Nadir Arada

Analyse mathématique des équations de Navier-Stokes

COURS DE DOCTORAT (SPÉCIALITÉ EDP ET APPLICATIONS)

Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Table des matières

Introduction

Ce cours est une initiation à l'analyse mathématique des équations de Navier-Stokes dans le cas stationnaire et instationnaire. Utilisant la méthode de galerkin, des résultats d'existence de solution sont établis. L'unicité de ces solutions est aussi abordée.

Chapitre 1

Équations de Stokes stationnaires

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la solvabilité du système de Stokes stationnaire donné par

$$\begin{cases} -\mu\,\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\boldsymbol{u}$ est la vitesse du fluid, π est la pression, $\boldsymbol{f}$ est la densité massique de forces extérieures, $\mu > 0$ est la viscosité du fluide, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or $n = 3$) est un domaine borné dont la frontière Γ est de classe C^1.

Le plan du chapitre est le suivant : dans la première section nous présentons les différentes notations et posons le cadre fonctionnel. Dans la section suivante, nous établissons une formulation variationnelle et nous nous en inspirons pour définir un problème approché obtenu en utilisant une méthode de Galerkin appropriée.

Utilisant des arguments de compacité, nous établissons l'existence de solutions approchées, des estimations correspondantes et prouvons que la limite est une solution faible de notre problème. L'unicité de cette solution est ensuite établie.

1.2 Notations et cadre fonctionnel

La plupart des résultats énoncés dans cette section sont classiques et peuvent-être trouvés dans n'importe quel bon livre d'analyse fonctionnel (voir par eexmple [2]) ; Nous les rappelons pour le confort du lecteur.

Soit $1 \leq p < \infty$. Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^p(\Omega)$ si

$$\int_\Omega |v(x)|^p \; dx < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_p = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \; dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^\infty(\Omega)$ si

$$\text{ess}\sup_{x\in\Omega} |v(x)| = \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \; |v(x)| \leqslant M \text{ p.p. dans } \Omega\} < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_\infty = \text{ess sup}_{x\in\Omega} |v(x)|,$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Dans toute la suite, nous utiliserons la notation suivante

$$\begin{aligned}
(u,v) &= \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx, \qquad u \in \boldsymbol{L}^p(\Omega),\ v \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega),\\
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{u}(x)\cdot\boldsymbol{v}(x)\,dx\\
&= \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega u_j(x)\,v_j(x)\,dx, \qquad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)^n,\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)^n,\\
(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}) &= \int_\Omega \boldsymbol{\eta}(x) : \boldsymbol{\zeta}(x)\,dx\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \eta_{ij}(x)\,\zeta_{ij}(x)\,dx, \qquad \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)^{n\times n},\ \boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)^{n\times n}.
\end{aligned}$$

Vu que beaucoup des quantités qu'on utilisera sont des fonctions vectorielles, la notation sera simplifiée et on omettra la dimension n dans la notation de l'espace (le sens sera clair d'après le contexte).

Passons à présent à la définition de certains espaces de Sobolev et à l'énoncé de propriétés utiles qui y sont relatives.

Définition 1.2.1. *Soit $p \in [1,\infty]$. L'espace de Sobolev $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega) \mid \nabla\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)\},$$

où le gradient est à prendre dans le sens faible.

Muni de la norme

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,p} = \left(\|\boldsymbol{v}\|_p^p + \|\nabla\boldsymbol{v}\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \le p < \infty,$$

on vérifie que $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
On pose $\boldsymbol{H}^1(\Omega) = \boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$; Muni du produit scalaire

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{H}^1} = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{L}^2} + (\nabla\boldsymbol{v},\nabla\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{L}^2},$$

c'est est un espace de Hilbert.

En plus des liens évidents avec les espaces de Lebesgue $\boldsymbol{L}^2$, conséquence de leur propre définition, l'espace de Sobolev $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ est lié à d'autres espaces de Lebesgue via les injections de Sobolev. Plus précisemment, on a

- Si $n = 2$, alors $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1,+\infty[$
- Si $n > 2$, alors $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^{2^*}(\Omega)$ avec $2^* = \frac{2n}{n-2}$

Toutes ces injections sont continues et engendrent les inégalités de Sobolev

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}\|_q &\leq C_S \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^1} && \text{pour tout } q \in [1, +\infty[, \quad \text{si } n = 2, \\ \|\boldsymbol{v}\|_{2^*} &\leq C \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}^1} && \text{si } n > 2, \end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$.

Nous rappelons aussi des résultats de compacité qui nous seront utiles.

- Si $n = 2$, alors $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$
- Si $n > 2$, alors $\boldsymbol{H}^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, 2^*[$ avec $2^* = \frac{2n}{n-2}$

En particulier, l'injection de $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Définissons à présent un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ et qui est utile pour l'étude des problèmes avec conditions au bord de Dirichlet homogènes.

Définition 1.2.2. *Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$.*

Le résultat suivant caractérise l'espace $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.2.3. *L'espace $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ coincide avec le sous-espace de $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ constitué de fonctions qui s'annulent au bord.*

Un résultat essentiel et lié à l'espace $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ est l'inégalité suivante.

Proposition 1.2.4. (*Inégalité de Poincaré*) *Soit $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 \leq C_P \|\nabla \boldsymbol{v}\|_2 ,$$

où $C_P > 0$ est une constante dépendant de n et de Ω.

Une conséquence importante de l'inégalité de Poincaré est le résultat suivant qui fournit une norme équivalente dans $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Corollaire 1.2.5. *La semi-norme*

$$|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} = \|\nabla \boldsymbol{v}\|_2$$

est une norme sur $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$.

Le dual de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ (i.e. l'espace des formes linéaire et continues sur $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$) est appelé $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. Nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)}$ le produit de dualité entre $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ et son dual.

