Nadir Arada

Contrôle optimal de systèmes elliptiques semi-linéaires

Cours de Doctorat (Spécialité Contrôle optimal et calcul des variations)

Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Table des matières

Introduction

Dans ce cours, nous nous intéressons à l'analyse mathématique et numérique de problèmes de contrôle optimal gouvernés par des équations aux dérivées partielles semi-linéaires elliptiques. Trois grands axes sont considérés

1. Existence d'un contrôle optimal
2. Etablissement des conditions d'optimalité du premier et du second ordre
3. Approximation numérique

Les deux premiers points seront abordés au premier chapitre, le dernier point au second chapitre.

Ces notes ont été rédigées dans le cadre du mémoire de Master en Analyse Fonctionnelle de Meriem Denbri et Lamia Khelifouche [8], encadré par mes soins et soutenu en 2018. Ce mémoire se base à son tour sur l'article de Nadir Arada, Eduardo Casas et Fredi Tröltzsch [1].

Chapitre 1

Contrôle optimal d'équations semi-linéaires elliptiques : Analyse mathématique

1.1 Introduction

Dans toute la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) de frontière Γ de classe $C^{1,1}$. L'objectif de ce chapitre est d'étudier un problème de contrôle optimal gouverné par une équation aux dérivées partielles semi-linéaire elliptique donnée par

$$\begin{cases} -\Delta y + f(\cdot, y) = u & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.1}$$

On supposera que f satisfait l'hypothèse suivante :

H1 - f est une fonction de Carathéodory de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \Omega$, $f(x, \cdot)$ est de classe C^1 avec $D_y f(x, \cdot) \geq 0$. Pour tout $M > 0$, il existe $C_M > 0$ tel que

$$|f(x, y)| + |D_y f(x, y)| \leq C_M \quad \forall (x, y) \in \Omega \times [-M, M].$$

Dans (1.1), la fonction u désigne un contrôle et on notera y_u la solution associée à u. Nous énoncerons plus loin les conditions garantissant l'existence, l'unicité et la régularité de solution de (1.1). L'objectif est d'étudier l'existence d'un contrôle optimal et d'établir les conditions d'optimalité pour le problème suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |y_u - y_d|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u|^2 \, dx \\ u \in U_{ad} = \{ u \in L^\infty(\Omega) \mid \alpha \leq u(x) \leq \beta \quad \text{pour p.t. } x \in \Omega \}, \end{cases}$$

où $y_d \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction fixée, $\lambda > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Le plan du chapitre est le suivant : dans la section 1.2, nous étudions l'existence, l'unicité et la régularité des solutions pour une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires. Ces résultats nous seront ultérieurement utiles dans l'analyse de la solvabilité de l'équation d'état, de l'équation adjointe et dans l'établissement des conditions d'optimalité. Se basant sur le théorème de Minty-Browder et utilisant des propriétés de monotonie, de continuité et de coercivité de l'opérateur semi-linéaire associé à l'équation d'état, nous commençons par établir l'existence d'une solution faible correspondante. Utilisant le principe du maximum, nous montrons que la solution est continue et énonçons des résultats de régularité supplémentaires. Dans la section 1.3, nous établissons l'existence d'un contrôle optimal. Les conditions d'optimalité sont alors abordées dans la section 1.4. Nous commençons par établir certaines estimations utiles et par étudier la différentiabilité de l'application associant l'état au contrôle et celle de la fonctionnelle coût. Des conditions nécessaires d'optimalité du premier et du second ordre sont alors établies et des conditions suffisantes d'optimalité énoncées.

1.2 Solvabilité de l'équation d'état

1.2.1 Equations linéaires

Dans cette section, nous étudions la solvabilité (existence, unicité et régularité de solution) d'une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques.

Proposition 1.2.1. *Soit $g \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^2(\Omega)$ avec $b \geq 0$. Alors l'équation*

$$\begin{cases} -\Delta z + bz = g & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.2}$$

admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite

$$|z|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_P \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

où C_P est la constante de Poincaré.

Démonstration. La formulation variationnelle associée est de la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } z \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(z,\phi) = F(\phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1.3}$$

où a est la forme bilinéaire définie par

$$a(z,\phi) = (\nabla z, \nabla \phi) + (bz, \phi) \qquad \forall z, \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{1.4}$$

et où F est la forme linéaire définie par

$$F(\phi) = (g,\phi) \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Vérifions que a est coercive dans $H_0^1(\Omega)$. Prenant en compte le fait que $b \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} a(\phi,\phi) &= (\nabla\phi, \nabla\phi) + (b\phi,\phi) = \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + (b\phi,\phi) \\ &= |\phi|^2_{H_0^1(\Omega)} + (b\phi,\phi) \\ &\geq |\phi|^2_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Prouvons à présent que a est continue dans $H_0^1(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'injection de Sobolev

$$\|\phi\|_{L^4(\Omega)} \leq C_S |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

il vient que

$$\begin{aligned} |a(w,\phi)| &= |(\nabla w, \nabla\phi) + (bw,\phi)| \\ &\leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{L^2(\Omega)} \|w\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|b\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)} \|\phi\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq (1 + C_S^2 \|b\|_{L^2(\Omega)}) |w|_{H_0^1(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall w,\phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Poincaré et des arguments classiques, on obtient

$$|F(\phi)| = |(g, \phi)| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|g\|_{L^2(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

montrant ainsi la continuité de F. Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, nous déduisons que l'équation (1.2) admet une solution faible unique $z \in H_0^1(\Omega)$.

Pour obtenir l'estimation a priori correspondante, posons $\phi = z$ dans la formulation (1.3) et utilisant la coercivité de a et la continuité de F, nous obtenons

$$|z|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a(z, z) = F(z) \leq C_P \|g\|_{L^2(\Omega)} |z|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc

$$|z|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_P \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci termine la démonstration. □

Comme nous le verrons dans la proposition 1.2.3 ci-après, la solution faible de (1.2) est plus régulière que $H_0^1(\Omega)$. Ce résultat est une conséquence des résultats classiques énoncés dans le lemme suivant.

Lemme 1.2.2. *Soit $g \in L^q(\Omega)$ avec $2 \leq q < +\infty$. Alors l'équation*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = g & \textit{dans } \Omega, \\ \phi = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.5}$$

admet une solution unique $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega)$. De plus, on a les estimations suivantes

$$|\phi|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \|\phi\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^q(\Omega)},$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de g.

Démonstration. Voir [13] et [9]. □

Proposition 1.2.3. *Soient $g \in L^q(\Omega)$ et $b \in L^q(\Omega)$ avec $2 \leq q < +\infty$ et $b \geq 0$. Alors la solution du problème* (1.2) *appartient à $W^{2,q}(\Omega)$. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|z\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_1 \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|z\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C_2 \left(1 + \|b\|_{L^q(\Omega)}\right) \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives indépendantes de b et de g.

Démonstration. Nous divisons la démonstration en trois parties. Dans les deux premières, nous montrons que la solution appartient à $L^\infty(\Omega)$ et établissons l'estimation correspondante. Nous déduisons alors le résultat de régularité (et l'estimation correspondante) dans la dernière partie.

Partie 1. Supposons dans un premier temps que $g \geq 0$. Prenant alors en compte le

signe de b et appliquant le principe du maximum (cf. [13]), il vient que la solution de l'équation (1.2) satisfait
$$z \geq 0.$$
Soit alors ϕ la solution de (1.5) et posons $w = \phi - z$. Il est facile de voir que $w = \phi - z$ est la solution de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta w = bz & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Appliquant encore une fois le principe du maximum, il vient que $w \geq 0$, i.e.

$$z \leq \phi.$$

Combinant les deux résultats, nous déduisons que

$$0 \leq z \leq \phi,$$

et donc
$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$
De l'autre côté, grâce au lemme $1.2.2$, nous savons que $\phi \in H^2(\Omega)$ et que

$$\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Rappelant l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$, nous déduisons finalement que

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|\phi\|_{H^2(\Omega))} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante positive indépendante de b et de g.

Partie 2. Considérons maintenant le cas général. Soit g^+ et g^- les parties positives et négatives de g de sorte que $g = g^+ - g^-$. Notons z_1 et z_2 les solutions de l'équation (1.2) correspondant à g^+ et g^-, respectivement, i.e.

$$\begin{cases} -\Delta z_1 + bz_1 = g^+ & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta z_2 + bz_2 = g^- & \text{dans } \Omega, \\ z_1 = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ z_2 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

D'après la partie 1, on a
$$\|z_1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|g^+\|_{L^2(\Omega)},$$
et donc
$$-C\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq -C\|g^+\|_{L^2(\Omega)} \leq z_1 \leq C\|g^+\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$
De la même façon, on trouve que

$$-C\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq -C\|g^-\|_{L^2(\Omega)} \leq z_2 \leq C\|g^-\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Observant que $z = z_1 - z_2$, il vient que

$$-C\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq z = z_1 - z_2 \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

et par conséquent

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

où C_1 est une constante positive indépendante de b et de g.

Partie 3. Soit z la solution de l'équation (1.2). Alors z est la solution du problème (1.5) correspondant à $-bz + g \in L^q(\Omega)$. D'après le lemme 1.2.2, z appartient à $W^{2,q}(\Omega)$ (ce qui, grâce à l'injection de Sobolev, implique que z appartient à $C(\overline{\Omega})$). De plus

$$\begin{aligned}
\|z\|_{W^{2,q}(\Omega)} &\leq C\left(\|bz\|_{L^q(\Omega)} + \|g\|_{L^q(\Omega)}\right) \\
&\leq C\left(\|b\|_{L^q(\Omega)}\|z\|_{C(\overline{\Omega})} + \|g\|_{L^q(\Omega)}\right) \\
&\leq C\left(C_1\|b\|_{L^q(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^q(\Omega)}\right) \\
&\leq C_2\left(1 + \|b\|_{L^q(\Omega)}\right)\|g\|_{L^q(\Omega)},
\end{aligned}$$

où C et C_2 sont des constantes positives indépendantes de b et de g. □

1.2.2 Equation d'état

L'analyse du problème de contrôle optimal nécessite une étude approfondie de la solvabilité de l'équation d'état (1.1). Des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution faible correspondante feront l'objet de cette section.

L'existence d'une solution $y_u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de l'équation d'état peut-être prouvée comme suit :

• Nous commençons par tronquer f en considérant, pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_k(\cdot, z) = \begin{cases} f(\cdot, k) + D_y f(\cdot, k)(z - k) & \text{si } z > k, \\ f(\cdot, z) & \text{si } |z| \leq k, \\ f(\cdot, -k) + D_y f(\cdot, -k)(z + k) & \text{si } z < -k. \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^1 par rapport à la seconde variable et sa dérivée satisfait

$$D_y f_k(x, \cdot) \geq 0 \qquad \text{p.t. } x \in \Omega, \tag{1.6}$$

et

$$\|D_y f_k(x, \cdot)\|_{C(\mathbb{R})} = \|D_y f_k(x, \cdot)\|_{C([-k,k])} \leq C_k \qquad \text{p.t. } x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Ce sont ces propriétés qui nous permettront de prouver que l'opérateur

$$-\Delta + f_k(\cdot) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

est monotone, continu et coercif et qu'il existe donc une solution unique $y_k \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta y + f_k(x,y) = u & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.8}$$

• En utilisant des arguments classiques, nous prouvons ensuite que $(y_k)_k$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et que, pour k suffisamment grand, on a

$$f_k(\cdot, y_k) = f(\cdot, y_k).$$

Par conséquent $y_k \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est solution de l'équation d'état (1.1). Commençons par énoncer le théorème de Minty-Browder.

Théorème 1.2.4. *Soit E un espace de Banach reflexif et soit $\mathcal{A}$ une application non linéaire et continue de E dans E'. Supposons que*

$$\langle \mathcal{A}(z_1) - \mathcal{A}(z_2), z_1 - z_2 \rangle_{E',E} > 0 \qquad \text{pour tout } z_1, z_2 \in E \text{ avec } z_1 \neq z_2,$$

et

$$\lim_{\|z\|_E \to +\infty} \frac{\langle \mathcal{A}(z), z\rangle_{E',E}}{\|z\|_E} = +\infty.$$

Alors pour tout $L \in E'$, l'équation $\mathcal{A}z = L$ admet une solution unique $z \in E$.

Dans la proposition suivante, nous établissons l'existence d'une solution faible au problème "tronqué" (1.8).

Proposition 1.2.5. *Si $H1$ est satisfaite et si $u \in L^2(\Omega)$, alors le problème (1.8) admet une solution unique $y_k \in H_0^1(\Omega)$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$|y_k|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_P \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

où C_P est la constante de Poincaré.

Démonstration. Considérons les applications $\mathcal{A}$ et L définies par

$$\langle \mathcal{A}(z), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = (\nabla z, \nabla \phi) + (f_k(\cdot,z) - f_k(\cdot,0), \phi),$$

et

$$\langle L, \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = (u - f_k(\cdot,0), \phi).$$

La formulation faible associée au problème (1.8) est équivalente à

$$\begin{cases} \text{Trouver } y \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \langle \mathcal{A}(y), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle L, \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.9}$$

L'idée est d'utiliser le théorème 1.2.4 pour montrer que (1.9) admet une solution faible unique.

Commençons par remarquer que pour tout $z_1, z_2, \phi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(z_1) - \mathcal{A}(z_2), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1} &= \left(\nabla\left(z_1 - z_2\right), \nabla\phi\right) + \left(f_k\left(\cdot, z_1\right) - f_k\left(\cdot, z_2\right), \phi\right) \\ &= \left(\nabla\left(z_1 - z_2\right), \nabla\phi\right) + \left(b_k(\cdot, z_1, z_2)\left(z_1 - z_2\right), \phi\right), \end{aligned} \tag{1.10}$$

où $b_k(\cdot, z_1, z_2) = \displaystyle\int_0^1 D_y f_k(\cdot, \theta z_1 + (1-\theta) z_2)\, d\theta$.

