue au point $(0,1)$.

2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} g_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} yx\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Donc g_1 continue au point $(0,1)$.

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,1) = \lim_{x\to 0}\frac{g_1(x,1) - g_1(0,1)}{x} \text{ n'existe pas.}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x}(0,1) &= \lim_{x\to 0}\frac{g_2(x,1) - g_2(0,1)}{x} = 0, \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = y\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \\ &\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial g_2}{\partial x}$ n'est pas continue au point $(0,1)$.

4.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_4}{\partial x^2}(0,1) &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial g_4}{\partial x}(x,1) - \frac{\partial g_4}{\partial x}(0,1)}{x} = 0. \\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\partial^2 g_4}{\partial x^2}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} y\left(12x^2\sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\right) \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial^2 g_4}{\partial x^2}$ n'est pas continue au point $(0,1)$. La même démarche pour le reste.

Correction de l'exercice 1.6.3 :

Montrons que les fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Pour Montrer qu'une fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ il suffit de montrer que les dérivées partielles existent et continues sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Si $(x,y) \neq (0,0)$:

   f est le composée des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et

   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\ln\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}.$

2. Si $(x,y) = (0,0)$:

   $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ (en utilisant les coordonnées polaies)

   donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue au point $(0,0)$.

   $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0, \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ (en utilisant les coordonnées polaies)

   donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue au point $(0,0)$. D'où les dérivées partielles existent et continues au point $(0,0) \Rightarrow f$ est de classe C^1 au point $(0,0) \Rightarrow f$ est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

   - g n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Correction de l'exercice 1.6.4 :

1. $f = (f_1, f_2) \Rightarrow f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si f_1, f_2 l'est aussi.

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x + y^2 \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right) \Rightarrow f_1 \text{ différentiable.} \\ f_2(x,y,z) &= xy^2z \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right) \Rightarrow f_1 \text{ différentiable.} \end{aligned}$$

2.

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}.$$

3. $g \circ f = g(f(x,y,z)) = g(x + y^2, xy^2z) = h(x,y,z) \Rightarrow J_{g\circ f} = J_h$ ou bien

$$J_{g\circ f} = J_g \times J_f.$$

Correction de l'exercice 1.6.5 :

1. Calcul de $\frac{\partial z}{\partial t}$ si

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = e^{3x+2y}, x = \cos t, y = t^2. \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 3e^{3\cos t + 2t^2}(-\sin t) + 2e^{3\cos t+2t^2}2t. \end{aligned}$$

2. Calculer $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$ si

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) \text{ où } x = uv, y = \frac{u}{v}. \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}v + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{v}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}u - \frac{u}{v^2}\frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

3. $z = \varphi(x^2+y^2)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\varphi'\left(x^2+y^2\right), \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\varphi'\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Correction de l'exercice 1.6.7 :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \underset{(r,\theta)\mapsto\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow f\circ\varphi$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2. $$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta. \end{cases}$$

3. la résolution du système précédent nous donne

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}. \end{cases}$$

4. La différentielle de g :

$$Dg(h) = \sum_{i=1}^{2} h_i\frac{\partial g}{\partial x_i} = h_1\frac{\partial g}{\partial r} + h_2\frac{\partial g}{\partial \theta} = h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right) + h_2\left(-r\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right).$$

Correction de l'exercice 1.6.8 :

Les extrema des fonctions

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

   a. **Les points critiques de f :**

(x,y) est un point critique si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0, \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0. \end{cases}$$

Donc les doint sont $(0,0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

b.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4.$$

• **Au point** $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 20, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 20, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = 4.$$

d'où

$$AC - B^2 = 400 - 16 > 0 \text{ et } A > 0,$$

donc $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ est un minimum de f.

• **Au point** $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$:

$$AC - B^2 = 400 - 16 > 0 \text{ et } A > 0,$$

donc $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ est un minimum de f.