1.3 Existence et unicité de solution

1.3.1 Formulation faible

Commençons par observer que $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) = \overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}}$ et donc

$$\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega).$$

De plus, si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$, alors

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Pour trouver la formulation variationnelle, on considère le produit dual de chaque membre du système (1.1) par une fonction test scalaire $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\langle f_i, v_i \rangle_{H^{-1}, H_0^1} &= -\mu \left\langle (\Delta \boldsymbol{u})_i, v_i \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \left\langle (\nabla \pi)_i, v_i \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
&= -\mu \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j}, v_i \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \left\langle \frac{\partial \pi}{\partial x_i}, v_i \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
&= \mu \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \left\langle \pi, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}. \\
&= \mu \sum_{j=1}^{n} \left\langle (\nabla \boldsymbol{u})_{ij}, (\nabla \boldsymbol{v})_{ij} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \langle \pi, (\nabla \boldsymbol{v})_{ii} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \qquad \forall i = 1, \cdots, n.
\end{aligned}$$

Sommant pour $i = 1, \cdots, n$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} &= \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, v_i \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\
&= \mu \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle (\nabla \boldsymbol{u})_{ij}, (\nabla \boldsymbol{v})_{ij} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^{n} \langle \pi, (\nabla \boldsymbol{v})_{ii} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
&= \mu \langle \nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} - \langle \pi, \nabla \cdot \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}}
\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n)^\top \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$. Comme nous le verrons plus loin, pour des raisons techniques liées aux propriétés de coercivité de notre problème et afin de tenir en compte de la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$, on choisit des fonctions test à divergence nulle. L'identité précédente implique alors que

$$\mu \langle \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1}$$

pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}} = \{\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) \mid \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = 0\}$. Cette formulation faisant intervenir des fonctions test très régulières est une formulation *très faible* donnée au sens des distributions. Afin de définir une *solution faible*, nous devrions considérer des fonctions test appartenant à l'espace de Sobolev $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. L'espace le plus approprié est défini par

$$\boldsymbol{V} = \overline{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)}.$$

Des résultats classiques montrent que $\boldsymbol{V}$ peut-être caractérisé d'une manière très simple. Plus précisément, on a

$$\boldsymbol{V} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \mid \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \right\}.$$

Toutes ces considérations réunies justifient la définition suivante.

Définition 1.3.1. *Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. Alors une fonction $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ est une solution faible de* (1.1) *si*

$$\mu\,(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}. \tag{1.2}$$

1.3.2 Solvabilité

Il est facile de vérifier que (1.2) entre dans le cadre d'application directe du théorème de Lax-Milgram mais nous optons pour une approche plus constructive et qui pourra être généralisée au cas des équations de Navier-Stokes stationnaires et instationnaires. En effet, la solution de notre problème est construite grâce à la méthode de Galerkin en utilisant un développement dans une base appropriée. Cette méthode classique est très utile pour l'étude théorique des problèmes non-linéaires. L'existence de la base que nous utiliserons, et dont les propriétés sont énoncés dans le lemme suivant, a été établie dans [3], Lemme VII.2.1.

Lemme 1.3.2. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Alors il existe une famille dénombrable $(\boldsymbol{\omega}_k)_k \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}$ tel que*

- (i) $(\boldsymbol{\omega}_k)_k$ *est une base dans $\boldsymbol{V}$ et son enveloppe linéaire est dense dans $\boldsymbol{V}$.*
- (ii) $(\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_j) = \delta_{ij}$ *pour tout $i, j \in \mathbb{N}$.*
- (iii) *Soit $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\left\| \boldsymbol{\phi} - \sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{\omega}_i \right\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon.$$

Utilisant cette base et s'inspirant de la formulation variationnelle (1.2), nous définissons notre problème approché comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \boldsymbol{u}_\ell = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \zeta_{i\ell}\, \boldsymbol{\omega}_i \text{ solution de} \\ \\ \mu\,(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{\omega}_j) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad 1 \leq j \leq \ell. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Afin de prouver que le problème discret (1.3) admet une solution, nous avons besoin du résultat suivant. Il concerne les points d'annulation d'une fonction continue de $\mathbb{R}^\ell$ sur lui-même et est une généralisation au cas $\ell > 1$ du théorème des valeurs intermédiaires (encore appelé théorème de Bolzano) qui stipule qu'une fonction réelle continue qui atteint des valeurs de signes opposés aux bornes d'un intervalle doit nécessairement s'annuler à l'intérieur de cet intervalle.

Lemme 1.3.3. *(Voir le lemme $9.3.1$ dans [3]) Soit $\mathbb{P}$ une fonction continue de $\mathbb{R}^\ell$, $\ell \geq 1$, dans lui-même telle que pour un certain $\rho > 0$*

$$\mathbb{P}\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta} \geq 0 \qquad \textit{pour tout } \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^\ell \textit{ tel que } |\boldsymbol{\zeta}| = \rho.$$

Alors, il existe $\boldsymbol{\zeta}_0 \in \mathbb{R}^\ell$, $|\boldsymbol{\zeta}_0| \leq \rho$ tel que $\mathbb{P}\boldsymbol{\zeta}_0 = 0$.

Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 1.3.4. *Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. Alors le problème* (1.3) *admet au moins une solution $\boldsymbol{u}_\ell^0$. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\left|\boldsymbol{u}_\ell^0\right|_{\boldsymbol{H}_0^1} \leq \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}}{\mu}, \tag{1.4}$$

où C_K est la constante de Korn.

Démonstration. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ fixé et considérons l'application $\mathbb{P} : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ définie par

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})_j = \mu\left(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{\omega}_j\right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad 1 \leq j \leq \ell,$$

où $\boldsymbol{u}_\ell = \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_i$. Il est clair que $\mathbb{P}$ est continue et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} &= \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})_j \zeta_j \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} \Big((\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{\omega}_j) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \Big) \zeta_j \\
&= \left(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \nabla \boldsymbol{\omega}_j \right) - \left\langle \boldsymbol{f}, \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \, \boldsymbol{\omega}_j \right\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \\
&= \mu\left(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{u}_\ell\right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \\
&= \mu \left|\boldsymbol{u}_\ell\right|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

De plus, par définition, on a

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \left|\boldsymbol{u}_\ell\right|_{\boldsymbol{H}_0^1}. \tag{1.6}$$

Combinant (1.5) et (1.6), nous déduisons que

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} \geq \Big(\left|\boldsymbol{u}_\ell\right|_{\boldsymbol{H}_0^1} - \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \Big) \left|\boldsymbol{u}_\ell\right|_{\boldsymbol{H}_0^1}. \tag{1.7}$$