• Pour montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, considérons une suite $(z_n)_n$ convergeant vers z dans $H_0^1(\Omega)$. Prenant en compte (1.7), utilisant (1.10) et l'inégalité de Sobolev, il vient que

$$\begin{aligned} \left|\langle \mathcal{A}(z) - \mathcal{A}(z_n), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1}\right| &= \left|\left(\nabla\left(z_n - z\right), \nabla\phi\right) + \left(b_k(\cdot, z_n, z)\left(z_n - z\right), \phi\right)\right| \\ &\leq |z_n - z|_{H_0^1(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \|b_k(\cdot, z_n, z)\|_{L^\infty(\Omega)} \|z_n - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |z_n - z|_{H_0^1(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)} + C_k \|z_n - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + C_P^2 C_k\right) |z_n - z|_{H_0^1(\Omega)} |\phi|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où C_P est la constante de Poincaré. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(z) - \mathcal{A}(z_n)\|_{H^{-1}} &= \sup_{|\phi|_{H_0^1} \leq 1} \left|\langle \mathcal{A}(z) - \mathcal{A}(z_n), \phi \rangle_{H^{-1},H_0^1}\right| \\ &\leq (1 + C_k) |z_n - z|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

• Prouvons à présent la monotonie de $\mathcal{A}$. Posant $\phi = z_1 - z_2$ dans (1.10) et prenant en compte (1.6), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(z_1) - \mathcal{A}(z_2), z_1 - z_2 \rangle_{H^{-1},H_0^1} &= |z_1 - z_2|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \underbrace{\int_\Omega b_k(\cdot, z_1, z_2)\left(z_1 - z_2\right)^2 dx}_{\geq 0} \\ &\geq |z_1 - z_2|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &> 0 \qquad \text{si } z_1 \neq z_2. \end{aligned}$$

• De même, choisissant $z_1 = z$ et $z_2 = 0$ et remarquant que $\mathcal{A}(0) = 0$, il vient que

$$\frac{\langle \mathcal{A}(z), z \rangle_{H^{-1},H_0^1}}{|z|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \frac{|z|_{H_0^1(\Omega)}^2}{|z|_{H_0^1(\Omega)}} = |z|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc

$$\lim_{|z|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty} \frac{\langle \mathcal{A}(z), z \rangle_{H^{-1},H_0^1}}{|z|_{H_0^1(\Omega)}} = +\infty$$

montrant ainsi la coercivité de $\mathcal{A}$.

• Finalement, utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\langle L, \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1}\right| &= |(u - f_k(\cdot,0),\phi)| = |(u - f(\cdot,0),\phi)| \\ &\le \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C_P\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\right)|\phi|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Les conditions d'application du théoréme de Minty-Browder étant satisfaites, nous déduisons que le problème (1.9) admet une solution unique y_k. De plus, posant $\phi = y_k$ dans (1.9) et utilisant des arguments similaires, on obtient

$$\begin{aligned}|y_k|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \langle \mathcal{A}(y_k), y_k\rangle_{H^{-1},H_0^1} &= \langle L, y_k\rangle_{H^{-1},H_0^1} \\ &\le C_P\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\right)|y_k|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$|y_k|_{H_0^1(\Omega)} \le C_P\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

et termine la preuve. □

Nous allons prouver à présent que la solution faible de l'équation (1.8) est continue sur $\overline{\Omega}$.

Proposition 1.2.6. *Si $H1$ est satisfaite et si $u \in L^2(\Omega)$, alors la solution de (1.8) appartient à $C(\overline{\Omega})$. De plus*

$$\|y_k\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_1\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

où C_1 est la constante donnée dans la proposition $1.2.3$.

Démonstration. Nous savons déjà que le problème (1.8) admet une solution unique $y_k \in H_0^1(\Omega)$ (voir proposition 1.2.5). Cette solution satisfait

$$\begin{cases} -\Delta z + b_k z = u - f(\cdot,0) & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $b_k(x) = \displaystyle\int_0^1 D_y f(x,\theta y_k(x))\,d\theta$. Grâce à la proposition 1.2.3, $y_k \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ et satisfait

$$\|y_k\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_1\|u - f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

où $C_1 > 0$ est indépendante de k, de f et de u. □

Finalement, nous sommes en mesure de montrer l'existence d'une solution de l'équation d'état dans $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega)$. Plus précisemment, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.2.7. *Si $H1$ est satisfaite et si $u \in L^q(\Omega)$ $(2 \leq q < +\infty)$ avec $\|u\|_q \leq M$, alors l'équation (1.1) admet une solution unique $y_u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega)$. Cette solution satisfait les estimations suivantes*

$$|y_u|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

$$\|y_u\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C_M,$$

où C et C_M sont des constantes indépendantes de f et de u.

Démonstration. Soit k tel que

$$k > C_1 \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

où C_1 est la constante dans la proposition 1.2.6. Soit $y_k \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ la solution de (1.8). Grâce à la proposition 1.2.6, on a

$$\|y_k\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_1 \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \right) < k$$

et donc

$$f_k(\cdot, y_k) = f(\cdot, y_k).$$

Autrement dit, y_k est aussi solution de (1.1). Reste à prouver l'unicité de la solution dans $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Supposons que y_1 et y_2 sont deux solutions de (1.1). Utilisant des arguments classiques, nous pouvons facilement voir que $z = y_1 - y_2$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta z + \tilde{b} z = 0 & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.11}$$

où $\tilde{b} = \displaystyle\int_0^1 D_y f(\cdot, \theta y_1 + (1-\theta) y_2, u) d\theta \geq 0$. Une fois que $\tilde{b} \in L^2(\Omega)$, d'après la proposition $1.2.1$, nous déduisons que le problème (1.11) admet une solution unique et que

$$\|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \, |z|_{H_0^1(\Omega)} \leq 0$$

impliquant que $z = 0$, i.e. $y_1 = y_2$ p.p.

L'estimation dans $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ suit directement de celle de y_k. L'estimation dans $W^{2,q}(\Omega)$ peut-être déduite en remarquant que y_u satisfait

$$\begin{cases} -\Delta y + b y = u - f(\cdot, 0) & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $b = \displaystyle\int_0^1 D_y f(\theta y_u) \, d\theta$ et en appliquant l'estimation dans la proposition 1.2.3. $\square$

Finalement, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 1.2.8. *Si $H1$ est satisfaite et si $u \in L^\infty(\Omega)$ est tel que $\|u\|_{L^\infty} \leq M$, alors l'équation (1.1) admet une solution unique $y_u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, pour tout $2 \leq p < +\infty$. Cette solution satisfait les estimations suivantes*

$$|y_u|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|f(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

$$\|y_u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_M,$$

où C et C_M sont des constantes indépendantes de f et de u.

Remarque 1.2.9. *Une conséquence directe du Corollaire $1.2.8$ est que $y_u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. En effet, en choisissant $p > n$, on a $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega})$.*

1.3 Existence de contrôle optimal

Le but de cette section est d'établir l'existence d'un contrôle optimal. Nous commencerons par un résultat de continuité sequentielle de l'application $u \mapsto y_u$.

Proposition 1.3.1. *Soit $(u_k)_k$ une suite uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)$ convergeant vers u pour la topology faible de $L^2(\Omega)$, et soient y_{u_k} et y_u les solutions de (1.1) correspondant à u_k et u, respectivement. Alors*

$$y_{u_k} \xrightarrow{k \to +\infty} y_u \qquad \textit{dans } H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Démonstration. Supposons que $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$. Grâce au théorème 1.2.7 et à la remarque 1.2.9, on a

$$|y_{u_k}|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_{u_k}\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} \leq C_M,$$

ce qui implique que la suite $(y_{u_k})_k$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Il existe alors une sous-suite, encore indexée par k, et $y \in H_0^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ tel que

$$y_{u_k} \longrightarrow y \qquad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

De plus, l'injection de $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ dans $C(\overline{\Omega})$ étant compacte, il vient que

$$y_{u_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} y \qquad \text{fortement dans } C(\overline{\Omega}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, y_{u_k}) - f(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \tilde{b}_k \left(y_{u_k} - y\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \tilde{b}_k \right\|_{L^2(\Omega)} \|y_{u_k} - y\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \widetilde{C}_M \|y_{u_k} - y\|_{L^\infty(\Omega)} \underset{\to +\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

où $\tilde{b}_k = \int_0^1 D_y f(\cdot, \theta y_k + (1-\theta)y)\, d\theta$. Prenant en compte ces résultats de convergence et passant à la limite dans la formulation faible correspondante à y_{u_k}

$$(\nabla y_{u_k}, \nabla\phi) + (f(\cdot, y_{u_k}), \phi) = (u_k, \phi) \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega),$$

nous obtenons

$$(\nabla y, \nabla\phi) + (f(\cdot, y), \phi) = (u, \phi) \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit, $y \equiv y_u$. Nous avons donc prouvé que $(y_k)_k$ converge vers y_u fortement dans $C(\overline{\Omega})$ et faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. Pour montrer que la convergence est forte dans $H_0^1(\Omega)$, remarquons que $y_k - y_u$ satisfait

$$(\nabla(y_{u_k} - y_u), \nabla\phi) + (f(\cdot, y_{u_k}) - f(\cdot, y_u), \phi) = (u_k - u, \phi) \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega).$$

Choisissant $\phi = y_{u_k} - y_u$ et utilisant la coercivité de a, la monotonie de f par rapport à la seconde variable, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |y_{u_k} - y_u|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq |y_{u_k} - y_u|^2_{H_0^1(\Omega)} + \underbrace{(f(\cdot, y_{u_k}) - f(\cdot, y_u), y_{u_k} - y_u)}_{\geq 0} \\ &= (u_k - u, y_{u_k} - y_u) \leq \left(\|u_k\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)\|y_{u_k} - y_u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Le résultat suit en remarquant que (u_k) est bornée et que $(y_{u_k})_k$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$. □

Théorème 1.3.2. *Le problème (P) admet au moins une solution $\bar{u}$.*

Démonstration. Soit $(u_k)_k \subset U_{ad}$ une suite minimisante de (P). Elle est uniformément bornée dans U_{ad} et il existe alors une sous-suite, encore indexée par k, et $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ tel que

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{u} \qquad \text{faiblement dans } L^2(\Omega).$$

De plus, U_{ad} étant un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega)$ est faiblement fermé et donc $\bar{u} \in U_{ad}$. Utilisant la semi-continuité inférieure de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, on déduit que,

$$\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Prenant alors en compte la proposition 1.2.1, nous déduisons que $(y_{u_k})_k$ converge fortement vers $y_{\bar{u}}$ dans $C(\overline{\Omega})$ et, par conséquent

$$\lim_{k\to+\infty} \|y_{u_k} - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} = \|y_{\bar{u}} - y_d\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Combinant ces résultats de convergence, et prenant en compte la définition de J, nous déduisons que

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{k\to+\infty} J(u_k) = \inf(P).$$

Autrement dit, $\bar{u} \in U_{ad}$ est un contrôle optimal. □

1.4 Conditions d'optimalité

Dans cette section, nous allons étudier les conditions d'optimalité du premier et du second ordre.

1.4.1 Différentiabilité de l'application associant l'état à la variable contrôle

Une étape fondamentale lors de l'établissement des conditions d'optimalité est l'étude des propriétés topologiques de l'application $u \mapsto y_u$. La continuité lipschitzienne de cette application sera le premier aspect que l'on considère.

Proposition 1.4.1. *Soient $u, v \in L^2(\Omega)$ et soient y_u et y_v les solutions de* (1.1) *correspondantes à u et v, respectivement. Alors*

$$|y_u - y_v|_{H_0^1(\Omega)} + \|y_u - y_v\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|u - v\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.12}$$

où C est une constante positive indépendante de u et de v.

Démonstration. Des arguments identiques à ceux utilisés dans la section précédente montrent que $y = y_u - y_v$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta y + f(\cdot, y_u) - f(\cdot, y_v) = u - v & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta y + \tilde{b} y = u - v & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.13}$$

où $\tilde{b} = \displaystyle\int_0^1 D_y f(\cdot, \theta y_u + (1-\theta) y_v) d\theta$. D'après la proposition $1.2.1$ et la proposition $1.2.3$, nous déduisons que

$$|y|_{H_0^1(\Omega)} + \|y\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|u - v\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui donne l'estimation. □

Le résultat auxiliaire suivant sera utile pour la suite.

Proposition 1.4.2. *Soient $v \in L^2(\Omega)$, $b_1, b_2 \in L^2(\Omega)$ tels que $b_1 \geq 0$ et $b_2 \geq 0$. Soient z_1 et z_2 des solutions de l'équation* (1.2) *correspondant à (b_1, v) et (b_2, v), respectivement. Alors on a l'estimation suivante*

$$|z_1 - z_2|_{H_0^1(\Omega)} + \|z_1 - z_2\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \, \|b_2 - b_1\|_{L^2(\Omega)} \, \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante positive indépendante de b_1, b_2 et de v.

Démonstration. Il est facile de vérifier que $z_1 - z_2$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta(z_1 - z_2) + b_2(z_1 - z_2) = (b_2 - b_1)z_1 & \text{dans } \Omega, \\ z_1 - z_2 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Grâce aux propositions $1.2.1$ et $1.2.3$, on obtient

$$\begin{aligned} \|z_1 - z_2\|_{H_0^1(\Omega)} + \|z_1 - z_2\|_{C(\overline{\Omega})} &\leq C_2 \|(b_2 - b_1)z_1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_2 \|b_2 - b_1\|_{L^2(\Omega)} \|z_1\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\leq C \|b_2 - b_1\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donnant l'estimation recherchée. □

Le deuxième aspect concerne la différentiabilité au sens de Gâteaux de l'application $u \mapsto y_u$.