• **Au point** $(0,0)$:

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= 0, \text{ les deux cas possible.} \\ P_2(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2 \\ &= -4x^2 + 8xy - 4y^2 = -4(x-y)^2 \leq 0 = f(0,0). \end{aligned}$$

Donc si f admet un extrema au point $(0,0)$ elle est un maximum.

2. $f(x,y) = \frac{1}{g(x,y)}$ où $g(x,y) = x^2 + 2 + (\cos y)^2 - 2\cos y$.

   (a) **Les points critiques de g :**

(x, y) est un point critique si

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2\cos y \sin y + 2\sin y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2\sin y\,(1 - \cos y) = 0. \end{cases}$$

Donc les points sont $(0, k\pi)\,, k \in \mathbb{Z}$.

b.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2(\cos y - \cos 2y)\,, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

- **Au point** $(0, k\pi)\,, k = 2p$:

$$A = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 2p\pi) = 2, C = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 2p\pi) = 0, B = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 2p\pi) = 0.$$

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= 0, \text{ les deux cas possible.} \\ P_2(x,y) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,2p\pi)\,x^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,2p\pi)\,xy + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,2p\pi)\,y^2 \\ &= 2x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Alors l'extrema s'il existe est un minimum.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = x^2 + 2 + (\cos y)^2 - 2\cos y = x^2 + (\cos y - 1)^2 + 1 \geq 1 = g(0, 2p\pi)$.

Donc g admet un minimum au point $(0, 2p\pi) \Rightarrow f$ admet un maximum au point $(0, 2p\pi)$.

- **Au point** $(0, k\pi)\,, k = 2p+1$:

$$A = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,(2p+1)\pi) = 2, C = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(2p+1)\pi = -4, B = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(2p+1)\pi = 0,$$
$$AC - B^2 < 0.$$

Donc g d'admet pas un extrema au point $(0, (2p+1)\pi) \Rightarrow f$ n'admet pas un extrema au point $(0, (2p+1)\pi)$.

Correction de l'exercice 1.6.9 :

1. La distance entre un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et le centre $(0, 0)$ à condition que

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy = 8.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la distance entre le point (x,y) et le centre $(0,0)$ est définie par

$$d\left((x,y),(0,0)\right)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

On définit les fonctions

$$f(x,y)=x^2+y^2 \text{ et } g(x,y)=5x^2+5y^2+6xy-8 \text{ (les contraintes).}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\\ g(x,y)=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\lambda(10x+6y),\\ 2y=\lambda(10y+6x),\\ 5x^2+5y^2+6xy-8=0.\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\frac{x}{5x+3y}=\frac{y}{5y+3x}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm y,\\ 5x^2+5y^2+6xy-8=0.\end{cases}$$

Donc les points sont $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right).$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1,\ f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=4.$$

D'où f admet un minimum 1 au points $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et un maximum au points $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right).$

La petite distance entre entre (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et l'origine est 1 et la grande distance entre entre (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et l'origine est 4.

2. Les extrema de f à condition que $x^2+y^2=1$ tel que

$$f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}.$$

On pose

$$g(x,y)=x^2+y^2-1 \text{ (les contraintes).}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\\ g(x,y)=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}=2\lambda x,\\ \frac{1}{b}=2\lambda y,\\ x^2+y^2-1=0.\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2ax}=\frac{1}{2by}.$$

D'oùles points sont $\left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$

$$f\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab},f\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

f admet un maximum $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ au points $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ et un minimum $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ au points $\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$

Correction de l'exercice 1.6.10 :

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + xy, \quad f(x,y) = \left(2x^2-4\right)^2 + \left(y^2-1\right)^2 + \left(2x^2-4\right)^2\left(y^2-1\right)^2.$$

1. $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x + y, \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y + x.$$

   Donc les points critiques de g est la solution du système

   $$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

   $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2 \Rightarrow A = 2, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2 \Rightarrow C = 2, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \Rightarrow B = 1.$$

   $$AC - B^2 = 3 > 0 \text{ et } A > 0.$$

   Donc g admet un minimum au point $(0,0)$.