Introduisons alors l'application $|\cdot|_*$ définie par

$$|\boldsymbol{\zeta}|_* = \left\| \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \nabla \boldsymbol{\omega}_j \right\|_2$$

et vérifions que c'est une norme sur $\mathbb{R}^\ell$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont directes. Reste à montrer que

$$|\boldsymbol{\zeta}|_* = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\zeta} = 0.$$

Pour cela, remarquons qu'en utilisant l'inégalité de Poincaré, on a

$$\left\| \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_j \right\|_2 \leq C_P \left\| \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \nabla \boldsymbol{\omega}_j \right\|_2 = C_P \, |\boldsymbol{\zeta}|_* .$$

Ainsi

$$|\boldsymbol{\zeta}|_* = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_j = 0$$

ce qui, vu que $(\boldsymbol{\omega}_j)_{j=1,\cdots,\ell}$ est libre, implique à son tour que $\boldsymbol{\zeta} = 0$. Substituant dans (1.7), il vient que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} \quad & \geq (\mu \, |\boldsymbol{\zeta}|_* - \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}) \, |\boldsymbol{\zeta}|_* \\ & \longrightarrow +\infty \qquad \text{quand } |\boldsymbol{\zeta}|_* \to +\infty. \end{aligned}$$

Nous déduisons qu'il existe donc une constante positive ρ tel que $\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} > 0$ pour tout $\boldsymbol{\zeta}$ tel que $|\boldsymbol{\zeta}|_* = \rho$ et, d'après le lemme 1.3.3, il existe $\boldsymbol{\zeta}_\ell^0 \in \mathbb{R}^\ell$, $\left|\boldsymbol{\zeta}_\ell^0\right|_* \leq \rho$ tel que $\mathbb{P}\boldsymbol{\zeta}_\ell^0 = 0$. La fonction $\boldsymbol{u}_\ell^0 = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \boldsymbol{\zeta}_{i\ell}^0 \, \boldsymbol{\omega}_i$ satisfait donc

$$\left(\nabla \boldsymbol{u}_\ell^0, \nabla \boldsymbol{\omega}_j\right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} = 0$$

pour tout $1 \leq j \leq \ell$. Autrement dit, $\boldsymbol{u}_\ell^0$ est solution du problème (1.3).

Multiplions alors (1.3) par $\zeta_{i\ell}^0$ et sommons pour obtenir

$$\left(\nabla \boldsymbol{u}_\ell^0, \nabla \boldsymbol{u}_\ell^0\right) = \left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell^0 \right\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \tag{1.8}$$

et donc

$$\mu \left|\boldsymbol{u}_\ell^0\right|_{\boldsymbol{H}_0^1}^2 = \left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell^0 \right\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \left|\boldsymbol{u}_\ell^0\right|_{\boldsymbol{H}_0^1}$$

ce qui donne l'estimation recherchée. □

Nous sommes en mesure de prouver le résultat d'existence et d'unicité concernant notre problème.

Théorème 1.3.5. *Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. Alors le problème* (1.1) *admet une solution faible unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$|\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} \leq \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}}{\mu}. \tag{1.9}$$

Démonstration. La démonstration est divisée en deux parties.

Partie 1. (Existence d'une solution) Soit $\boldsymbol{u}_\ell^0$ la solution du problème approché 1.3. Prenant en compte l'estimation (1.4), nous déduisons que la suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ est bornée dans $\boldsymbol{V}$. Il existe alors une sous-suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ (toujours indexée par ℓ pour simplifier) et un vecteur $\boldsymbol{u}$ tel que

$$\boldsymbol{u}_\ell^0 \longrightarrow \boldsymbol{u} \qquad \text{faiblement dans } V.$$

En passant à la limite dans (1.3), on obtient

$$\mu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{\omega}_j\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1},\boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

et grâce au lemme 1.3.2, nous déduisons que

$$\mu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1},\boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}.$$

La densité de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ dans $\boldsymbol{V}$ implique alors que

$$\mu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1},\boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$

autrement dit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ est une solution faible de (1.1). L'estimation (1.9) est obtenue en passant à la limite dans (1.4) et en tenant en compte de la semi-continuité inférieure de la norme $|\cdot|_{\boldsymbol{H}_0^1}$.

Partie 2. (Unicité) Supposons que $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux solutions faibles de (1.1). Alors

$$\left(\nabla\left(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\right), \nabla \boldsymbol{v}\right) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Choisissant alors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ et utilisant l'inégalité de Poincaré, nous déduisons que

$$\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_2^2 \leq C_P^2 \left|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\right|_{\boldsymbol{H}_0^1}^2 = C_P^2 \left(\nabla\left(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\right), \nabla\left(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\right)\right) = 0,$$

ce qui montre que $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ et complète la preuve. □

Une fois garantie l'existence et l'unicité d'une solution faible $\boldsymbol{u}$ au problème (1.1), la question suivante concerne l'existence d'une pression π adéquate qui y soit associée. Ceci fait l'objet du corollaire 1.3.7 ci-dessous. Pour établir ce résultat, nous aurons besoin d'une version du théorème de De Rham posé dans $H^{-1}(\Omega)$.

Lemme 1.3.6. (*Voir Lemme* 2.7 *dans* [*1*]) *Soit* Ω *un ouvert, borné de frontière lipschitzienne. Une distribution* $\boldsymbol{\mathcal{F}} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ *satisfait*

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1},\boldsymbol{H}_0^1} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$$

si, et seulement si, il existe $\pi \in L_0^2(\Omega) = \left\{q \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega q\, dx = 0\right\}$ *tel que* $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \nabla\pi$. *De plus, si* Ω *est connexe alors il existe une constante* $C > 0$ *indépendante de* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *tel que*

$$\|\pi\|_2 \leq C \left\|\boldsymbol{\mathcal{F}}\right\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}.$$

Corollaire 1.3.7. *Supposons que les hypothèses du théorème* $1.3.5$ *sont satisfaites et soit* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ *la solution faible de* (1.1). *Alors il existe* $\pi \in L_0^2(\Omega)$ *unique tel que* $(1.1)_1$ *soit définie dans* $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. *De plus, si* Ω *est connexe alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\pi\|_2 \leq C \left(\mu \, |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \right),$$

où $C > 0$ *est une constante dépendant seulement de* Ω *et de* n.