Proposition 1.4.3. *Soient $u, v \in L^2(\Omega)$ et $\rho \in]0, 1[$. Alors*

$$y_{u+\rho v} = y_u + \rho z_{uv} + r_\rho \qquad \textit{avec } \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\|r_\rho\|_{H_0^1(\Omega)}}{\rho} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\|r_\rho\|_{C(\overline{\Omega})}}{\rho} = 0$$

où z_{uv} est la solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} -\Delta z + D_y f(\cdot, y_u) z = v & \textit{dans } \Omega, \\ z = 0 & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.14}$$

Démonstration. Posons $u_\rho = u + \rho v$. De simples calculs montrent que $z_\rho = \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho}$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta z_\rho + b_\rho \, z_\rho = v & \text{dans } \Omega, \\ z_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $b_\rho = \displaystyle\int_0^1 D_y f(\cdot, \theta y_u + (1-\theta) y_{u_\rho}) d\theta$. Grâce à la proposition $1.4.2$, il vient que

$$|z_\rho - z_{uv}|_{H_0^1(\Omega)} + \|z_\rho - z_{uv}\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \|b_\rho - b\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.15}$$

où $b = D_y f(\cdot, y_u)$. D'autre part, d'après la proposition 1.4.1, on a

$$\left|y_{u_\rho} - y_u\right|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|y_{u_\rho} - y_u\right\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \rho \|v\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \rho \to 0.$$

Prenant alors en compte l'hypothèse sur $D_y f$, nous déduisons que $(b_\rho)_\rho$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$ et, appliquant le théorème de convergence dominée, il vient que

$$\lim_{\rho \to 0^+} \|b_\rho - b\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{1.16}$$

La conclusion suit en combinant (1.15) et (1.16). □

1.4.2 Différentiabilité de la fonctionnelle coût par rapport à la variable contrôle

Une conséquence directe de ces résultats est liée à la différentiabilité du coût J par rapport à la variable contrôle.

Proposition 1.4.4. *Si $H1$ est satisfaite et si $u \in L^2(\Omega)$, alors*

$$J'(u)v = (p_u + \lambda u, v) \qquad \forall v \in L^2(\Omega),$$

où $p_u \in H_0^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ est la solution de l'équation adjointe

$$\begin{cases} -\Delta p_u + D_y f(\cdot, y_u) p_u = y_u - y_d & \textit{dans } \Omega, \\ p_u = 0 & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.17}$$

Démonstration. Soit $v \in L^2(\Omega)$ et posons $u_\rho = u + \rho v$. De simples calculs montrent que

$$\begin{aligned}
&J(u_\rho) - J(u) \\
&= \tfrac{1}{2}\|y_{u_\rho} - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{2}\|u_\rho\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{2}\|y_u - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \tfrac{1}{2}\|y_{u_\rho} - y_u + y_u - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{2}\|u_\rho - u + u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&-\tfrac{1}{2}\|y_{u_\rho} - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \tfrac{1}{2}\|y_{u_\rho} - y_u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\|y_u - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + (y_{u_\rho} - y_u, y_u - y_d) \\
&+\tfrac{\lambda}{2}\|u_\rho - u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(u, u_\rho - u) - \tfrac{1}{2}\|y_u - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \tfrac{1}{2}\|y_{u_\rho} - y_u\|^2_{L^2(\Omega)} + (y_{u_\rho} - y_u, y_u - y_d) + \tfrac{\lambda}{2}\|u_\rho - u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(u, u_\rho - u) \\
&= \tfrac{1}{2}\|y_{u_\rho} - y_u\|^2_{L^2(\Omega)} + (y_{u_\rho} - y_u, y_u - y_d) + \tfrac{\lambda}{2}\|\rho v\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(u, \rho v),
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{J(u_\rho) - J(u)}{\rho} &= \tfrac{1}{2\rho}\|y_{u_\rho} - y_u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{\rho}(y_{u_\rho} - y_u, y_u - y_d) \\
&\quad + \tfrac{\lambda}{2}\rho\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(u, v) \\
&= \tfrac{\rho}{2}\|z_\rho\|^2_{L^2(\Omega)} + (z_\rho, y_u - y_d) + \tfrac{\lambda}{2}\rho\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(u, v),
\end{aligned}$$

où $z_\rho = \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho}$. D'après la proposition $1.4.3$, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
J'(u)v &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{J(u_\rho) - J(u)}{\rho} \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} \left(\tfrac{\rho}{2}\|z_\rho\|^2_{L^2(\Omega)} + (z_\rho, y_u - y_d) + \tfrac{\lambda}{2}\rho\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(u, v) \right) \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} (z_\rho, y_u - y_d) + \lambda(u, v) \\
&= (z_{uv}, y_u - y_d) + \lambda(u, v),
\end{aligned}$$

où z_{uv} est la solution de (1.14). Considérons alors l'équation adjointe (1.17). Grâce aux propositions 1.2.1 et 1.2.3, cette équation admet une solution unique $p_u \in H_0^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Choisissant z_{uv} comme fonction-test dans la formulation faible correspondant à p_u, il vient que

$$(\nabla p_u, \nabla z_{uv}) + (D_y f(\cdot, y_u)\, p_u, z_{uv}) = (y_u - y_d, z_{uv}). \tag{1.18}$$

De l'autre côté, choisissant p_u comme fonction-test dans la formulation faible correspondant à z_{uv}, nous obtenons

$$(\nabla z_{uv}, \nabla p_u) + (D_y f(\cdot, y_u)\, z_{uv}, p_u) = (v, p_u). \tag{1.19}$$

Combinant (1.18) et (1.19), on a

$$(y_u - y_d, z_{uv}) = (v, p_u), \tag{1.20}$$

et donc

$$J'(u)v = (p_u + \lambda u, v) \qquad \forall v \in U_{ad}.$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Proposition 1.4.5. *Soit $u \in L^2(\Omega)$ et supposons que l'hypothèse $H1$ est satisfaite. Supposons aussi que :*

$H2$ - f est de classe C^2 par rapport à y et que pour tout $M > 0$, il existe $C_M > 0$ tel que

$$|D_{yy} f(x, y)| \leq C_M \qquad \forall (x, y) \in \Omega \times [-M, M].$$

Alors

$$J\text{''}(u)vw = -\left(p_u, D_{yy} f(y_u) z_{uw} z_{uv}\right) + (z_{uw}, z_{uv}) + \lambda(w, v),$$

où p_u est la solution de (1.17) et où z_{uw} et z_{uv} sont les solutions de (1.14) correspondant à (u, w) et (u, v), respectivement.

Démonstration. Soient $v, w \in L^2(\Omega)$ et posons $u_\rho = u + \rho w$. Grâce à la proposition 1.4.4 et à (1.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{J'(u_\rho)v - J'(u)v}{\rho} &= \frac{\big(p_{u_\rho} + \lambda u_\rho, v\big) - (p_u + \lambda u, v)}{\rho} \\
&= (\lambda w, v) + \frac{(p_{u_\rho}, v) - (p_u, v)}{\rho} \\
&= (\lambda w, v) + \frac{(z_{u_\rho v}, y_{u_\rho} - y_d) - (z_{uv}, y_u - y_d)}{\rho} \\
&= (\lambda w, v) + \left(\frac{z_{u_\rho v} - z_{uv}}{\rho}, y_{u_\rho} - y_d\right) + \left(z_{uv}, \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho}\right),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

où $z_{u_\rho v}$ et z_{uv} sont les solutions des systèmes linéaires

$$\begin{cases} -\Delta z_{u_\rho v} + D_y f(\cdot, y_{u_\rho})\, z_{u_\rho v} = v & \text{dans } \Omega, \\ z_{u_\rho v} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta z_{uv} + D_y f(\cdot, y_u)\, z_{uv} = v & \text{dans } \Omega, \\ z_{uv} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Combinant ces deux équations, et utilisant des arguments classiques, nous pouvons facilement montrer que $X_\rho = \frac{z_{u_\rho v} - z_{uv}}{\rho}$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta X_\rho + D_y f(\cdot, y_u)\, X_\rho = \frac{D_y f(\cdot, y_u) - D_y f(\cdot, y_{u_\rho})}{\rho}\, z_{u_\rho v} & \text{dans } \Omega, \\ X_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Considérons maintenant le système

$$\begin{cases} -\Delta X + D_y f(\cdot, y_u) X = -D_{yy} f(\cdot, y_u) z_{uw} z_{uv} & \text{dans } \Omega, \\ X = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Une fois que $D_{yy} f(\cdot, y_u) z_{uw} z_{uv} \in L^\infty(\Omega)$, il vient que ce problème admet une solution unique $X \in H_0^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$. D'après la proposition 1.4.2, on a

$$|X_\rho - X|_{H_0^1(\Omega)} + \|X_\rho - X\|_{C(\overline{\Omega})}$$

$$\leq C \left\| \frac{D_y f(\cdot, y_{u_\rho}) - D_y f(\cdot, y_u)}{\rho}\, z_{u_\rho v} - D_{yy} f(\cdot, y_u) z_{uw} z_{uv} \right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.22}$$

Remarquons alors que

$$\frac{D_y f(\cdot, y_{u_\rho}) - D_y f(\cdot, y_u)}{\rho}\, z_{u_\rho v} - D_{yy} f(\cdot, y_u) z_{uw} z_{uv} = g_\rho\, \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} z_{u_\rho v} - g\, z_{uw} z_{uv}$$
$$= (g_\rho - g)\, \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} z_{u_\rho v} + g \left(\frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} - z_{uw} \right) z_{u_\rho v} + g z_{uw} \left(z_{u_\rho v} - z_{uv} \right),$$

où $g_\rho = \displaystyle\int_0^1 D_{yy} f(\cdot, \theta y_u + (1-\theta) y_{u_\rho})\, d\theta$ et $g = D_{yy} f(\cdot, y_u)$. Par conséquent

$$\left\| \frac{D_y f(\cdot, y_{u_\rho}) - D_y f(\cdot, y_u)}{\rho}\, z_{u_\rho v} - D_{yy} f(\cdot, y_u) z_{uw} z_{uv} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|g_\rho - g\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \left\| z_{u_\rho v} \right\|_{C(\overline{\Omega})}$$

$$+ \|g\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} - z_{uw} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \left\| z_{u_\rho v} \right\|_{C(\overline{\Omega})} + \|z_{uw}\|_{C(\overline{\Omega})} \left\| z_{u_\rho v} - z_{uv} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \right).$$

Grâce à la proposition 1.4.1, la proposition 1.2.3 et à (1.15), on a

$$\left\| \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \|u_\rho - u\|_{L^2(\Omega)} = C \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\left\| z_{u_\rho v} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

et

$$\left\| \frac{y_{u_\rho} - y_u}{\rho} - z_{uw} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \left\| b_\rho - b \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)},$$

où $b_\rho = \displaystyle\int_0^1 D_y f(\cdot, \theta y_{\bar{u}} + (1-\theta) y_{u_\rho}) d\theta$ et $b = D_y f(\cdot, y_u)$. De plus, grâce à la proposition 1.4.2, on a

$$\begin{aligned} \left\| z_{u_\rho v} - z_{uv} \right\|_{C(\overline{\Omega})} &\leq C \left\| c_\rho - b \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| z_{uv} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\leq C \left\| c_\rho - b \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

où $c_\rho = D_y f(\cdot, y_{u_\rho})$. Combinant toutes ces estimations, nous obtenons

$$\left\| \frac{D_y f(\cdot, y_{u_\rho}) - D_y f(\cdot, y_u)}{\rho} z_{u_\rho v} - D_{yy} f(\cdot, y_u) z_{uw} z_{uv} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C \left(\left\| g_\rho - g \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| g \right\|_{L^2(\Omega)} \left(\left\| b_\rho - b \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| c_\rho - b \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \right) \left\| v \right\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad (1.23)$$

Prenant alors en compte les hypothèses sur $D_y f$ et $D_{yy} f$, nous déduisons que les suites $(g_\rho)_\rho$, $(b_\rho)_\rho$ et $(c_\rho)_\rho$ sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$ et, appliquant le théorème de convergence dominée, il vient que

$$\lim_{\rho \to 0^+} \left\| g_\rho - g \right\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{\rho \to 0^+} \left\| b_\rho - b \right\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{\rho \to 0^+} \left\| c_\rho - b \right\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (1.24)$$

Combinant (1.22), (1.23) et (1.24), nous déduisons que

$$\lim_{\rho \to 0+} \left(|X_\rho - X|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| X_\rho - X \right\|_{C(\overline{\Omega})} \right) = 0$$

et passant à la limite dans (1.21), nous obtenons

$$\begin{aligned} J\text{"}(u)vw = \lim_{\rho \to 0^+} & \frac{J'(u_\rho)v - J'(u)v}{\rho} \\ &= \lambda(w, v) + (X, y_u - y_d) + (z_{uw}, z_{uv}) \\ &= -(p_u, D_{yy} f(y_u) z_{uw} z_{uv}) + (z_{uw}, z_{uv}) + \lambda(w, v). \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. □

1.4.3 Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre

Nous sommes en mesure d'établir les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre.

Théorème 1.4.6. *Si $H1$ est satisfaite et si $\bar{u} \in U_{ad}$ est un contrôle optimal de (P), alors il existe $y_{\bar{u}}, p_{\bar{u}} \in H_0^1(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ satisfaisant*

Equation d'état

$$\begin{cases} -\Delta y_{\bar{u}} + f(\cdot, y_{\bar{u}}) = \bar{u} & \textit{dans } \Omega, \\ y_{\bar{u}} = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Equation adjointe

$$\begin{cases} -\Delta p_{\bar{u}} + D_y f(\cdot, y_{\bar{u}}) p_{\bar{u}} = y_{\bar{u}} - y_d & \textit{dans } \Omega, \\ p_{\bar{u}} = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Condition d'optimalité pour le contrôle

$$(\lambda \bar{u} + p_{\bar{u}}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Démonstration. Par définition, nous avons

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

Soit $u \in U_{ad}$ et considérons la perturbation convexe $u_\rho = \bar{u} + \rho(u - \bar{u})$, $\rho \in]0, 1[$. Il est clair que $u_\rho \in U_{ad}$ et donc

$$\frac{J(u_\rho) - J(\bar{u})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

Par passage à la limite, nous obtenons

$$J'(\bar{u})(u - \bar{u}) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{J(u_\rho) - J(\bar{u})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad},$$

et la conclusion est alors une conséquence directe de la proposition 1.4.4. □

Remarquons que tous les résultats obtenus jusqu'à présent restent valables dans le cadre général où U_{ad} est un convexe borné fermé de $L^2(\Omega)$. L'objet du résultat suivant est de montrer que dans le cas particulier de l'ensemble des contrôles admissibles que l'on considère, le contrôle optimal peut-être caractérisé d'une manière simple et naturelle.