2. Montrons que $(0,0)$ est un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \geq 0 = g(0,0)$$

   car

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 \geq xy.$$

3. Posons

   $$X = 2x^2 - 4, Y = \left(y^2-1\right) \Rightarrow g(X,Y) = f(x,y).$$

   g admet un minimum au point $(0,0) \Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0$ et $y^2 - 1 = 0$ ce qui donne les points $(2,1), (2,-1), (-2,1), (-2,-1)$.

   (a) $$g(x,y) = x^2+y^2+xy \Rightarrow g(r,\theta) = r^2\left((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 + \cos\theta\sin\theta\right) = r^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right).$$

   (b) On a

   $$-1 \leq \sin 2\theta \leq 1 \Rightarrow \frac{r^2}{2} \leq r^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \leq 3\frac{r^2}{2}.$$

(c) Gràce à l'inégalité précédente on conclut que g admet un minimum liées $\frac{r^2}{2}$ vérifie

$$\begin{aligned} g(r,\theta) &= \frac{r^2}{2} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } \theta \in \left]-\pi,\pi\right] \\ &\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } \theta = 3\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

D'où les points (x,y) sont $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$. On conclut aussi que g admet un maxiimum liées $3\frac{r^2}{2}$ vérifie

$$\begin{aligned} g(r,\theta) &= 3\frac{r^2}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } \theta \in \left]-\pi,\pi\right] \\ &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \theta = -3\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

D'où les points (x,y) sont $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$.

Chapitre 3

Intégrales multiples

3.1 Intégrales doubles en coordonnées rectangulaires :

3.1.1 Calcul direct des intégrales doubles

L'intégrale double d'une fonction $f(x,y)$ étendue à un domaine fermé borné D est par définition, la limite des sommes intégrales doubles correspondantes :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{\max \triangle x_i \to 0 \\ \max \triangle y_j \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \triangle x_i \triangle y_j \tag{2.1}$$

où

$$\triangle x_i = x_{i+1} - x_i, \triangle y_j = y_{j+1} - y_j$$

et la somme étant étendue aux valeurs de i et de j telles que les points (x_i, y_j) appartiennent au domaine D.

Pour calculer les limites d'intégration dans une intégrale double on distingue trois types fondamentaux de domaines d'intégration.

Théorème 3.1.1 *1. Soit $P = [a,b] \times [c,d]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction intégrable sur P. Alors*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2. Le domaine d'intégration D est limité à gauche et à droite par les droites $x = a$ et $x = b (b > a)$, en bas et en haut par les courbes continues $y = \varphi_1(x)$ et $y =$

$\varphi_2(x)\,(\varphi_2(x) > \varphi_1(x))$. *Dans le domaine* D *la variable* x *varie de* a *à* b *et la variable* y *pour* x *constant de* $y_1 = \varphi_1(x)$ *à* $y_2 = \varphi_2(x)$.

Le calcul de l'intégrale $(2,1)$ *peut se ramener à l'intégration d'une intégrale simple d'après la formule*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

où quand on calcule $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$, *la grandeur* x *et supposé constante.*

3. *Le domaine d'intégration* D *est limité inférieurement et supérieurement par les droites* $y = c$ *et* $y = d(d > c)$, *à gauche et à droite par les courbes continues* $x = \psi_1(y)$ *et* $x = \psi_2(y)\,(\psi_2(y) > \psi_1(y))$. *De même que précédament, on a*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy,$$

en outre dans l'intégrale $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$, y *est supposée constante.*

Exemple 3.1.2 1. *Calculer l'intégrale* $I = \int_0^1 \int_x^1 (x+y)\,dydx$.