Démonstration. D'après que précède, le problème variationnel (1.2) admet une solution unique $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}$. Soit $\mathcal{L}$ l'application linéaire définie par

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = \mu \, (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1}, \qquad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

Il est facile de voir que $\mathcal{L}$ est bien définie et que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\boldsymbol{v})| &\leq |\mu \, (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})| + \left| \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \right| \\ &\leq \left(\mu \, |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \right) |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. D'après le lemme 1.3.6, il existe $\pi \in L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = - \langle \nabla \pi, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} = (\pi, \nabla \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

De plus, si Ω est connexe alors il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de Ω et n, tel que

$$\|\pi\|_2 \leq C \, \|\nabla \pi\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} = C \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \frac{\left| \langle \nabla \pi, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \right|}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|\pi\|_2 &\leq C \, \|\nabla \pi\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} = \kappa \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \frac{|\mathcal{L}(\boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1}} \\ &\leq C \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \frac{\left(\mu |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \right) |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1}}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1}} \\ &\leq C \left(\mu \, |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \right), \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. □

Remarque 1.3.8. *Combinant l'estimation donnée par le résultat précédent avec* (1.9), *il est possible d'estimer la pression* π *en fonction de* $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}$.

Chapitre 2

Équations de Navier-Stokes stationnaires

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solutions faible au problème de Navier-Stokes stationnaire

$$\begin{cases} -\mu\,\Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega,\\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

L'approche considérée, similaire à celle utilisée dans le chapitre précédent, est classique et consiste dans l'approximation du problème variationnel associé en utilisant une méthode de Galerkin appropriée. Nous commençons par montrer que ce problème approché admet une solution et établissons des estimations a priori correspondantes. Des arguments de compacité nous permettent ensuite de passer à la limite et d'établir l'existence d'une solution faible.

2.2 Existence et unicité de solution

2.2.1 Formulation faible

La seule différence par rapport au problème considéré au chapitre précédent est liée au terme convectif et à la forme trilinéaire donnée par

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

qui lui est associé. Prenant en compte le fait que $n = 2, 3$ et que Ω est borné, grâce aux injections de Sobolev classiques et à l'inégalité de Poincaré, nous avons que

$$\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$$

et donc

$$\|\boldsymbol{v}\|_4 \le C_S\,|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

Par conséquent, la forme b est bien définie sur $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\times\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\times\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Ces considérations étant faites, nous définissons la solution faible de notre problème de la manière suivante.

Définition 2.2.1. *Soit $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. Alors une fonction $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}$ est une solution faible de* (2.1) *si*

$$\mu\,(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}) + b\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1},\boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}. \tag{2.2}$$

2.2.2 Propriétés de la forme trilinéaire associée au terme convectif

Nous considérons la forme trilinéaire b associée au terme convectif et étudions certaines de ses propriétés les plus utiles.

Lemme 2.2.2. *Soit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Alors*

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0, \tag{2.3}$$

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}). \tag{2.4}$$

Démonstration. Pour prouver (2.3), il suffit de remarquer que

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \left(|\boldsymbol{v}|^2 \right) dx,$$

d'appliquer la formule de Green et d'utiliser le fait que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ pour obtenir

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \left(- \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) |\boldsymbol{v}|^2 \, dx + \int_\Gamma \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \cdot |\boldsymbol{v}|^2 \, ds \right) = 0.$$

La propriété (2.4) est alors une conséquence de la propriété (2.3). En effet,

$$\begin{aligned} 0 &= b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \\ &= b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

Lemme 2.2.3. *Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Alors*

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leq \kappa |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1} |\boldsymbol{w}|_{\boldsymbol{H}_0^1},$$

où $\kappa > 0$ est une constante dépendant uniquement de Ω et de n.

Démonstration. De simples calculs, avec l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev montrent que

$$\begin{aligned} |b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| &\leq \|\boldsymbol{u}\|_4 \|\nabla \boldsymbol{v}\|_2 \|\boldsymbol{w}\|_4 \\ &\leq C_S^2 |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1} |\boldsymbol{w}|_{\boldsymbol{H}_0^1}, \end{aligned}$$

où C_S est la constante de Sobolev. □

2.2.3 Solvabilité

Comme dans le cas du problème de Stokes, la solution du problème de Navier-Stokes est construite grâce à la méthode de Galerkin, en utilisant un développement dans la base donnée par le lemme 1.3.2. Le problème approché est défini par

$$\begin{cases} \text{Chercher } \boldsymbol{u}_\ell = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \zeta_{i\ell}\, \boldsymbol{\omega}_i \text{ solution de} \\ \mu(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{\omega}_j) + b(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{\omega}_j) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad 1 \leq j \leq \ell. \end{cases} \tag{2.5}$$

Proposition 2.2.4. *Soit* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. *Alors le problème* (2.5) *admet au moins une solution* $\boldsymbol{u}_\ell^0$. *De plus, on a l'estimation suivante*

$$\left|\boldsymbol{u}_\ell^0\right|_{\boldsymbol{H}_0^1} \leq \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}}{\mu}. \tag{2.6}$$

Démonstration. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ fixé et considérons l'application $\mathbb{P} : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ définie par

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})_j = \mu\,(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{\omega}_j) + b\,(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{\omega}_j) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad 1 \leq j \leq \ell,$$

où $\boldsymbol{u}_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_i$. Il est clair que $\mathbb{P}$ est continue. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} &= \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})_j \zeta_j \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\mu\,(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{\omega}_j) + b\,(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{\omega}_j) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1}\Big) \zeta_j \\
&= \mu\Big(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j\, \nabla \boldsymbol{\omega}_j\Big) + b\Big(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_j\Big) - \Big\langle \boldsymbol{f}, \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j\, \boldsymbol{\omega}_j \Big\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \\
&= \mu\,(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{u}_\ell) + b\,(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1},
\end{aligned}$$

et prenant en compte (2.3), on obtient

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} = \mu\,(\nabla \boldsymbol{u}_\ell, \nabla \boldsymbol{u}_\ell) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1}.$$

Le reste de la démonstration concernant l'existence d'une solution $\boldsymbol{u}_\ell^0$ au problème (2.5) est identique à celui de la preuve de la proposition 1.3.4. □

Théorème 2.2.5. *Soit* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. *Alors le problème* (2.1) *admet au moins une solution faible unique* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$. *De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$|\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} \leq \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}}{\mu}. \tag{2.7}$$

Démonstration. Les arguments utilisés pour prouver l'existence d'une solution faible de (2.1) sont identiques à ceux utilisés dans la preuve du théorème 1.3.5 pour le problème de Stokes. La seule différence notable est liée au terme convectif et au passage à la limite correspondant.