Théorème 1.4.7. *Si $\bar{u} \in U_{ad}$ est un contrôle optimal de (P), alors*

$$\bar{u}(x) = \textit{Proj}_{[\alpha,\beta]} \left(-\tfrac{1}{\lambda}\, p_{\bar{u}}(x)\right) = \max\left(\alpha, \min\left(\beta, -\tfrac{1}{\lambda}\, p_{\bar{u}}(x)\right)\right).$$

De plus, $\bar{u} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant.

Lemme 1.4.8. *Supposons que les hypothèses du théorème $1.4.6$ sont satisfaites et soit $\bar{u}$ un contrôle optimal du problème (P). Alors*

(i) $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\alpha \geq 0$ *si et seulement si* $\bar{u}(x) = \alpha$.

(ii) $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\beta \leq 0$ *si et seulement si* $\bar{u}(x) = \beta$.

(iii) *Si* $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\alpha < 0 < p_{\bar{u}}(x) + \lambda\beta$ *alors* $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\bar{u}(x) = 0$.

Démonstration. Soit $v \in [\alpha, \beta]$ et soit $x_0 \in \Omega$ un point de Lebesgue de la fonction $(p_{\bar{u}} + \lambda \bar{u})(v - \bar{u})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit u_k la perturbation définie par

$$u_k(x) = \begin{cases} v & \text{si } x \in \omega_k(x_0), \\ \bar{u}(x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\omega_k(x) = \left\{x \in \Omega \mid |x - x_0| \leq \frac{1}{k}\right\}$. Il est clair que $u_k \in U_{ad}$. Prenant en compte le théorème 1.4.6, il vient que

$$0 \leq \int_\Omega (p_{\bar{u}}(x) + \lambda \bar{u}(x))(u_k(x) - \bar{u}(x))\, dx = \int_{\omega_k(x_0)} (p_{\bar{u}}(x) + \lambda \bar{u}(x))(v - \bar{u}(x_0))\, dx$$

et donc

$$\tfrac{1}{|\omega_k(x_0)|} \int_{\omega_k(x_0)} (p_{\bar{u}}(x) + \lambda \bar{u}(x))(v - \bar{u}(x_0))\, dx \geq 0.$$

Passant alors à la limite sur k, et utilisant la définition d'un point de Lebesgue, nous obtenons

$$(p_{\bar{u}}(x_0) + \lambda \bar{u}(x_0))(v - \bar{u}(x_0)) \geq 0.$$

Rappelant que l'ensemble des points de Lebesgue est de mesure pleine, nous déduisons que pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$(p_{\bar{u}}(x) + \lambda \bar{u}(x))\,(v - \bar{u}(x)) \geq 0 \quad \forall v \in [\alpha, \beta]. \tag{1.25}$$

Considérons maintenant les différentes assertions.

(i) Si $\bar{u}(x) = \alpha$, alors d'après (1.25), il vient que

$$(p_{\bar{u}}(x) + \lambda \alpha)\,(v - \alpha) \geq 0 \qquad \forall v \in [\alpha, \beta]$$

et donc $p_{\bar{u}}(x) + \lambda \alpha \geq 0$.

Pour montrer la réciproque, commençons par observer que

$$(p_{\bar{u}}(x) + \lambda \bar{u}(x))\,(\alpha - \bar{u}(x)) \leq (p_{\bar{u}}(x) + \lambda \alpha)\,(\alpha - \bar{u}(x)),$$

et qu'en utilisant (1.25), nous avons

$$0 \leq (p_{\bar{u}}(x) + \lambda \bar{u}(x))\,(\alpha - \bar{u}(x)) \leq (p_{\bar{u}}(x) + \lambda \alpha)\,(\alpha - \bar{u}(x)). \tag{1.26}$$

De plus, si $p_{\bar{u}}(x) + \lambda \alpha \geq 0$, alors

$$(p_{\bar{u}}(x) + \lambda \bar{u}(x))\,(\alpha - \bar{u}(x)) \leq (p_{\bar{u}}(x) + \lambda \alpha)\,(\alpha - \bar{u}(x)) \leq 0$$

et grâce à (1.26), nous concluons que

$$(p_{\bar{u}}(x) + \lambda \bar{u}(x))\,(\alpha - \bar{u}(x)) = (p_{\bar{u}}(x) + \lambda \alpha)\,(\alpha - \bar{u}(x)) = 0. \tag{1.27}$$

- Si $p_{\bar{u}}(x) + \lambda \alpha > 0$, la deuxième identité dans (1.27) implique que $\bar{u}(x) = \alpha$.

• Si $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\alpha = 0$, alors $p_{\bar{u}}(x) = -\lambda\alpha$ et en substituant dans la première identité de (1.27), nous obtenons $\lambda\left(\bar{u}(x) - \alpha\right)^2 = 0$, i.e. $\bar{u}(x) = \alpha$.

(ii) Cette assertion peut-être démontrée en utilisant des arguments similaires à ceux dans (i).

(iii) Si $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\alpha < 0 < p_{\bar{u}}(x) + \lambda\beta$, alors d'après (i) et (ii), nous déduisons que $\alpha < \bar{u}(x) < \beta$. Choisissant $v = \alpha$ dans (1.25), nous obtenons

$$(p_{\bar{u}}(x) + \lambda\bar{u}(x))\,(\alpha - \bar{u}(x)) \geq 0$$

ce qui implique que $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\bar{u}(x) \leq 0$. De manière similaire, en choisissant $v = \beta$ dans (1.25), nous obtenons

$$(p_{\bar{u}}(x) + \lambda\bar{u}(x))\,(\beta - \bar{u}(x)) \geq 0$$

et donc $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\bar{u}(x) \geq 0$. Par conséquent $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\bar{u}(x) = 0$. □

Nous sommes en mesure de montrer le théorème 1.4.7.

Démonstration du théorème 1.4.7. Supposons que $-\frac{1}{\lambda}p_{\bar{u}}(x) \leq \alpha$ alors $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\alpha \geq 0$ et d'après l'assertion (i) du lemme 1.4.8, on obtient

$$\bar{u}(x) = \alpha = \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(-\tfrac{1}{\lambda}\,p_{\bar{u}}(x)\right).$$

De la même manière si $-\frac{1}{\lambda}\,p_{\bar{u}}(x) \geq \beta$, alors d'après l'assertion (ii) du lemme 1.4.8, on obtient

$$\bar{u}(x) = \beta = \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(-\tfrac{1}{\lambda}\,p_{\bar{u}}(x)\right).$$

Finalement si $\alpha < -\frac{1}{\lambda}\,p_{\bar{u}}(x) < \beta$ alors $p_{\bar{u}}(x) + \lambda\alpha < 0 < p_{\bar{u}}(x) + \lambda\beta$ et d'après l'assertion (iii) du lemme 1.4.8, on a

$$\bar{u}(x) = -\tfrac{1}{\lambda}\,p_{\bar{u}}(x) = \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(-\tfrac{1}{\lambda}\,p_{\bar{u}}(x)\right).$$

Ceci prouve la première partie. La régularité de $\bar{u}$ est alors une conséquence de la régularité de $p_{\bar{u}}$ et de la continuité lipschitzienne de la fonction Proj. ■

1.4.4 Conditions d'optimalité du second ordre

Soit $\bar{u}$ un contrôle optimal de (P) et soit $p_{\bar{u}}$ l'état adjoint associé. Afin de simplifier la notation, nous posons

$$\bar{d}(x) = p_{\bar{u}}(x) + \lambda\bar{u}(x).$$

Grâce à (1.25), nous pouvons facilement voir que

$$\bar{d}(x) = \begin{cases} 0 & \text{p.t. } x \in \Omega \text{ si } \alpha < \bar{u}(x) < \beta, \\ \geq 0 & \text{p.t. } x \in \Omega \text{ si } \bar{u}(x) = \alpha, \\ \leq 0 & \text{p.t. } x \in \Omega \text{ si } \bar{u}(x) = \beta. \end{cases}$$

L'ensemble suivant est essentiel dans la formulation des conditions d'optimalité du second ordre

$$C_{\bar{u}} = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ satisfaisant (1.28) et } v(x) = 0 \text{ si } \bar{d}(x) \neq 0 \right\},$$

où

$$v(x) = \begin{cases} \geq 0 & \text{p.t. } x \in \Omega \text{ si } \bar{u}(x) = \alpha, \\ \leq 0 & \text{p.t. } x \in \Omega \text{ si } \bar{u}(x) = \beta. \end{cases} \tag{1.28}$$

Dans le résultat suivant, nous énonçons des conditions nécessaires d'optimalité du second ordre.

Théorème 1.4.9. *Supposons que les hypothèses $H1$ et $H2$ sont satisfaites. Si $\bar{u}$ est un contrôle optimal, alors*

$$J\text{''}(\bar{u})v^2 \geq 0 \qquad \forall v \in C_{\bar{u}}.$$

Démonstration. Elle sera divisée en deux parties.

Première étape. Montrons le résultat pour des élements $v \in C_{\bar{u}} \cap L^\infty(\Omega)$. Pour tout $0 \leq \rho \leq \beta - \alpha$, on définit

$$\Omega_\rho = \{x \in \Omega \mid \alpha < \bar{u}(x) < \alpha + \rho \text{ ou } \beta - \rho < \bar{u}(x) < \beta\},$$

et

$$v_\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega_\rho, \\ v(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_\rho. \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que $v_\rho \in C_{\bar{u}} \cap L^\infty(\Omega)$ et que pour tout $p < +\infty$, on a

$$\|v_\rho - v\|_{L^p(\Omega)} = \|v_\rho - v\|_{L^p(\Omega_\rho)} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \, |\Omega_\rho|^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \rho \to 0^+.$$

(i) Montrons que

$$\bar{u} + \theta v_\rho \in U_{ad} \quad \forall \theta \in \left[0, \tfrac{\rho}{\|v\|_{L^\infty}}\right].$$

Remarquant que

$$\bar{u}(x) + \theta v_\rho(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & \text{si } x \in \Omega_\rho, \\ \bar{u}(x) + \theta v(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_\rho, \end{cases}$$

il est évident que

$$\bar{u}(x) + \theta v_\rho(x) = \bar{u}(x) \in [\alpha, \beta] \qquad \forall x \in \Omega_\rho.$$

Considérons alors le cas où

$$x \in \Omega \setminus \Omega_\rho = \{x \mid \bar{u}(x) = \alpha\} \cup \{x \mid \bar{u}(x) = \beta\} \cup \{x \mid \alpha + \rho \leq \bar{u}(x) \leq \beta - \rho\}.$$

- Si $\bar{u}(x) = \alpha$ alors $v(x) \geq 0$ et

$$\alpha \leq \bar{u}(x) + \theta v_\rho(x) = \alpha + \theta v(x) \leq \alpha + \tfrac{\rho}{\|v\|_{L^\infty}} v(x) \leq \alpha + \rho \leq \beta.$$

- De manière similaire, si $\bar{u} = \beta$ alors $v(x) \leq 0$ et

$$\alpha \leq \beta - \rho \leq \beta + \frac{\rho}{\|v\|_{L^\infty}} v(x) \leq \bar{u}(x) + \theta v_\rho(x) = \beta + \theta v(x) \leq \beta.$$

- Si $\alpha + \rho \leq \bar{u}(x) \leq \beta - \rho$, alors

$$\alpha \leq \alpha + \rho - \theta \|v\|_{L^\infty} \leq \bar{u} + \theta v_\rho = \bar{u} + \theta v \leq \beta - \rho + \theta \|v\|_{L^\infty} \leq \beta.$$

(ii) Prenant en compte (i) et utilisant la condition d'optimalité, il vient que pour $\theta \in \left]0, \frac{\rho}{\|v\|_{L^\infty(\Omega)}}\right[$ on a

$$\frac{J(\bar{u} + \theta v_\rho) - J(\bar{u})}{\theta} \geq 0.$$

De l'autre côté, utilisant la formule de Taylor, nous obtenons

$$\frac{J(\bar{u} + \theta v_\rho) - J(\bar{u})}{\theta} = J'(\bar{u}) v_\rho + \frac{\theta}{2} J"(\bar{u} + s_\theta \theta v_\rho) {v_\rho}^2,$$

avec $1 < s_\theta < 1$, et donc

$$J'(\bar{u}) v_\rho + \frac{\theta}{2} J"(\bar{u} + s_\theta \theta v_\rho) {v_\rho}^2 \geq 0.$$