$$\int_0^1 \int_x^1 (x+y)\,dydx = \int_0^1 \left(\left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right]_x^1 \right) dx = \frac{1}{2}.$$

2. *Déterminer les limites d'intégration pour l'intégrale* $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ *où le domaine d'intégration est limité par l'hyperbole d'équation* $y^2 - x^2 = 1$ *et les droites* $x = 2, x = -2$.

$$y^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1+x^2}.$$

Donc

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

3. *Calculer l'intégrale* $I = \int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)\, dx.$

$$I = \int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)\, dx = \int\limits_{-3}^{3} dy \left[\frac{1}{2}x^2 + 2xy\right]_{y^2-4}^{5} = \int\limits_{-3}^{3} \left(\frac{1}{2}\left(25 - \left(y^2-4\right)^2\right) + 2\left(5 - \left(y^2-4\right)\right) y\right.$$

Remarque 3.1.3 *En particulier si D est un pavé de $[a,b]\times[c,d]$, alors*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy\right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\, dx\right) dy.$$

De plus si $f(x,y) = h(x)\, g(y)$ on alors

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dxdy = \left(\int\limits_a^b h(x)\, dx\right) \times \left(\int\limits_c^d g(y)\, dy\right).$$

3.1.2 Propriétés des intégrales doubles

1. L'ensemble des fonctions intégrables sur une partie mésurable D de $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel et

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\, dxdy.$$

2. Soit $f \geq 0$ et intégrable sur D, alors

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \geq 0.$$

3. Si f est intégrable sur D, alors $|f|$ est intégrable sur D et

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy.$$

4. Soit A, B deux parties mésurables de $\mathbb{R}^2$ telles que $mes(A\cap B) = 0$ et f est intégrable sur A et B, alors f est intégrable sur $A\cup B$ et

$$\iint\limits_{A\cup B} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_A f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_B f(x,y)\, dxdy.$$

3.1.3 Interpretation géométrique d'une intégrale double

Soit

$$\sum = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D \text{ une partie mésurable de } \mathbb{R}^2 \text{ et } z = f(x, y) \right\}.$$

$I = \int\int_D f(x, y)\, dxdy$ s'interprete comme le volume V du corps délimité par D, la surface $\sum$ et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe oz et s'appient sur la frontière de D.

3.2 Changement de variables dans une intégrale double

Théorème 3.2.1 *Soient D et S deux parties mésurables de $\mathbb{R}^2$ et g une application bijective de D dans S définie par*

$$g(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Supposons que g possède les deux propriétés suivantes :

1. *g est de classe C^1 sur D i.e que les fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$ ont des dérivées partielles continues dans D.*
2. *Le Jacobien de g*
$$|J_g(u, v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u, v) \in D.$$

Alors on a la formule de changement de variables

$$\int\int_S f(x, y)\, dxdy = \int\int_{D = g^{-1}(S)} f[g(u, v)]\, |J_g(u, v)|\, dudv.$$

3.2.1 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires définissent une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.φ : $(r, \theta) \mapsto \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ dont le jacobien est

$$|J_\varphi(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

mais cette application n'est pas bijective sur $\mathbb{R}^2$. Si l'on restreint g à une partie D de $\mathbb{R}^2$ telle que $g_{|D}$ soit bijective, alors la formule de changement de variables précédentes nous donne dans ce cas

$$\int\int_S f(x,y)\,dxdy = \int\int_{D=g^{-1}(S)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

Remarque 3.2.2 *Dans le cas où le domaine S est délimité par deux courbes dont les équations en coordonnées polaires sont connues*

$$\widehat{ABC}: \varphi = \varphi_2(\theta), \widehat{AEC}: \varphi = \varphi_1(\theta).$$

Alors

$$\int\int_S f(x,y)\,dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi(\theta_1)}^{\varphi(\theta_2)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

Exemple 3.2.3 *1. Calculer l'intégrale $\int\int_S \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, où le domaine S est le cercle de rayon $R=1$ et de centre à l'origine des coordonnées.*