Prenant en compte l'estimation (2.6), nous déduisons que la suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ est bornée dans $\boldsymbol{V}$. Il existe alors une sous-suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ (toujours indexée par ℓ pour simplifier) et un vecteur $\boldsymbol{u}$ tel que

$$\boldsymbol{u}_\ell^0 \longrightarrow \boldsymbol{u} \qquad \text{faiblement dans } \boldsymbol{V}.$$

Utilisant le fait que l'injection de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ est compacte, nous déduisons que

$$\boldsymbol{u}_\ell^0 \longrightarrow \boldsymbol{u} \qquad \text{fortement dans } \boldsymbol{L}^2(\Omega).$$

L'inégalité de Hölder, la propriété (2.4) et l'estimation (2.6), impliquent alors que

$$\begin{aligned}
\left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right) - b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right| &= \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right| \\
&\leq \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right)\right| + \left|b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right| \\
&\leq \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right)\right| + \left|-b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right)\right| \\
&\leq \left\|\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right\|_2 \left\|\nabla \boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_2 \|\boldsymbol{v}\|_\infty + \|\boldsymbol{u}\|_2 \left\|\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right\|_2 \|\nabla \boldsymbol{v}\|_\infty \\
&\leq C \left\|\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right\|_2 \|\boldsymbol{v}\|_{W^{1,\infty}} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } \ell \to \infty
\end{aligned}$$

pour tout $v \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Prenant en compte ces résultats de convergence et passant à la limite dans (2.5), on obtient

$$\mu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{\omega}_j\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}_j\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

et grâce au lemme 1.3.2, nous déduisons que

$$\mu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}.$$

La densité de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ dans $\boldsymbol{V}$ implique alors que

$$\mu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$

autrement dit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ est une solution faible de (2.1). L'estimation (2.7) est obtenue de la même manière que (1.9). □

Si l'existence d'une solution faible pour (2.1) est garantie, l'unicité de cette solution ne peut-être obtenue que si l'on impose des restrictions sur la taille des données. Plus précisemment, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2.6. *Soit* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$*. Si la condition suivante*

$$\frac{\kappa \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}}{\mu^2} < 1 \tag{2.8}$$

est satisfaite, alors l'équation (2.1) *admet une solution faible unique* (κ *est la constante apparaissant dans le lemme 2.2.3*).

Démonstration. Supposons que $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux solutions faibles de (2.1) et posons $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$. Substituant dans la formulation variationnelle (2.2), utilisant (2.3), le lemme 2.2.3 et l'estimation (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\mu\, |\boldsymbol{u}|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} = \mu\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u}\right) &= -b(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}) + b\left(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}\right) \\
&= -b\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\right) - b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}\right) = -b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}\right) \\
&\leq \kappa\, |\boldsymbol{u}_2|_{\boldsymbol{H}_0^1} |\boldsymbol{u}|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} \leq \frac{\kappa \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}}{\mu} |\boldsymbol{u}|^2_{\boldsymbol{H}_0^1}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(\mu - \frac{\kappa \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}}{\mu}\right) |\boldsymbol{u}|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} \leq 0$$

et donc $\boldsymbol{u}_1 \equiv \boldsymbol{u}_2$ si $\mu - \frac{\kappa \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}}}{\mu} > 0$. □

Corollaire 2.2.7. *Supposons que les hypothèses du théorème $2.2.5$ sont satisfaites et soit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ la solution faible de* (2.1)*. Alors il existe $\pi \in L_0^2(\Omega)$ unique tel que $(2.1)_1$ soit définie dans $\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. De plus, si Ω est connexe alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\pi\|_2 \leq \tilde{\kappa} \left(\mu \, |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \kappa \, |\boldsymbol{u}|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \right),$$

où $\tilde{\kappa} > 0$ est une constante dépendant seulement de Ω et de n.

Démonstration. D'après que précède, le problème variationnel (2.2) admet une solution unique $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}$. Soit $\mathcal{L}$ l'application linéaire définie par

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = \mu \, (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) + b \, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1}, \qquad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

Il est facile de voir que $\mathcal{L}$ est bien définie et que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\boldsymbol{v})| \quad & \leq |\mu \, (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})| + |b \, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| + \left| \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \right| \\ & \leq \left(\mu \, |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \kappa \, |\boldsymbol{u}|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \right) |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. D'après le lemme 1.3.6, il existe $\pi \in L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = - \langle \nabla \pi, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} = (\pi, \nabla \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

De plus, si Ω est connexe alors il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de Ω et n, tel que

$$\|\pi\|_2 \leq C \, \|\nabla \pi\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} = C \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \frac{\left| \langle \nabla \pi, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}, \boldsymbol{H}_0^1} \right|}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|\pi\|_2 \quad & \leq C \, \|\nabla \pi\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} = C \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \frac{|\mathcal{L}(\boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1}} \\ & \leq C \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \frac{\left(\mu |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \kappa |\boldsymbol{u}|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \right) |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1}}{|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{H}_0^1}} \\ & \leq C \left(\mu \, |\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \kappa \, |\boldsymbol{u}|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^{-1}} \right), \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. $\square$

Chapitre 3

Équations de Navier-Stokes instationnaires

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solutions faible au problème de Navier-Stokes instationnaire un système décrivant l'écoulement instationnaire d'un fluide incompressible et donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega\times(0,T), \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,T), \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma\times(0,T), \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\boldsymbol{u}_0$ une condition initiale donnée, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ est un domaine borné de frontière Γ, et $T>0$ est un temps fixé. Nous notons I l'intervalle $(0,T)$, Q le cylindre espace-temps $\Omega\times I$ et $\Sigma=\Gamma\times I$.