Utilisant la proposition 1.4.4 et le fait que $v(x) = 0$ si $\bar{d}(x) \neq 0$, nous déduisons que

$$J'(\bar{u}) v_\rho = \int_\Omega \bar{d}(x) v_\rho(x)\, dx = \int_{\Omega \setminus \Omega_\rho} \bar{d}(x) v(x)\, dx = 0$$

ce qui, combiné avec l'inégalité précédente, implique

$$J"(\bar{u} + s_\theta \theta v_\rho) {v_\rho}^2 \geq 0.$$

Comme la suite $(\bar{u} + s_\theta \theta v_\rho)_\theta$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers $\bar{u}$, en utilisant l'expression de $J"$ donnée dans la proposition 1.4.5 et des arguments similaires à ceux utilisés dans les sections précédentes, nous obtenons

$$J"(\bar{u}) {v_\rho}^2 = -\left(p_{\bar{u}}, D_{yy} f(y_{\bar{u}}) \left(z_{\bar{u}v_\rho}\right)^2\right) + \left\|z_{\bar{u}v_\rho}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \left\|v_\rho\right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Finalement, et de la même manière, utilisant la convergence de $(v_\rho)_\rho$ vers v dans $L^2(\Omega)$ et passant à la limite par rapport à ρ, nous concluons que

$$-\left(p_{\bar{u}}, D_{yy} f(y_{\bar{u}}) \left(z_{\bar{u}v}\right)^2\right) + \left\|z_{\bar{u}v}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \left\|v\right\|^2_{L^2(\Omega)} = J"(\bar{u}) v^2 \geq 0.$$

<u>Deuxième étape.</u> Pour conclure la démonstration, il faut montrer l'inégalité pour tout $v \in C_{\bar{u}}$ non nécessairement borné. Soit alors $v \in C_{\bar{u}}$ et soit

$$v_k(x) = \mathrm{Proj}_{[-k,k]}(v(x)) = \min(\max(-k, v(x)), k).$$

Vu que $|v_k(x)| \leq |v(x)|$ et $v_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} v(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$, il vient que $(v_k)_k$ converge vers v dans $L^2(\Omega)$. De plus, prenant en compte le fait que $v \in C_{\bar{u}}$, il est facile de voir que

$$v_k(x) = \begin{cases} \min(v(x), k) & \text{si } \bar{u}(x) = \alpha, \\ \max(-k, v(x)) & \text{si } \bar{u}(x) = \beta, \\ 0 & \text{si } \bar{d}(x) \neq 0 \end{cases}$$

impliquant que $v_k \in C_{\bar{u}} \cap L^\infty(\Omega)$. D'après la première étape, on a

$$J"(\bar{u}){v_k}^2 \geq 0,$$

et en passant à la limite quand k tend vers l'infini, on obtient

$$J"(\bar{u})v^2 \geq 0 \quad \forall v \in C_{\bar{u}}.$$

Ceci complète la preuve. □

Dans le résultat suivant nous formulons des conditions suffisantes d'optimalité (locale).

Théorème 1.4.10. *Supposons que les hypothèses $H1$ et $H2$ sont satisfaites. Si $\bar{u} \in U_{ad}$ satisfait les conditions d'optimalité du premier ordre, et si*

$$J"(\bar{u})v^2 > 0 \quad \forall v \in C_{\bar{u}} \backslash \{0\},$$

alors il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$J(u) \geq J(\bar{u}) + \tfrac{\delta}{2}\|u - \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in U_{ad} \cap \bar{B}_\varepsilon(\bar{u}),$$

où $\bar{B}_\varepsilon(\bar{u})$ est la boule unité dans $L^\infty(\Omega)$ de centre $\bar{u}$ et de rayon ε.

Démonstration. La démonstration, se basant sur des arguments similaires à ceux développés dans les sections précédentes, sera omise. (Pour plus de détails, voir par exemple [5]). □

Nous finissons cette section par l'énoncé d'un résulats très utile pour l'établissement des estimations d'erreur relatives aux approximations du problème continu (P)

Théorème 1.4.11. *Supposons que les hypothèses du théorème 1.4.10 sont satisfaites. Alors*

$$J"(\bar{u})v^2 > 0 \quad \forall v \in C_{\bar{u}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \exists\delta > 0 \text{ et } \exists\tau > 0 \mid J"(\bar{u})v^2 \geq \delta\|v\|^2_{L^2(\Omega)} & \forall v \in C^\tau_{\bar{u}} \\ \text{où } C^\tau_{\bar{u}} = \left\{v \in L^2(\Omega) \text{ satisfait } (1.28) \text{ et } v(x) = 0 \text{ si } |\bar{d}(x)| > \tau\right\}. \end{cases}$$

Démonstration. Voir par exemple [5]). □

Chapitre 2

Contrôle optimal d'équations semi-linéaires elliptiques : Approximation numérique

2.1 Introduction

Nous abordons dans ce chapitre l'analyse numérique du problème de contrôle optimal considéré au chapitre 1. Pour simplifier la rédaction, nous supposerons que Ω est convexe.

Nous allons définir une méthode basée sur les éléments finis pour approcher le problème de contrôle optimal (P). Dans cette perspective, nous considérons une famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de $\overline{\Omega}$. À chaque élément $T \in \mathcal{T}_h$ nous associons le diamètre de T défini par

$$\rho_T = \text{diam}(T) = \max_{x,y\in T} \|x - y\|$$

et définissons le pas du maillage par

$$h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} \rho_T.$$

Nous définissons aussi la rondeur ρ_T comme étant le diamètre de la plus grande boule contenue dans T, i.e.

$$\sigma_T = \max_{B_r\subset T}(2r).$$

Dans toute la suite, nous supposerons que $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est une suite de maillages réguliers. Plus précisémment, nous supposerons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(i) Il existe deux constantes positives ρ et σ tel que

$$\frac{\rho_T}{\sigma_T} \le \sigma \quad \text{et} \quad \frac{h}{\rho_T} \le \rho \ \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h, \ \text{ et tout } h > 0.$$

(ii) Soit $\overline{\Omega}_h = \cup_{T\in\mathcal{T}_h} T$ et soit Ω_h et Γ_h son intérieur et sa frontière respectivement. Nous supposerons que $\overline{\Omega}_h$ est convexe et que les sommets de $\mathcal{T}_h$ placés sur Γ_h sont aussi des points de Γ.

Nous savons que dans ce cas (voir l'estimation $(5.2.18)$ dans [12]), on a

$$|\Omega\backslash\Omega_h| \le Ch^2, \tag{2.1}$$

où $C > 0$ est indépendante de h.

À tout triangle frontière $T \in \mathcal{T}_h$, nous associons un autre triangle $\widehat{T} \subset \overline{\Omega}$ de frontière courbe obtenu par la substitution du côté entre deux sommets frontière de T par la partie de Γ liant ces deux sommets. Nous notons $\widehat{\mathcal{T}_h}$ l'union de ces triangles, obtenant ainsi $\overline{\Omega} = \cup_{\widehat{T}\in\widehat{\mathcal{T}_h}} \widehat{T}$.

Nous considérons les espaces suivant

$$\begin{aligned}
&U_h = \left\{u \in L^\infty(\Omega) \mid u_{|\widehat{T}} \text{ est constant sur chaque } \widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}_h}\right\},\\
&U_{ad}^h = U_h \cap U_{ad},\\
&V_h = \left\{y_h \in C(\overline{\Omega}) \mid y_{h|T} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h \text{ et } y_h = 0 \text{ sur } \overline{\Omega}\backslash\Omega_h\right\},\\
&W_h = \left\{y_h \in C(\overline{\Omega}_h) \mid y_{h|T} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h\right\},
\end{aligned}$$

où $\mathbb{P}_1$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal 1. Grâce au théorème de recollement de Sobolev, V_h est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ et W_h est un sous-espace de $H^1(\Omega)$.

On définit l'opérateur d'interpolation de Lagrange

$$\Pi_h^1 : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow W_h$$

où $\Pi_h^1 z$ est l'unique élément de W_h tel que $\Pi_h^1 z(x_i) = z(x_i)$ pour tous les noeuds de la triangulation.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que f satisfait l'hypothèse suivante :

H3 - f est une fonction de Carathéodory de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \Omega$, $f(x, \cdot)$ est de classe C^1 avec $D_y f(x, \cdot) \geq 0$. De plus, il existe une fonction $\chi \in L^2(\Omega)$ tel que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |\chi(x)|\,|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ a.e.\ x \in \Omega,$$

et il existe une constante C_M positive tel que

$$|D_y f(x, y_1) - D_y f(x, y_2)| \leq C_M |y_1 - y_2| \qquad \forall (x, y_1, y_2) \in \Omega \times [-M, M]^2.$$

Le plan du chapitre est le suivant : dans la section 2.2, nous commençons par appliquer la méthode des éléments finis pour l'approximation de problèmes elliptiques semi-linéaires. Nous montrons l'existence de solution au problème appproché et établissons différentes estimations d'erreur a priori. Le cas plus général des équations semi-linéaires est ensuite considéré. L'existence d'une solution approchée est démontrée utilisant des arguments de point fixe et des estimations d'erreur a piori sont établies. Dans la dernière section, nous introduisons le problème de contrôle approché, caractérisons les solutions correspondantes et établissons la convergence d'un contrôle optimal approché vers le contrôle optimal solution du problème continu.

2.2 Approximation des équations semi-linéaires elliptiques

2.2.1 Approximation des équations linéaires

Nous allons commencer par étudier l'approximation par la méthode des éléments finis de la solution de l'équation linéaire (1.2). (Nous rappelons que la formulation variationnelle associée à celle-ci est donnée par (1.3).)

Proposition 2.2.1. *Soit $g \in L^2(\Omega)$ et $b \in L^2(\Omega)$ avec $b \geq 0$. Alors le problème*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } z_h(g) \in V_h \textit{ tel que} \\ a(z_h(g), \phi_h) = (g, \phi_h) \qquad \forall \phi_h \in V_h, \end{cases} \tag{2.2}$$

admet une solution unique.

Démonstration. Soit N_h la dimension de V_h, soit $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N_h}$ une base de V_h et considérons le développement de $z_h(g)$ dans cette base, i.e.

$$z_h(g) = \sum_{j=1}^{N_h} z_j \varphi_j.$$

Dans la formulation variationnelle (2.2), on prend successivement $\phi_h = \varphi_i$, $1 \leq i \leq N_h$. Il résulte alors que résoudre (2.2) est équivalent à trouver les N_h coefficients $(z_i)_{1\leq j\leq N_h}$ tels que

$$a\left(\sum_{j=1}^{N_h} z_j\varphi_j, \varphi_i\right) = (g, \varphi_i) \qquad 1 \leq i \leq N_h.$$

La forme a étant bilinéaire, il vient que

$$\sum_{j=1}^{N_h} z_j\, a\left(\varphi_j, \varphi_i\right) = (g, \varphi_i) \qquad 1 \leq i \leq N_h$$

qui peut s'écrire de manière équivalente sous la forme du système linéaire

$$A_h Z_h = B_h,$$

où

$$\begin{aligned}
&(A_h)_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \qquad i, j = 1, \cdots, N_h,\\
&(Z_h)_i = z_i \qquad i = 1, \cdots, N_h,\\
&(B_h)_i = (g, \varphi_i) \qquad i = 1, \cdots, N_h.
\end{aligned}$$

Utilisant la bilinéarité et la coercivité de a, on obtient

$$\begin{aligned}
v^\top A_h v &= \sum_{j=1}^{N_h}\sum_{i=1}^{N_h} v_i a\left(\varphi_j, \varphi_i\right) v_j = \sum_{j=1}^{N_h}\sum_{i=1}^{N_h} a\left(v_j\varphi_j, v_i\varphi_i\right)\\
&= a\left(\sum_{j=1}^{N_h} v_j\varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} v_i\varphi_i\right) \geq \left|\sum_{i=1}^{N_h} v_i\varphi_i\right|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^{N_h}.
\end{aligned}$$

Finalement, observons que si $v^\top A_h v = 0$ alors $\sum_{i=1}^{N_h} v_i\varphi_i = 0$. Tenant en compte le fait que $(\varphi_i)_i$ forme une base, il vient que $v_i = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, N_h$. La matrice A_h est donc symétrique, définie positive. Par conséquent elle est inversible et le système linéaire admet une solution unique Z_h. □

La proposition suivante concerne un résultat du type lemme de Céa.

Proposition 2.2.2. *Soit $g \in L^\infty(\Omega)$ et soient z_g et $z_h(g)$ les solutions de* (1.2) *et* (2.2) *correspondantes. Alors*

$$\left|z_g - z_h(g)\right|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left|z_g - \Pi_h^1(z_g)\right|_{H_0^1(\Omega)},$$

où C est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. Comme (1.3) reste vraie pour tout $\phi_h \in V_h$, on a

$$a(z_g, \phi_h) = (g, \phi_h) \qquad \forall \phi_h \in V_h.$$

En soustrayant cette identité de (2.2), on obtient

$$a(z_g - z_h(g), \phi_h) = 0 \qquad \forall \phi_h \in V_h$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} a(z_g - z_h(g), z_g - z_h(g)) &= a(z_g - z_h(g), z_g - \phi_h) + a(z_g - z_h(g), \phi_h - z_h(g)) \\ &= a(z_g - z_h(g), z_g - \phi_h) \qquad \forall \phi_h \in V_h. \end{aligned}$$

Tenant en compte la coercivité et la continuité de a, et utilisant l'inégalité de sobolev, il vient que

$$\begin{aligned} |z_g - z_h(g)|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq |z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)} |z_g - \phi_h|_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \|b\|_{L^2(\Omega)} \|z_g - z_h(g)\|_{L^4(\Omega)} \|z_g - \phi_h\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + C_S^2 \|b\|_{L^2(\Omega)}\right) |z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)} |z_g - \phi_h|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

pour tout $\phi_h \in V_h$. Par conséquent

$$|z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)} \leq C |z_g - \phi_h|_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall \phi_h \in V_h.$$

La conclusion suit en choisissant $\phi_h = \Pi_h^1 z_g$. □

Le lemme suivant nous donne une estimation de l'erreur d'interpolation (voir [7], théorème 16.1).

Lemme 2.2.3. *Soit $m \geq 0,\ k \geq 0$, et $p, q \in [1, \infty]$. Si les inclusions*

$$W^{k+1,p}(T) \hookrightarrow C^0(T)$$

$$W^{k+1,p}(T) \hookrightarrow W^{m,q}(T)$$

sont vérifiées, alors il existe une constante C positive indépendante de h tel que

$$\|y - \Pi_T^1 y\|_{W^{m,q}(T)} \leq C h^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) + k + 1 - m} \|y\|_{W^{k+1,p}(T)},$$

où $\Pi_T^1 y$ est la restriction de $\Pi_h^1 y$ à T.