Solution :

En posant

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \Rightarrow \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}.$$

Puisque dans le domaine D, la coordonnée r pour θ arbitraire varie de 0 à 1 et θ varie de 0 à 2π , on a

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

$$\int\int_S \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}rdrd\theta = \tfrac{2}{3}\pi.$$

2. Calculer l'intégrale $\int\int_S xydxdy$ telle que

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < R^2, x > 0, y > 0\right\}.$$

En utilisant les coordonnées polaires

$$x^2+y^2 < R^2 \Leftrightarrow 0 < r < R,$$

$$x > 0, y > 0 \Leftrightarrow r\cos\theta > 0, y = r\sin\theta > 0 \Leftrightarrow \theta \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

D'où

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 < r < R, 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}\right\},$$

$$\int\int_S xydxdy = \int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 r\cos\theta\sin\theta drd\theta = \int_0^R r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta = \tfrac{R^4}{8}.$$

3.3 Intégrales triples

3.3.1 Intégrales triples en coordonnées rectangulaires :

Introduction :

Soit f une fonction réelle de trois variables réelles définies sur une partie mésurable V de $\mathbb{R}^3$.

$$f : \underset{(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)}{V \subset} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

L'intégrale triple de la fonction f étendue au domaine est par définition, la limite des sommes intégrales triples correspendantes :

$$\int\int_V\int f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\substack{\max \triangle x_i \to 0 \\ \max \triangle y_j \to 0 \\ \max \triangle z_k \to 0}} \sum_i\sum_j\sum_k f(x_i, y_j, z_k)\,\triangle x_i \triangle y_j \triangle z_k. \tag{2.2}$$

Le calcul de l'intégrale triple se ramène au calcul succissif de trois intégrales simples ou au d'une intégrale double et d'une intégrale simple.

Remarque 3.3.1 *En particulier si* $f(x,y,z) = 1$ *sur* V *où*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\right\}.$$

Alors $\int\int_V\int f(x,y,z)\,dxdydz$ *représente le volume de* S.

Exemple 3.3.2 *Calculer l'intégrale* $I = \int\int_V\int x^3y^2z\,dxdydz$ *où le domaine* V *est définie par les inégalités* $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^x x^3y^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{xy}dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^x x^5y^4\,dy\right)dx \\ &= \frac{1}{10}\int_0^1\int_0^x x^{10}dx = \frac{1}{110}. \end{aligned}$$

Théorème 3.3.3 *(Changement de variables dans une intégrale triple)*

Soient D *et* D' *deux parties mésurables de* $\mathbb{R}^3$ *et* g *une application bijective de* D *dans* D' *définie par*

$$g(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

g est de classe C^1 sur D et telle que le Jacobien de g

$$|J_g(u,v,w)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v,w) \in D.$$

Alors on a la formule de changement de variables

$$\int\int_{D'}\int f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int_{D=g^{-1}(D')}\int f[g(u,v,w)]\,|J_g(u,v,w)|\,dudvdw.$$

3.3.2 Application du théorème précédente au changement de variables en coordonnées cylindriques

En posant

$$\varphi(r,\theta,z) = \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et $J_\varphi(r,\theta,z) = r$.

En considérant un domaine mésurable D de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi : \varphi^{-1}(D') \to D$ soit bijective et f une fonction intégrable sur D, alors on a

$$\int\int_D\int f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int_{\varphi^{-1}(D)}\int f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdrd\theta dz.$$

Exemple 3.3.4 *Calculer l'intégrale $I = \int\int_D\int z^{x^2+y^2}dxdydz$ où*

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq a^2, a > 0, 0 \leq z \leq 1.\right\}$$

On utilise le changement de variables en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \varphi(r,\theta,z) &= \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases} \\ x^2+y^2 &\leq a^2 \Leftrightarrow r^2 \leq a^2 \Leftrightarrow r \leq a. \end{aligned}$$