L'approche considérée, similaire à celle utilisée dans le chapitre précédent, est classique et consiste dans l'approximation du problème variationnel associé en utilisant une méthode de Galerkin appropriée. Nous commençons par montrer que ce problème approché admet une solution et établissons des estimations a priori correspondantes. Des arguments de compacité nous permettent ensuite de passer à la limite et d'établir l'existence d'une solution faible.

3.2 Notations et cadre fonctionnel

Afin d'éliminer la pression dans la formulation faible du problème étudié, nous considérons l'espace des champs de vitesse à divergence nulle

$$\boldsymbol{H} = \left\{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega) \mid \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}.$$

L'espace $\boldsymbol{H}$ est équippé du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ induit par $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Le produit de dualité entre l'espace $\boldsymbol{V}$ (défini dans le premier chapitre) et son espace dual $\boldsymbol{V}'$ est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Les espaces $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V}'$ forment un triplet de Gelfand

$$\boldsymbol{V}\hookrightarrow\boldsymbol{H}\equiv\boldsymbol{H}'\hookrightarrow\boldsymbol{V}'$$

i.e. l'espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$ est identifié avec son dual $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{V}$ étant dense dans $\boldsymbol{H}$ avec injection continue. Une conséquence des identifications précédentes est que

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}, \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}. \tag{3.2}$$

On notera $L^2(I;\boldsymbol{X})$ l'espace des fonctions de carré intégrable définies de I dans $\boldsymbol{X}$ et muni de la norme

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(I;\boldsymbol{X})} = \left(\int_I \|v(t)\|_{\boldsymbol{X}}^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De même, $L^\infty(I;\boldsymbol{X})$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées définies de I dans $\boldsymbol{X}$ et est muni de la norme

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(I;\boldsymbol{X})} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\bar{I}} \|\boldsymbol{v}(t)\|_{\boldsymbol{X}}\,.$$

L'espace $C(\bar{I};\boldsymbol{X})$ des fonctions continues de $\bar{I}=[0,T]$ dans $\boldsymbol{X}$ est muni de la norme

$$\|\boldsymbol{v}\|_{C(\bar{I};\boldsymbol{X})} = \sup_{t\in\bar{I}} \|v(t)\|_{\boldsymbol{X}}\,.$$

Afin de gérer les dérivées par rapport au temps, on considère l'espace

$$\boldsymbol{W}(I) = \left\{\boldsymbol{v}\in L^2(I;\boldsymbol{V}) \mid \tfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\in L^2(I;\boldsymbol{V}')\right\}$$

muni de la norme $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}(I)} = \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(I;\boldsymbol{V})} + \left\|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right\|_{L^2(I;\boldsymbol{V}')}$. Il est bien connu que $\boldsymbol{W}(I)$ est un espace réflexif et qu'il satisfait les propriétés énoncées ci-dessous.

Lemme 3.2.1. *L'espace $\boldsymbol{W}(I)$ s'injecte continûment dans $C(\bar{I};\boldsymbol{H})$ et on a la formule d'intégration par parties suivante*

$$\int_0^t \left\langle \tfrac{\partial \boldsymbol{u}(s)}{\partial t}, \boldsymbol{v}(s)\right\rangle ds + \int_0^t \left\langle \tfrac{\partial \boldsymbol{v}(s)}{\partial t}, \boldsymbol{u}(s)\right\rangle ds = (\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t)) - (\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{v}(0)) \tag{3.3}$$

pour tout $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}(I)$, $t\in\bar{I}$. En particulier, on a

$$\int_0^t \left\langle \tfrac{\partial \boldsymbol{u}(s)}{\partial t}, \boldsymbol{u}(s)\right\rangle ds = \tfrac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{u}(t)\|_H^2 - \|\boldsymbol{u}(0)\|_H^2\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^t \tfrac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(s)\|_H^2\, ds \tag{3.4}$$

pour tout $\boldsymbol{u}\in W(I)$ et $t\in\bar{I}$.

Démonstration. Voir le lemme 1.2, p. 261 dans [4]. □

De plus, nous avons résultat suivant.

Lemme 3.2.2. *Soient u et g sont deux fonctions dans $L^1(I;V)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

- *Pour toute fonction $\psi\in\mathcal{D}(I)$, on a*

$$\int_I u(t)\psi'(t)\,dt = -\int_I g(t)\psi(t)\,dt.$$

- *Pour tout $w\in V'$, on a*

$$\tfrac{d}{dt}\langle u,w\rangle = \langle g,w\rangle$$

dans le sens des distributions.

Démonstration. Voir le lemme 1.1, p. 250 dans [4]. □

En plus des inégalités classiques déjà énoncées au Chapitre 1, nous aurons besoin de l'inégalité d'interpolation donnée ci-dessous. Valable seulement en dimension 2, elle permet de garantir l'unicité de la solution faible pour le problème de Navier-Stokes.

Lemme 3.2.3 (**Inégalité d'interpolation).** *On a*

$$\|\boldsymbol{v}\|_4 \leq 2^{\frac{1}{4}} \|\boldsymbol{v}\|_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_2^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Démonstration. Voir le lemme 3.3 p. 291 dans [4]. □

3.3 Existence et unicité de solution

3.3.1 Formulation faible

Les notions de *solution forte* et *solution faible* peuvent inclure des concepts différents, dépendants du contexte (en particulier de la régularité des données), et des définitions précises sont donc nécessaires.

Considérons le cas où $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{f} \in L^2(I;\boldsymbol{V}')$. Une fonction $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}(I)$ est une solution faible de (3.1) si

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{u}(t)}{\partial t}, \boldsymbol{\phi} \right\rangle + \mu \left(\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla \boldsymbol{\phi}\right) + b\left(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\phi}\right) = \left\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\phi} \right\rangle, \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \end{cases}$$

est satisfait presque partout dans I et pour tout $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{V}$. Remarquons qu'au vu du Lemme 3.2.1, la condition initiale $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}$ a un sens.