A présent, nous sommes en mesure d'établir une estimation d'erreur dans $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 2.2.4. *Soit $g \in L^2(\Omega)$ et soient z_g et $z_h(g)$ les solutions de* (1.2) *et* (2.2) *correspondantes. Alors*

$$|z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)} \leq C h \|z_g\|_{H^2(\Omega)}, \tag{2.3}$$

où C est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. Choisissant $m = 1$, $q = 2$, $k = 1$ et $p = 2$ dans le lemme 2.2.3, nous obtenons

$$\left\|z_g - \Pi_h^1 z_g\right\|_{H^1(\Omega_h)} \leq Ch\|z_g\|_{H^2(\Omega_h)}.$$

De plus, d'après le lemme $5.2.3$ dans [12], on a

$$\|z\|_{H^1(\Omega\backslash\Omega_h)} \leq Ch\,\|z\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Utilisant alors la proposition 2.2.2, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C\left|z_g - \Pi_h^1 z_g\right|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\left\|z_g - \Pi_h^1 z_g\right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C\left(\|z_g\|_{H^1(\Omega\backslash\Omega_h)} + \left\|z_g - \Pi_h^1 z_g\right\|_{H^1(\Omega_h)}\right) \leq Ch\|z_g\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. □

Le résultat précédent est utile pour obtenir une estimation d'erreur dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 2.2.5. *Soit $g \in L^2(\Omega)$ et soient z_g et $z_h(g)$ les solutions de* (1.2) *et* (2.2) *correspondantes. Alors*

$$\|z_g - z_h(g)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\,\|z_g\|_{H^2(\Omega)}\,, \tag{2.4}$$

où C est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. Nous savons déjà (cf. chapitre 1) que pour tout $\psi \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $z_\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta z_\psi + b(x) z_\psi = \psi & \text{dans } \Omega, \\ z_\psi = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et telle que

$$\|z_\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

La formulation variationnelle associée à ce problème s'écrit

$$a\left(z_\psi, z\right) = (\psi, z) \quad \forall z \in H_0^1(\Omega),$$

et peut-être approchée par

$$a\left(z_h(\psi), z_h\right) = (\psi, z_h) \qquad \forall z_h \in V_h.$$

De simples calculs montrent que

$$(\psi, z_g - z_h(g)) = a\left(z_\psi, z_g - z_h(g)\right) = a\left(z_\psi - z_h(\psi), z_g - z_h(g)\right)$$

et donc en utilisant la continuité de a ainsi que l'estimation dans la proposition 2.2.4, on obtient

$$
\begin{aligned}
(\psi, z_g - z_h(g)) &\leq |z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)} |z_\psi - z_h(\psi)|_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ \int_\Omega |b||z_g - z_h(g)||z_\psi - z_h(\psi)|dx \\
&\leq |z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)} |z_\psi - z_h(\psi)|_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ \|b|_{L^2(\Omega)}|z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)}|z_\psi - z_h(\psi)|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \left(1 + \|b|_{L^2(\Omega)}\right) |z_g - z_h(g)|_{H_0^1(\Omega)} |z_\psi - z_h(\psi)|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq Ch\|z_g\|_{H^2(\Omega)} h \|z_\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|z_g\|_{H^2(\Omega)} \|z_\psi\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\|z_g - z_h(g)\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} (\psi, z_g - z_h(g)) \leq Ch^2 \|z_g\|_{H^2(\Omega)}.
$$

Ceci complète la preuve. □

Nous rappelons l'estimation inverse suivante

$$
\|\phi_h\|_{W^{m,q}(\Omega_h)} \leq \frac{C}{h^{n \max(0, \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} h^{m-\ell}} \|\phi_h\|_{W^{\ell,p}(\Omega_h)} \quad \forall \phi_h \in V_h, \ \text{ si } \ell \leq m, \tag{2.5}
$$

où C est une constante positive indépendante de h. (La démonstration peut-être trouvée dans [7], théorème 17.2.). Cette inégalité sera utile dans la démonstration du résultat suivant.

Proposition 2.2.6. *Soit $g \in L^2(\Omega)$ et soient z_g et $z_h(g)$ les solutions de* (1.2) *et* (2.2) *correspondantes. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$
\|z_g - z_h(g)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{2-\frac{n}{2}} \|z_g\|_{H^2(\Omega)}, \tag{2.6}
$$

où C est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. On a

$$
\|z_g - z_h(g)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \|z_g - \Pi_h z_g\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|\Pi_h z_g - z_h(g)\|_{L^\infty(\Omega_h)}. \tag{2.7}
$$

Choisissant $m = 0$, $q = +\infty$, $k = 1$ et $p = 2$ dans l'énoncé du lemme 2.2.3, on obtient

$$
\|z_g - \Pi_h z_g\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{2-\frac{n}{2}} \|z_g\|_{H^2(\Omega)}. \tag{2.8}
$$

Appliquant l'inégalité inverse (2.5), on obtient

$$
\begin{aligned}
\|\Pi_h z_g - z_h(g)\|_{L^\infty(\Omega_h)} &\leq Ch^{-\frac{n}{2}} \|\Pi_h z_g - z_h(g)\|_{L^2(\Omega_h)} \\
&\leq Ch^{-\frac{n}{2}} \left(\|\Pi_h z_g - z_g\|_{L^2(\Omega_h)} + \|z_g - z_h(g)\|_{L^2(\Omega_h)} \right),
\end{aligned}
$$

où C est une constante indépendante de h. Appliquant encore une fois le lemme 2.2.3 pour $m = 0$, $q = 2$, $k = 1$ et $p = 2$, on obtient

$$\|\Pi_h z_g - z_g\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch^2 \|y_v\|_{H^2(\Omega)}$$

ce qui combiné avec (2.4) donne

$$\|\Pi_h z_g - z_h(g)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{2-\frac{n}{2}} \|z_g\|_{H^2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

La conclusion résulte alors de (2.7), (2.8) et (2.9). □

2.2.2 Approximation de l'équation d'état

Nous nous intéressons à présent à l'approximation par la méthode des éléments finis de la solution de l'équation d'état (1.1).

Proposition 2.2.7. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. Alors le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Trouver } y_h(v) \in V_h \textit{ tel que} \\ (\nabla y_h(v), \nabla \phi_h) = (v - f(\cdot, y_h(v)), \phi_h) \qquad \forall \phi_h \in V_h, \end{array} \right. \tag{2.10}$$

admet une solution unique.

Démonstration. Considérons le développement de $y_h(v)$ dans cette base, i.e.

$$y_h(v) = \sum_{j=1}^{N_h} y_j \varphi_j.$$

Dans la formulation variationnelle (2.10), on prend successivement $\phi_h = \varphi_i$, $1 \leq i \leq N_h$. Il résulte alors que résoudre (2.2) est équivalent à trouver les N_h coefficients $(y_i)_{1 \leq j \leq N_h}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{N_h} y_j \ (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) = \left(v - f\left(\cdot, \sum_{j=1}^{N_h} y_j \varphi_j\right), \varphi_i \right) \qquad 1 \leq i \leq N_h$$

qui peut s'écrire de manière équivalente sous la forme du système non linéaire

$$A_h Y_h = F(Y_h) + B_h, \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned} &(A_h)_{ij} = (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) \qquad i, j = 1, \cdots, N_h, \\ &(Y_h)_i = y_i \qquad i = 1, \cdots, N_h, \\ &(F(Y_h))_i = -\left(f\left(\cdot, \sum_{j=1}^{N_h} y_j \varphi_j\right), \varphi_i \right) \qquad i = 1, \cdots, N_h, \\ &(B_h)_i = (v, \varphi_i) \qquad i = 1, \cdots, N_h. \end{aligned}$$

La matrice A_h est symétrique, définie positive. L'hypothèse de continuité lipschitzienne locale de f implique celle de la fonction $F : \mathbb{R}^{N_h} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_h}$. De même, la monotonie de f implique celle de F, une fois que pour tout $Y, Z \in \mathbb{R}^{N_h}$

$$\begin{aligned}
&(F(Y) - F(Z)) \cdot (Y - Z) = \textstyle\sum_{i=1}^{N_h} \left[(F(Y))_i - (F(Z)]_i\right) (Y - Z)_i \\
&= -\textstyle\sum_{i=1}^{N_h} \left[\left(f\left(\cdot, \sum_{j=1}^{N_h} y_j\varphi_j\right), \varphi_i\right) - \left(f\left(\cdot, \sum_{j=1}^{N_h} z_j\varphi_j\right), \varphi_i\right)\right] (y_i - z_i) \\
&= -\textstyle\sum_{i=1}^{N_h} \left[\left(f\left(\cdot, \sum_{j=1}^{N_h} y_j\varphi_j\right) - f\left(\cdot, \sum_{j=1}^{N_h} z_j\varphi_j\right), \varphi_i\right)\right] (y_i - z_i) \\
&= -\left(f\left(\cdot, \textstyle\sum_{j=1}^{N_h} y_j\varphi_j\right) - f\left(\cdot, \sum_{j=1}^{N_h} z_j\varphi_j\right), \sum_{i=1}^{N_h} (y_i - z_i)\varphi_i\right) \\
&= -\left(f(\cdot, y_h) - f(\cdot, z_h), y_h - z_h\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F(0) = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas). Considérons alors la fonction

$$F_k(Y) = \begin{cases} F(Y) & \text{si } \|F(Y)\| \leq k, \\ k\frac{F(Y)}{\|F(Y)\|} & \text{si } \|F(Y)\| \geq k. \end{cases}$$

Soit $z \in \mathbb{R}^{N_h}$ et soit Y_z la solution de $A_h Y_z = F_k(z) + B_h$. Comme A_h est symétrique, définie positive, il vient que

$$\lambda_{\min} \|Y_z\|^2 \leq Y_z^\top A_h Y_z = (F_k(z) + B_h) \cdot Y_z \leq (\|F_k(z)\| + \|B_h\|) \|Y_z\|,$$

où $\lambda_{\min} > 0$ est la plus petite valeur propre de A_h. Il s'ensuit que

$$\|Y_z\| \leq \tfrac{1}{\lambda_{\min}} (\|F_k(z)\| + \|B_h\|) \leq \tfrac{1}{\lambda_{\min}} (k + \|B_h\|).$$

Par conséquent, l'application qui à chaque z associe Y_z est continue et appliquant le théorème du point fixe de Brouwer, nous déduisons l'existence de Y_k satisfaisant

$$A_h Y_k = F_k(Y_k) + B_h.$$

De plus,

$$\lambda_{\min} \|Y_k\|^2 \leq Y_k^\top A_h Y_k = (F_k(Y_k) + B_h) \cdot Y_k \leq B_h \cdot Y_k \leq \|B_h\| \|Y_k\|,$$

ce qui donne

$$\|Y_k\| \leq \tfrac{\|B_h\|}{\lambda_{\min}}.$$

Ainsi Y_k est bornée indépendemment de k. Comme F est localement lipschitzienne, elle est lipschitzienne sur la boule $\bar{B}\left(0, \frac{\|B_h\|}{\lambda_{\min}}\right)$ et

$$\|F(Y_k)\| \leq \tfrac{L\|B_h\|}{\lambda_{\min}} \qquad \text{pour tout } k > 0.$$

Si nous choisissons $k \geq \frac{L\|B_h\|}{\lambda_{\min}}$, on obtient $F_k(Y_k) = F(Y_k)$ et on a donc obtenu une solution de (2.11). L'unicité est une conséquence de la monotonie de F. □

2.2.3 Estimations d'erreur pour l'état

Nous donnons ici quelques résultats fondamentaux relatifs à la convergence de l'approximation par la méthode des éléments finis de la solution de l'équation d'état (1.1) et de l'équation adjointe (1.17).