Donc

$$D' = \varphi^{-1}(D) = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3, 0 < r \leq a, 0 \leq z \leq 1, \theta \in [0,2\pi]\right\}.$$

et

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{D} z^{x^2+y^2}dxdydz &= \int\limits_0^a\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} z^{r^2}rdrd\theta dz = 2\pi\int\limits_0^a r\left(\int\limits_0^1 z^{r^2}dz\right)dr \\ &= 2\pi\int\limits_0^a r\left[\frac{1}{r^2+1}z^{r^2+1}\right]_0^1 dr = \pi\ln\left(a^2+1\right).\end{aligned}$$

3.3.3 Application du théorème précédente au changement de variables en coordonnées sphériques

En posant

$$\psi(r,\theta,z) = \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, 0\leq\theta\leq\pi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

On a $\psi\in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ et

$$|J_\psi(r,\theta,\varphi)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\theta\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

En considérant un domaine mésurable D de $\mathbb{R}^3$ tel que $\psi:\psi^{-1}(D)\to D$ soit bijective et $|J_\psi(r,\theta,\varphi)|, \forall(r,\theta,\varphi)\in\psi^{-1}(D)$, alors on a

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\psi^{-1}(D)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta drd\theta d\varphi,$$

pour une fonction intégrable sur D.

Exemple 3.3.5 *1. Calculer l'intégrale* $I = \iiint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ *où*

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+, x^2+y^2+z^2\leq R^2\right\}.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \Leftrightarrow r^2 \leq R^2 \Leftrightarrow 0 < r \leq R, \\ \begin{cases} x \geq 0 \Leftrightarrow r\cos\varphi\sin\theta \geq 0 \\ y \geq 0 \Leftrightarrow r\sin\varphi\sin\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (\theta,\varphi) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2, \\ z \geq 0 \Leftrightarrow r\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

d'où

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} rr^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \frac{R^4}{8}.$$

2. *Calcul de volume d'une sphère de rayon R i.e* $I = \iiint_D dxdydz$ *où*

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\}.$$

Par l'utilisationdes coordonnées sphériques on obtient

$$D' = \psi^{-1}(D) = \left\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3, 0 < r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\right\}.$$

et

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 *Calculer les intégrales doubles*

- $I_1 = \iint_D x^2 dxdy$ *lorsque* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$.
- $I_2 = \iint_D dxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq x \leq y^2, 1 \leq y \leq 2\}$.
- $I_3 = \iint_D (2x-y)^2\,dxdy$ *où D est le paraléllograme limité par les droites d'équations* $y = x, y = 2x, y = x+1, y = 2x-2$.

Exercice 3.4.2 *Calculer les intégrales*

- $I_1 = \iint_D dxdy$ *où D est limité par les courbes* $y = ax, y = \frac{x}{a}, y = \frac{b}{x}, y = \frac{1}{bx}$ *telle que* $a > 1, b > 1, x > 0$ *(utiliser le changement de variables* $x = \frac{u}{v}, y = uv$*).*

- $I_2 = \int\int_D \frac{x-y}{x^2+y^2} dxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2+y^2-x \geq 0, x^2+y^2-y \leq 0\}$.
- $I_3 = \int\int_D\int xyz\,(1-x-y-z)\, dxdydz$ *où* D *est limité par les plans d'équations* $x = 0, y = 0, z = 0$ *et* $x+y+z = 1$ *(utiliser le changement de variables* $x = u(1-v), y = uv(1-w), z = uvw$*).*

Exercice 3.4.3 *Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ *définie comme la limite* $\lim_{n\to+\infty} I_n$ *où* $I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, *considérons le quart disque* $D_n = \{x^2+y^2 \leq n^2, x > 0, y > 0\}$ *et le carré* $C_n = \{0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$.