3.3.2 Solvabilité

Les résultats concernant l'existence et l'unicité d'une solution faible $\boldsymbol{u}$ feront l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *Soient $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{f} \in L^2\left(I;\boldsymbol{V}'\right)$. Alors le problème (3.1) admet une solution faible unique. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(I;H)} \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_2 + \tfrac{1}{\sqrt{\mu}} \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(I;\boldsymbol{V}')}, \tag{3.6}$$

$$|\boldsymbol{u}|_{L^2(I;\boldsymbol{V})} \leq \tfrac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\|\boldsymbol{u}_0\|_2 + \tfrac{1}{\sqrt{\mu}} \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(I;\boldsymbol{V}')}\right), \tag{3.7}$$

où C est une constante dépendant de Ω.

Démonstration. La solution correspondente est construite grâce à la méthode de Faedo-Galerkin, en utilisant un développement dans la base considérée au Chapitre 1. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premières fonctions propres $(\boldsymbol{\omega}_j)_{1,\cdots,m}$ et P_m l'opérateur de projection orthogonale de $\boldsymbol{H}$ sur V_m. Le problème approché est défini par

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Chercher } \boldsymbol{u}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\boldsymbol{\omega}_i \text{ solution, pour } 1 \leq j \leq m, \text{ de} \\ (\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{\omega}_j) + \mu\left(\nabla \boldsymbol{u}_m(t), \nabla \boldsymbol{\omega}_j\right) + b\left(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{\omega}_j\right) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\omega}_j \rangle, \\ \boldsymbol{u}_m(0) = \boldsymbol{u}_{0m}\end{array}\right. \tag{3.8}$$

où $\boldsymbol{u}_{0m} = P_m \boldsymbol{u}_0$. Vu que

$$(\boldsymbol{u}_0 - P_m \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V_m,$$

il vient que

$$\boldsymbol{u}_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\rho}_i \boldsymbol{\omega}_i,$$

où le vecteur $\boldsymbol{\rho}$ est la solution du système

$$(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\rho})_j = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\omega}_j),$$

et où

$$\boldsymbol{M}_{ij} = ((\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_j) \qquad 1 \leq i, j \leq m \tag{3.9}$$

est la matrice de masse. De plus

$$\|\boldsymbol{u}_{0m}\|_2^2 = \|P_m \boldsymbol{u}_0\|_2^2 = (P_m \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_0) \leq \|P_m \boldsymbol{u}_0\|_2 \|\boldsymbol{u}_0\|_2$$

impliquant que

$$\|\boldsymbol{u}_{0m}\|_2 \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_2 .$$

Finalement, nous savons que $(\boldsymbol{u}_{0m})_m$ converge vers $\boldsymbol{u}_0$ dans H.

Les fonctions g_{jm} sont des fonctions scalaires définies sur $\bar{I}$ et (3.8) est, relativement à ces fonctions, un système différentiel non-linéaire avec des coefficients constants et avec une condition initiale en $t = 0$. En effet, pour tout $j = 1, \cdots, m$

$$\sum_{i=1}^{m} \big((\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_j)\, g'_{im}(t) + \mu\left(\nabla \boldsymbol{\omega}_i, \nabla \boldsymbol{\omega}_j\right) g_{im}(t)\big) + \sum_{i,k=1}^{m} b\left(\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_k, \boldsymbol{\omega}_j\right) g_{im}(t) g_{km}(t) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\omega}_j \rangle$$

ce qui donne le système non-linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{M}\boldsymbol{g}'_m(t) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{g}_m(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{g}_m(t)\boldsymbol{g}_m(t) = \boldsymbol{F}(t) \\ \boldsymbol{M}\boldsymbol{g}_m(0) = \boldsymbol{g}_0\end{array}\right.$$

où, pour tout $1 \leq i, j \leq m$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_{ij} &= \mu\left(\nabla \boldsymbol{\omega}_i, \nabla \boldsymbol{\omega}_j\right), \\ \left(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{w})\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{w}_k\, b(\boldsymbol{\omega}_j, \omega_k, \boldsymbol{\omega}_i), \\ F_j(t) &= \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\omega}_j \rangle \\ \left(\boldsymbol{g}_0\right)_i &= \left(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\omega}_i\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comme les éléments $\boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_m$ sont linéairement indépendants, la matrice $\boldsymbol{M}$ est inversible et le système précédent est réduit à

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}'_m(t) + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}g_m(t) + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}g_m(t)\boldsymbol{g}_m(t) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{F}(t), \\ \boldsymbol{g}_m(0) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{g}_0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Le système différentiel (3.11) admet une solution sur un intervalle $[0, t_m]$. Si $t_m < T$, alors $\|\boldsymbol{u}_m\|_2$ doit tendre vers l'infini quand t tend vers t_m. Les estimations a priori que nous allons montrer dans la suite impliquent que ce n'est pas le cas et, par conséquent, que $\boldsymbol{u}_m$ est défini sur tout l'intervalle $\bar{I}$.

Le reste de la preuve sera divisé en quatre parties. En premier lieu, nous établissons des estimations H^1 par rapport à la variable espace. Nous passons ensuite à la limite, démontrons l'unicité de la solution et établissons les estimations a priori.