Proposition 2.2.8. *Supposons que l'hypothèse $H3$ est satisfaite. Soit $v \in L^2(\Omega)$ et soient y_v et $y_h(v)$ les solutions de* (1.1) *et* (2.10) *correspondantes. Alors*

$$|y_v - y_h(v)|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch \, \|y_v\|_{H^2(\Omega)} \, ,$$

où C est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. La preuve est une généralisation aux équations semi-linéaires des arguments de la preuve du lemme de Céa. Considérant les formulations variationnelles associées, nous avons

$$(\nabla y_v, \nabla \phi) + (f(\cdot, y_v), \phi) = (v, \phi) \qquad \forall \phi \in V,$$

$$(\nabla y_h(v), \nabla \phi_h) + (f(\cdot, y_h(v)), \phi_h) = (v, \phi_h) \qquad \forall \phi_h \in V_h.$$

Prenons $\phi = \phi_h \in V_h$ dans la première identité et soustrayant de la deuxième, nous obtenons

$$(\nabla (y_v - y_h(v)), \nabla \phi_h) + (f(\cdot, y_v) - f(\cdot, y_h(v)), \phi_h) = 0 \qquad \forall \phi_h \in V_h.$$

Par conséquent, il vient que

$$\begin{aligned}
|y_v - y_h(v)|^2_{H_0^1(\Omega)} &= (\nabla(y_v - y_h(v)), \nabla(y_v - z_h)) \\
&\quad + (\nabla(y_v - y_h(v)), \nabla(z_h - y_h(v))) \\
&= (\nabla(y_v - y_h(v)), \nabla(y_v - z_h)) \\
&\quad + (f(\cdot, y_v) - f(\cdot, y_h(v)), y_h(v) - z_h) \\
&= (\nabla(y_v - y_h(v)), \nabla(y_v - z_h)) \\
&\quad + (f(\cdot, y_v) - f(\cdot, y_h(v)), y_v - z_h) \\
&\quad - (f(\cdot, y_v) - f(\cdot, y_h(v)), y_v - y_h(v)) \qquad \forall z_h \in V_h,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&(\nabla(y_v - y_h(v)), \nabla(y_v - y_h(v))) + (f(\cdot, y_v) - f(\cdot, y_h(v)), y_v - y_h(v)) \\
&= (\nabla(y_v - y_h(v)), \nabla(y_v - z_h)) + (f(\cdot, y_v) - f(\cdot, y_h(v)), y_v - z_h) \qquad \forall z_h \in V_h.
\end{aligned}$$

La monotonie de f implique que

$$\begin{aligned}
&(f(\cdot, y_v) - f(\cdot, y_h(v)), y_v - y_h(v)) \\
&= \int_\Omega \int_0^1 D_y f(\cdot, \theta y_v + (1-\theta) y_h(v)) d\theta (y_v - y_h(v))^2 dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Utilisant la cœrcivité, la continuité de a, l'inégalité précédente et l'hypothèse H3, il vient que

$$\begin{aligned}|y_v - y_h(v)|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq |y_v - y_h(v)|_{H^1_0(\Omega)}|y_v - z_h|_{H^1_0(\Omega)}\\ &+ (f(\cdot, y_v) - f(\cdot, y_h(v)), y_v - z_h)\\ &\leq |y_v - y_h(v)|_{H^1_0(\Omega)}|y_v - z_h|_{H^1_0(\Omega)}\\ &+ \|\chi\|_{L^2(\Omega)} \|y_v - y_h(v)\|_{L^4(\Omega)} \|y_v - z_h\|_{L^4(\Omega)}\\ &\leq C|y_v - y_h(v)|_{H^1_0(\Omega)}|y_v - z_h|_{H^1_0(\Omega)} \qquad \forall\, z_h \in V_h,\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$|y_v - y_h(v)|_{H^1_0(\Omega)} \leq C|y_v - z_h|_{H^1_0(\Omega)} \qquad \forall\, z_h \in V_h.$$

Choisissant $z_h = \Pi^1_h y_v$, on obtient

$$|y_v - y_h(v)|_{H^1_0(\Omega)} \leq C|y_v - \Pi^1_h y_v|_{H^1_0(\Omega)}.$$

Le reste de la preuve est identique à celui de la proposition 2.2.4. $\square$

Proposition 2.2.9. *Soit $v \in L^2(\Omega)$ et soient y_v et $y_h(v)$ les solutions de* (1.1) *et* (2.10) *correspondantes. Alors*

$$|y_v - y_h(v)|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|y_v\|_{H^2(\Omega)},$$

où C est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. Considérons la fonction définie par

$$b(x) = \begin{cases} \frac{f(x,y_h(v)(x)) - f(x,y_v(x))}{y_v(x) - y_h(v)(x)} & \text{si } y_v(x) \neq y_h(v)(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que $b(x) \geq 0$. Utilisant la définition de b et des arguments similaires à ceux de la preuve de la proposition 2.2.5, il vient que

$$\begin{aligned}(\psi, y_v - y_h(v)) &= a(z_\psi, y_v - y_h(v)) = a(z_\psi - z_h(\psi), y_v - y_h(v))\\ &= (\nabla(z_\psi - z_h(\psi)), \nabla(y_v - y_h(v)))\\ &+ (f(\cdot, y_h(v)) - f(\cdot, y_v), z_\psi - z_h(\psi)).\end{aligned}$$

Donc en utilisant la continuité de a, la continuité lipschitzienne de f par rapport à la seconde variable ainsi que les estimations dans la proposition 2.2.2 et la proposition

2.2.8, on obtient

$$\begin{aligned}(\psi, y_v - y_h(v)) &\leq C\,|y_v - y_h(v)|_{H_0^1(\Omega)}\,|z_\psi - z_h(\psi)|_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \int_\Omega |\chi||y_v - y_h(v)||z_\psi - z_h(\psi)|dx \\ &\leq C\,|y_v - y_h(v)|_{H_0^1(\Omega)}\,|z_\psi - z_h(\psi)|_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \|\chi\|_{L^2(\Omega)}|y_v - y_h(v)|_{H_0^1(\Omega)}|z_\psi - z_h(\psi)|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq |y_v - y_h(v)|_{H_0^1(\Omega)}\,|z_\psi - z_h(\psi)|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq Ch\|y_v\|_{H^2(\Omega)}h\|z_\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^2\|y_v\|_{H^2(\Omega)}\|z_\psi\|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|y_v - y_h(v)\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\leq 1} (\psi, y_v - y_h(v)) \leq Ch^2\|y_v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Ceci complète la preuve. □

Proposition 2.2.10. *Supposons que l'hypothèse $H3$ est satisfaite. Soit $v \in L^\infty(\Omega)$ et soient y_v et $y_h(v)$ les solutions les* (1.1) *et* (2.10)*, respectivement. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|y_v - y_h(v)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{2-\frac{n}{2}}\,\|y_v\|_{H^2(\Omega)}\,,$$

où C est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. Elle est identique à celle de la proposition 2.2.6. □

Théorème 2.2.11. *Soient $v, v_h \in L^\infty(\Omega)$ satisfaisant $\|v\|_{L^\infty} + \|v_h\|_{L^\infty} \leq M$ et soient y_v et $y_h(v_h)$ les solutions de l'équation* (1.1) *et* (2.10) *correspondantes. Alors, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\begin{aligned}|y_v - y_h(v_h)|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C\left(h + \|v - v_h\|_{L^2}\right), \\ \|y_v - y_h(v_h)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\left(h^2 + \|v - v_h\|_{L^2}\right), \\ \|y_v - y_h(v_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} &\leq C\left(h^{2-\frac{n}{2}} + \|v - v_h\|_{L^2}\right),\end{aligned} \tag{2.12}$$

où $C = C(\Omega, n, M)$ est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. On a

$$|y_v - y_h(v_h)|_{H_0^1(\Omega)} \leq |y_v - y_{v_h}|_{H_0^1(\Omega)} + |y_{v_h} - y_h(v_h)|_{H_0^1(\Omega)}.$$

La première estimation est alors une conséquence de la proposition 2.2.8, de la proposition 1.4.1 et de la proposition 1.2.7. Les deux autres estimations peuvent être obtenues de manière similaire en utilisant les propositions 1.4.1, 1.2.7, 2.2.9 et 2.2.10. □

2.2.4 Approximation de l'état adjoint et estimations d'erreur

Le but de cette section est d'étudier l'approximation de l'équation adjointe (1.17).

Proposition 2.2.12. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. Alors le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Trouver } p_h(v) \in V_h \textit{ satisfaisant} \\ (\nabla p_h(v), \nabla \phi_h) + (D_y f\,(\cdot, y_h(v))\, p_h(v), \phi_h) = (y_h(v) - y_d, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h, \end{array} \right. \tag{2.13}$$

admet une solution unique.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 2.2.1. □

Proposition 2.2.13. *Soient $v, v_h \in L^\infty(\Omega)$ tels que $\|v\|_{L^\infty} + \|v_h\|_{L^\infty} \le M$. Soient y_v et $y_h(v_h)$ les solutions de l'équation* (1.1) *et* (2.10) *correspondantes, et soient p_v et $p_h(v_h)$ les solutions de* (1.17) *et* (2.13). *Alors les estimations suivantes sont satisfaites*

$$|p_v - p_h(v_h)|_{H_0^1(\Omega)} \le C\,(h + \|v - v_h\|_{L^2})\,,$$

$$\|p_v - p_h(v_h)\|_{L^2(\Omega)} \le C\left(h^2 + \|v - v_h\|_{L^2}\right),$$

$$\|p_v - p_h(v_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \le C\left(h^{2-\frac{n}{2}} + \|v - v_h\|_{L^2}\right), \tag{2.14}$$

où $C = C(\Omega, n, M)$ est une constante positive indépendante de h.

Démonstration. Soit $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le M$ et soit $\tilde{p}_u$ la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{p}_u + D_y f(\cdot, y_h(u))\, \tilde{p}_u = y_h(u) - y_d & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{p}_u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Soustrayant (2.15) de (1.17), nous déduisons que $p = p_u - \tilde{p}_u$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta p + D_y f(\cdot, y_h(u))\, p & = (D_y f(\cdot, y_h(u)) - D_y f(\cdot, y_u))\, p_u & \text{dans } \Omega, \\ & \quad + y_u - y_h(u), & \\ p = 0 & & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

D'après la proposition $1.2.3$ et la proposition $2.2.10$, on a

$$\begin{aligned} &|p_u - \tilde{p}_u|_{H_0^1(\Omega)} + \|p_u - \tilde{p}_u\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\le C\,\|(D_y f(\cdot, y_h(u)) - D_y f(\cdot, y_u))\, p_u + y_u - y_h(u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C_M \|y_u - y_h(u)\|_{L^2(\Omega)} \|p_u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|y_u - y_h(u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C_M \left(1 + \|p_u\|_{L^\infty(\Omega)}\right) h^2 \|y_u\|_{H^2(\Omega)} \le C_M h^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Grâce à (2.3), nous déduisons alors que

$$\begin{aligned}
|p_v - p_h(v_h)|_{H_0^1(\Omega)} &\le |p_v - p_{v_h}|_{H_0^1(\Omega)} + |p_{v_h} - p_h(v_h)|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\le \Big(|p_v - p_{v_h}|_{H_0^1(\Omega)} + |p_{v_h} - \tilde{p}_{v_h}|_{H_0^1(\Omega)} + |\tilde{p}_{v_h} - \tilde{p}_h(v_h)|_{H_0^1(\Omega)} \Big) \\
&\le C \left(\|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} + h^2 + h \right) \\
&\le C \left(\|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} + h \right)
\end{aligned}$$

ce qui donne la première estimation. Les deux autres estimations peuvent-être obtenues exactement de la même manière en combinant (2.16), (2.4) et (2.6).

□

2.3 Approximation du problème de contrôle

Pour $u \in L^2(\Omega)$, nous noterons par $y_h(u)$ la solution de (2.10). Le problème de contrôle optimal approché est défini par

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J_h(u_h) = \frac{1}{2} \displaystyle\int_{\Omega_h} |y_h(u_h)(x) - y_d(x)|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_h} |u_h|^2 \, dx \\ u_h \in U_{ad}^h. \end{cases}$$

L'existence d'une solution pour (P_h) est une conséquence de la continuité de J_h est de la compacité de U_{ad}^h.

2.3.1 Caractérisation des solutions du problème de contrôle approché

Nous commençons par énoncer les conditions d'optimalité associées au problème approché (P_h).

Proposition 2.3.1. *Supposons que l'hypothèse $H3$ est satisfaite. Si $\bar{u}_h$ est une solution de (P_h), alors il existe $p_h(\bar{u}_h) \in V_h$ tel que*

$$(\nabla p_h(\bar{u}_h), \nabla \phi_h) + (D_y f(\cdot, y_h(\bar{u}_h)) \, p_h(\bar{u}_h), \phi_h) = (y_h(\bar{u}_h) - y_d, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h,$$

et

$$\int_{\Omega_h} (p_h(\bar{u}_h) + \lambda \bar{u}_h)(u - \bar{u}_h) \, dx \ge 0 \quad \forall u \in U_{ad}^h. \tag{2.17}$$

Démonstration. Ces conditions d'optimalité peuvent être obtenues en utilisant les mêmes arguments que dans le cas continu. □

Dans le même esprit que pour le cas du problème continu (P), et en utilisant des arguments similaires à ceux introduits dans la section 1.4.3, nous allons caractériser les solutions du problème approché (P_h).

Théorème 2.3.2. *Supposons que l'hypothèse $H3$ est satisfaite et que $\bar{u}_h$ est une solution optimal de (P_h). Alors $\bar{u}_h$ est donné par*

$$\bar{u}_h(x) = \textit{Proj}_{[\alpha,\beta]}\left(\bar{s}_h(x)\right) = \max\left(\alpha, \min(\beta, \bar{s}_h(x))\right) \qquad \textit{pour p.t. } x \in \Omega,$$

où

$$\bar{s}_{h|T}(x) = s_T = \tfrac{-1}{\lambda|T|} \int_T p_h(\bar{u}_h)\, dx.$$

Démonstration. Soit $t \in [\alpha, \beta]$, $T \in \mathcal{T}_h$ un triangle fixé et considérons

$$v_h(x) = \begin{cases} t & x \in T, \\ \bar{u}_h(x) & x \notin T. \end{cases}$$

Il est clair que $v_h \in U_{ad}^h$ et que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\bar{u}_h\right)\left(v_h - \bar{u}_h\right)\, dx &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\bar{u}_{h|K}\right)\left(v_{h|K} - \bar{u}_{h|K}\right) dx \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\bar{u}_{h|K}\right) dx \left(v_{h|K} - \bar{u}_{h|K}\right) \\ &= \int_T \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\bar{u}_{h|T}\right) dx \left(v_{h|T} - \bar{u}_{h|T}\right) \\ &= \int_T \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\bar{u}_{h|T}\right) dx \left(t - \bar{u}_{h|T}\right). \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité (2.17), on obtient alors

$$\int_T \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\bar{u}_{h|T}\right) dx \left(t - \bar{u}_{h|T}\right) \geq 0 \qquad \forall t \in [\alpha, \beta] \text{ et } \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme $1.4.8$, on peut montrer que

$$\begin{aligned} &\int_T \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\alpha\right) dx \geq 0 \quad \text{si et seulement si } \bar{u}_{h|T} = \alpha, \\ &\int_T \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\beta\right) dx \leq 0 \quad \text{si et seulement si } \bar{u}_{h|T} = \beta. \end{aligned}$$

De plus, si

$$\text{Si } \int_T \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\alpha\right) dx < 0 < \int_T \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\beta\right) dx,$$

alors

$$\int_T \left(p_h(\bar{u}_h) + \lambda\bar{u}_{h|T}\right) dx = 0.$$

La caractérisation de u_h peut-être obtenue en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème $1.4.7$. □

2.3.2 Résultats de convergence pour le problème de contrôle approché

Dans cette section, nous montrons que les solutions du problème discret (P_h) convergent fortement dans $L^\infty(\Omega)$ vers les solutions du problème (P).