1. *Calculer les intégrales* $J_n = \int\int_{D_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$, $J_{2n} = \int\int_{D_{2n}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$.
2. *Considérons l'intégrale* $K_n = \int\int_{C_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy$, *montrer que* $K_n = (I_n)^2$.
3. *D'après un dessin de* D_n, C_n, D_{2n}, *expliquer pour quoi* $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$.
4. *Qu'elle est la limite de* J_n *et* J_{2n} *et de* K_n *quand* $n \to +\infty$.
5. *Trouver* I.

Exercice 3.4.4 1. *Calculer les intégrales*

$$I_1 = \int\int_{D_1} \left(x^2+y^2\right) dxdy,\ \ I_2 = \int\int_{D_2}\int \frac{1}{\sqrt{a-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}} dxdydz,$$

où D_1 *est limité par l'ellipse d'équation* $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, *en utilisant le changement de variavles*

$$x = au\cos v, y = bu\sin v$$

et $D_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{4} \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$.

2. I_3 *est le volume de l'ensemble* D *telle que* D *est une partie limité par la sphère de centre* 0 *et de rayon* 1 *et le cylindre d'équation* $x^2+y^2-y = 0$.

3.5 Correction

Correction de l'exercice 2.4.1

- Pour I_1 en utilisant les coordonnées polaires $\begin{cases} x \geq 0, \\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2}. \end{cases}$

d'où

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)^2 \, r dr d\theta = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

- $I_2 = \int_1^2 \int_y^{y^2} dxdy = \frac{7}{3} - \frac{3}{2}$.
- $I_3 = \int\int_D (2x-y)^2 \, dxdy = \int\int_{D_1} (2x-y)^2 \, dxdy + \int\int_{D_2} (2x-y)^2$ où

$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq y\right\}, D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leq y \leq 4, y-1 \leq x \leq \frac{y}{2}+1\right\}.$

$$I_3 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$

Correction de l'exercice 2.4.2

- Pour I_2 en utilisant les coordonnées polaires. D est une partie du plan comprise entre le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1 et le cercle de centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. D'où

$$I_2 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \frac{r(\cos\theta - \sin\theta)}{r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 2.4.3

1. Par l'utilisation des coordonnées polaires

$$J_n = \int_0^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-n^2}\right), J_{2n} = \int_0^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-4n^2}\right).$$

2.

$$K_n = \int\int_{C_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_0^n \int_0^n e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \left(\int_0^n e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2} dy\right) = (I_n)^2.$$

4.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} J_n &= \lim_{n\to+\infty} J_{2n} = \frac{\pi}{4}. \\ \lim_{n\to+\infty} J_n &\leq \lim_{n\to+\infty} K_n \leq \lim_{n\to+\infty} J_{2n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} K_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5.

$$K_n = (I_n)^2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = I.$$

Correction de l'exercice 2.4.4

1. Pour $I_1 = \int\int_{D_1} (x^2+y^2)\,dxdy$. en utilisant le changement de variavles

$$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\sin v \end{cases} \Rightarrow |J_f| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = abu.$$

$D' = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2, (u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi]\}$. Donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left((au\cos v)^2 + (bu\sin v)^2\right) abududv = \frac{ab}{4}\int_0^{2\pi}\left(a^2(\cos v)^2 + b^2(\sin v)^2\right) dv \\ &= \frac{ab}{4}\left(a^2+b^2\right)\pi. \end{aligned}$$

2.
$$I_2 = \int\int_{D_2}\int \frac{1}{\sqrt{a-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}dxdydz.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad \Rightarrow dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$
$$\tfrac{1}{4} \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} \le r \le 2.$$

Donc
$$D' = \left\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3, \frac{1}{2}\le r\le 2, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi\right\}.$$

et
$$I_2 == \int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{a-(r^2)^{\frac{3}{2}}}} r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = -4\frac{\pi}{3}\left((a-8)^{\frac{1}{2}} - \left(a-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Chargé de Module :
Boufenouche Razika