Lemme 2.3.3. *Supposons que l'hypothèse $H3$ est satisfaite et soient $v, v_h \in L^\infty(\Omega)$ tels que $\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$. Si*

$$\lim_{h\to 0} \|v_h - v\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

alors

$$\lim_{h\to 0} J_h(v_h) = J(v).$$

Démonstration. Prenant en compte la définition de J et de J_h, et utilisant des arguments classiques, on obtient

$$\begin{aligned} J(v) - J_h(v_h) &= \tfrac{1}{2}\|y_v - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{2}\|y_h(v_h) - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad -\tfrac{\lambda}{2}\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_h} \left(|y_h(v_h) - y_d|^2 + \lambda|v_h|^2\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2}\|y_v - y_h(v_h)\|^2_{L^2(\Omega)} + (y_v - y_h(v_h), y_h(v_h) - y_d) \\ &\quad +\tfrac{\lambda}{2}\|v - v_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\,(v - v_h, v_h) + \tfrac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_h}\left(|y_d|^2 + \lambda|v_h|^2\right) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |J(v) - J_h(v_h)| &\leq C\left(\|y_v\|_{L^2(\Omega)} + \|y_h(v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|y_d\|_{L^2(\Omega)}\right)\|y_v - y_h(v_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad +C\left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v_h\|_{L^2(\Omega)}\right)\|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad +C\left(\|y_d\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}\right)|\Omega\setminus\Omega_h| \\ &\leq C_M\left(\|y_v - y_h(v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega\setminus\Omega_h|\right). \end{aligned}$$

Utilisant (2.12) et (2.1), nous concluons que

$$|J(v) - J_h(v_h)| \leq C_M\left(h^2 + \|v - v_h\|_{L^2(\Omega)}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

ce qui complète la preuve. □

Lemme 2.3.4. *Supposons que l'hypothèse $H3$ est satisfaite et soit $(v_h)_h \subset U^h_{ad}$ une suite convergeant vers v pour la topologie faible-$*$ de $L^\infty(\Omega)$. Alors*

$$v \in U_{ad} \quad \textit{et} \quad J(v) \leq \liminf_{h\to 0} J_h(v_h).$$

Démonstration. Soit v la limite faible de $(v_h)_{h>0}$ dans $L^2(\Omega)$. Comme $U_{ad}^h \subset U_{ad}$ et U_{ad} est convexe fermé dans $L^2(\Omega)$, il est faiblement fermé et $v \in U_{ad}$. De l'autre côté, on a

$$\begin{aligned}
J_h(v_h) &= \tfrac{1}{2}\,\|y_h(v_h) - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)} - \tfrac{1}{2}\,\|y_v - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,\|y_v - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)} + \tfrac{\lambda}{2}\,\|v_h\|^2_{L^2(\Omega_h)} \\
&= \tfrac{1}{2}\,\|y_h(v_h) - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)} - \tfrac{1}{2}\,\|y_v - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,\|y_v - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda}{2}\,\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_h}\Big(|y_v - y_d|^2 + \lambda\,|v_h|^2\Big)\,dx. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Arguant comme dans la preuve du lemme précédent, et prenant en compte la proposition 2.2.9 et la proposition 1.3.1 nous obtenons que

$$\begin{aligned}
&\Big|\|y_h(v_h) - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)} - \|y_v - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)}\Big| \le C\,\|y_h(v_h) - y_v\|_{L^2(\Omega_h)} \\
&\le C\,\Big(\|y_h(v_h) - y_{v_h}\|_{L^2(\Omega)} + \|y_{v_h} - y_v\|_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&\le C\,\Big(h^2 + \|y_{v_h} - y_v\|_{L^2(\Omega)}\Big) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

D'un autre côté, la semicontinuité inférieure de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ implique que

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \le \liminf_{h\to 0}\,\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus\Omega_h}\Big(|y_v - y_d|^2 + \lambda\,|v_h|^2\Big)\,dx &\le \Big(\|y_v - y_d\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega)}\Big)\,|\Omega\setminus\Omega_h| \\
&\le C\,|\Omega\setminus\Omega_h| \le Ch^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

La conclusion suit en prenant en compte ces résultats de convergence et passant à la limite dans (2.18). □

Proposition 2.3.5. *Supposons que l'hypothèse $H3$ est satisfaite, et soit $(\bar u_h)_{h>0}$ est une suite de solutions de (P_h). Il existe alors une sous-suite (encore indexée par h) qui converge pour la topologie faible-$*$. Si la sous-suite $(\bar u_h)_{h>0}$ converge pour la topologie faible-$*$ vers $\bar u$, alors $\bar u$ est une solution de (P). De plus*

$$\lim_{h\to 0} J_h(\bar u_h) = J(\bar u) = \min(P). \qquad (2.21)$$

Démonstration. La suite $(\bar u_h)_{h>0}$ étant bornée dans $L^\infty(\Omega)$, il existe une sous-suite, encore indexée par h, qui converge vers $\bar u$ pour la topologie faible-$*$ de $L^\infty(\Omega)$. Grâce au lemme 2.3.4, $\bar u \in U_{ad}$ et

$$J(\bar u) \le \liminf_{h\to 0} J_h(\bar u_h). \qquad (2.22)$$

D'autre part, soit $\bar{w}$ une solution de (P), et considérons $\Pi_h : L^1(\Omega) \longrightarrow U_h$ l'opérateur d'interpolation défini par

$$\Pi_h v_{|T} = \frac{1}{|T|}\int_T v(x)dx \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h,$$

et soit

$$w_{h|\widehat{T}} = \Pi_h \bar{w}_{|T} \quad \forall\, \widehat{T} \in \hat{\mathcal{T}}_h,$$

où $T \in \mathcal{T}_h$ est le triangle associé à $\widehat{T}$. Une fois que $\bar{w} \in W^{1,\infty}(\Omega_h)$, grâce au théorème 16.1 dans [7] on a

$$\begin{aligned} \|\bar{w} - w_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} &= \max_{T\in\mathcal{T}_h} \|\bar{w} - w_h\|_{L^\infty(T)} \\ &= \max_{T\in\mathcal{T}_h} \|\bar{w} - \Pi_h \bar{w}_{|T}\|_{L^\infty(T)} \\ &\le Ch\|\bar{w}\|_{W^{1,\infty}(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\bar{w} - w_h\|_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|\bar{w} - w_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} + |\Omega \setminus \Omega_h|\right) \le Ch.$$

D'après le lemme 2.3.3, on obtient

$$\lim_{h\to 0} J_h(w_h) = J(\bar{w}) = \min(P).$$

De plus, w_h est admissible pour (P_h), et

$$J_h(\bar{u}_h) \le J_h(w_h).$$

Passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\liminf_{h\to 0} J_h(\bar{u}_h) \le \limsup_{h\to 0} J_h(\bar{u}_h) \le \limsup_{h\to 0} J_h(w_h) = J(\bar{w}). \tag{2.23}$$

D'après (2.22) et (2.23), on obtient

$$J(\bar{u}) = \min(P)$$

d'où le résultat □

le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.3.6. *Supposons que l'hypothèse $H3$ est satisfaite. Alors*

$$\lim_{h\to 0} \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \tag{2.24}$$

Démonstration. La preuve est divisée en deux parties.

Partie 1. Nous allons montrer que

$$\lim_{h\to 0} \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

De simple calculs montrent que

$$\begin{aligned}
\tfrac{\lambda}{2}\|\bar{u}_h - \bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} &= \tfrac{\lambda}{2}\|\bar{u}_h\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{\lambda}{2}\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(\bar{u}, \bar{u} - \bar{u}_h) \\
&= J_h(\bar{u}_h) - J(\bar{u}) + \tfrac{\lambda}{2}\|\bar{u}_h\|^2_{L^2(\Omega\setminus\Omega_h)} + \lambda(\bar{u}, \bar{u} - \bar{u}_h) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\|y_h(\bar{u}_h) - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)} + \tfrac{1}{2}\|y_{\bar{u}} - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= J_h(\bar{u}_h) - J(\bar{u}) + \lambda(\bar{u}, \bar{u} - \bar{u}_h) + \tfrac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_h}\left(|y_{\bar{u}_h}|^2 + \lambda|\bar{u}_h|^2\right)dx \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\|y_h(\bar{u}_h) - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)} + \tfrac{1}{2}\|y_{\bar{u}} - y_d\|^2_{L^2(\Omega_h)}.
\end{aligned}$$

la conclusion suit grâce à (2.21), (2.20), (2.19) et à la convergence faible de $(\bar{u}_h)_h$ vers $\bar{u}$.

Partie 2. D'après les théorèmes $1.4.7$ et $2.3.2$, il existe $\bar{s} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ et $\bar{s}_h \in L^\infty(\Omega_h)$ tels que

$$p_{\bar{u}}(x) + \lambda\bar{s}(x) = 0 \qquad \forall x \in \widehat{T} \text{ et } \forall\, \widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_h, \tag{2.25}$$

$$\bar{s}_{h|T} = s_T, \quad \int_T (p_h(\bar{u}_h) + \lambda s_T)dx = 0 \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Cette dernière identité implique que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, il existe $x_T \in T$ tel que

$$p_h(\bar{u}_h)(x_T) + \lambda s_T = 0. \tag{2.26}$$

• Fixons $T \in \mathcal{T}_h$ et soit $x \in T$. Grâce à (2.25) et (2.26) et à la continuité lipschitzienne de $p_{\bar{u}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda|\bar{u}(x) - \bar{u}_h(x)| &= \lambda\left|\mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}(\bar{s}(x)) - \mathrm{Proj}_{[\alpha,\beta]}(\bar{s}_h(x))\right| \\
&\le \lambda|\bar{s}(x) - \bar{s}_h(x)| = \lambda|\bar{s}(x) - s_T| \\
&= |(p_{\bar{u}}(x) - p_h(\bar{u}_h)(x_T)| \\
&\le |p_{\bar{u}}(x) - p_{\bar{u}}(x_T)| + |p_{\bar{u}}(x_T) - p_h(\bar{u}_h)(x_T))| \\
&\le C|x - x_T| + \|p_{\bar{u}} - p_h(\bar{u}_h)\|_{L^\infty(T)} \\
&\le C\left(h + \|p_{\bar{u}} - p_h(\bar{u}_h)\|_{L^\infty(T)}\right),
\end{aligned}$$

et par conséquent, en prenant en compte (2.14) il vient que

$$\begin{aligned}
\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} &= \sup_{T\in\mathcal{T}_h}\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(T)} \\
&\le C\left(h + \|p_{\bar{u}} - p_h(\bar{u}_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)}\right) \\
&\le C\left(h + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

• Considérons maintenant $\widehat{T} \in \partial\widehat{\mathcal{T}_h}$ et soit T l'élément de $\partial\mathcal{T}_h$ correspondant ($\partial\widehat{\mathcal{T}_h}$ et $\partial\mathcal{T}_h$ représentent l'ensemble des triangles frontière dans $\widehat{\mathcal{T}_h}$ et $\mathcal{T}_h$, respectivement). Pour $\hat{x} \in \widehat{T} \setminus T$, soit x sa projection sur la frontière Γ_h de Ω_h. Prenant en compte la continuité lipschitzienne de $\bar{u}$, on obtient

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(\hat{x}) - \bar{u}_h(\hat{x})| &\leq |\bar{u}(\hat{x}) - \bar{u}(x)| + |\bar{u}(x) - \bar{u}_h(\hat{x})| \\
&= |\bar{u}(\hat{x}) - \bar{u}(x)| + |\bar{u}(x) - \bar{u}_h(x)| \\
&\leq C\,|\hat{x} - x| + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \\
&\leq Ch + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\widehat{T}\setminus T)} \leq Ch + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)},$$

et

$$\begin{aligned}
\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega\setminus\Omega_h)} &= \sup_{\widehat{T}\in\partial\mathcal{T}_h} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\widehat{T}\setminus T)} \\
&\leq Ch + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Combinant (2.27) et (2.28), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} &= \max\left(\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}, \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega\setminus\Omega_h)}\right) \\
&\leq C\left(h + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. $\square$

Bibliographie

[1] N. Arada, E. Casas, F. Tröltzsch, Error estimates for the numerical approximation of a semilinear elliptic control problem, Comp. Optim. Appli. 23, 201-229, 2002.

[2] J.F. Bonnans, E. Casas, An extension of Pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities, SIAM J. Control and Optim., 33, pp. 274–298, 1995.

[3] J.F. Bonnans, E. Casas, Un principe de Pontryagine pour le contrôle des systèmes semilinéaires elliptiques, J. Differential Equations, 90, pp. 288-303, 1991.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1987.

[5] E. Casas, Optimal control of PDE theory and numerical analysis, CIMPA School on Optimization and Control, CIEM-Castro Urdiales, August-September 2006

[6] E. Casas, M. Mateos, Uniform convergence of the FEM. Applications to state constrained control problems Appl. Math. 21, pp. 67-100, 2002

[7] P.G. Ciarlet, Basic error estimates for elliptic problems, in P.G. Ciarlet and J.L. Lions, editors, Handbook of Numerical Analysis, volume II, Finite Element Methods (Part 1), pp. 17–352. North-Holland, 1991.

[8] M. Denbri, L. Khelifouche, Approximation d'un problème de contrôle optimal gouverné par une EDP semi-linéaire elliptique, Mémoire de Master Analyse Fonctionnelle, Université Mohamed Seddik Benyahia, Jijel, 2018.

[9] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[10] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.

[11] M. Mateos, Problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones semilineales con restricciones de tipo integral sobre el gradiente del estado, Ph. D. thesis, University of Cantabria, Santander, 2000.

[12] P.A. Raviart, J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1988.

[13] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier Grenoble 15, pp. 189-258, 1965.