Étape 1. Estimation a priori dans $L^\infty(I; H) \cap L^2(I; V)$. Multipliant (3.8) par g_{jm} et sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_2^2\right) + \mu\,|\boldsymbol{u}_m(t)|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} &= \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t)\rangle - b\left(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)\right) \\ &= \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t)\rangle \leq \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\boldsymbol{V}'}\,|\boldsymbol{u}_m(t)|_{\boldsymbol{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\|\boldsymbol{f}(t)\|_{\boldsymbol{V}'}\,|\boldsymbol{u}_m(t)|_{\boldsymbol{H}_0^1} \leq \tfrac{\mu}{2}\,|\boldsymbol{u}_m(t)|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} + \tfrac{1}{2\mu}\,\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'}$$

et donc

$$\tfrac{d}{dt}\left(\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_2^2\right) + \mu\,|\boldsymbol{u}_m(t)|^2_{\boldsymbol{H}_0^1} \leq \tfrac{1}{\mu}\,\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et s ($0 < s < T$), on obtient

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_m(s)\|_2^2 &\leq \|\boldsymbol{u}_m(0)\|_2^2 + \tfrac{1}{\mu}\int_0^s \|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'}\,dt \\ &\leq \|\boldsymbol{u}_0\|_2^2 + \tfrac{1}{\mu}\,\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(I;\boldsymbol{V}')} \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\sup_{s\in\bar{I}} \|\boldsymbol{u}_m(s)\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_2^2 + \tfrac{1}{\mu}\,\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(I;\boldsymbol{V}')}. \tag{3.12}$$

De manière similaire, en intégrant entre 0 et T, on obtient

$$\|\boldsymbol{u}_m(T)\|_2^2 + \mu\,|\boldsymbol{u}_m|^2_{L^2(I;\boldsymbol{V})} \le \|\boldsymbol{u}_0\|_2^2 + \frac{1}{\mu}\,\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(I;\boldsymbol{V}')}\,. \tag{3.13}$$

La suite $(\boldsymbol{u}_m)_m$ est, par conséquent, uniformément bornée dans $L^\infty(I;\boldsymbol{H})\cap L^2(I;\boldsymbol{V})$.

Étape 2. Passage à la limite. D'après les étapes précédentes, la suite $(\boldsymbol{u}_m)_m$ est bornée dans $L^\infty(I;\boldsymbol{H})\cap L^2(I;\boldsymbol{V})$. Il existe alors une sous-suite, encore indexée par m, une fonction $\boldsymbol{u}\in L^\infty(I;\boldsymbol{H})$ et une fonction $\boldsymbol{u}^*\in L^2(I;\boldsymbol{V})$ tel que

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{u} \qquad \text{faible}^* \text{ dans } L^\infty(I;\boldsymbol{H}), \tag{3.14}$$

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{u}^* \qquad \text{faiblement dans } L^2(I;\boldsymbol{V}). \tag{3.15}$$

De (3.14) et (3.15), nous déduisons en particulier que

$$\lim_{m\to+\infty}\int_I (\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{\varphi}(t))\;dt = \int_I (\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\varphi}(t))\;dt$$

et

$$\lim_{m\to+\infty}\int_I (\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{\varphi}(t))\;dt = \int_I (\boldsymbol{u}^*(t),\boldsymbol{\varphi}(t))\;dt$$

pour tout $\boldsymbol{\varphi}\in L^2(I;\boldsymbol{H})$ et donc $\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{u}^*\in L^\infty(I;\boldsymbol{H})\cap L^2(I;\boldsymbol{V})$.

• Des arguments classiques montrent que pour tout $\boldsymbol{\phi}\in\boldsymbol{V}$

$$\begin{aligned}
&|b\,(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{\phi}) - b\,(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\phi})|\\
&= |b\,(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{u}_m(t)-\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\phi}) + b\,(\boldsymbol{u}_m(t)-\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\phi)|\\
&= |-b\,(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u}_m(t)-\boldsymbol{u}(t)) + b\,(\boldsymbol{u}_m(t)-\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\phi)|\\
&\le \|\boldsymbol{u}_m(t)\|_4\,\|\boldsymbol{u}_m(t)-\boldsymbol{u}(t)\|_4\,|\boldsymbol{\phi}|_{\boldsymbol{H}_0^1} + \|\boldsymbol{u}_m(t)-\boldsymbol{u}(t)\|_4\,|\boldsymbol{u}(t)|_{\boldsymbol{H}_0^1}\,\|\boldsymbol{\phi}\|_4\\
&\le C\left(|\boldsymbol{u}_m(t)|_{\boldsymbol{H}_0^1} + |\boldsymbol{u}(t)|_{\boldsymbol{H}_0^1}\right)\|\boldsymbol{u}_m(t)-\boldsymbol{u}(t)\|_4\,|\boldsymbol{\phi}|_{\boldsymbol{H}_0^1}\,.
\end{aligned}$$

L'injection de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ dans $\boldsymbol{L}^4(\Omega)$ étant compacte, grâce à (3.15) et (3.12), il vient que pour tout $\psi\in\mathcal{D}(I)$ on a

$$\left|\int_I \left(b\,(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{\phi}) - b\,(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\phi})\right)\psi(t)\,dt\right|$$

$$\le C\left(|\boldsymbol{u}_m|_{L^2(I;\boldsymbol{V})} + |\boldsymbol{u}|_{L^2(I;\boldsymbol{V})}\right)\|\boldsymbol{u}_m - y\|_{L^2(I;\boldsymbol{L}^4)}\,|\boldsymbol{\phi}|_{\boldsymbol{H}_0^1}\,\|\psi\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{quand } m\to+\infty.$$

• Remarquons alors que (3.8) implique que

$$-\int_I (\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{\omega}_j)\,\psi'(t)\,dt + \int_I \left(\mu\,(\nabla\boldsymbol{u}_m(t),\nabla\boldsymbol{\omega}_j) + b(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{\omega}_j)\right)\psi(t)\,dt$$

$$= \int_I \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\omega}_j \rangle\, \psi(t)\, dt + (\boldsymbol{u}_{0m}, \boldsymbol{\omega}_j)\, \psi(0) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(-\infty, T).$$

Prenant en compte les résultats de convergence précédents et passant à la limite, nous obtenons

$$\int_I (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\omega}_j)\, \psi'(t)\, dt + \int_I (\mu\, (\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega}_j) + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\omega}_j))\, \psi(t)\, dt$$

$$= \int_I \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\omega}_j \rangle\, \psi(t)\, dt + (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\omega}_j)\, \psi(0) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(-\infty, T).$$

Arguant par densité, il vient que

$$\int_I (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\phi})\, \psi'(t)\, dt + \int_I (\mu\, (\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla \boldsymbol{\phi}) + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\phi}))\, \psi(t)\, dt$$

$$= \int_I \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\phi} \rangle\, \psi(t)\, dt + (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\phi})\, \psi(0) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(-\infty, T) \text{ et } \forall \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{V}. \tag{3.16}$$

Choisissant $\psi \in \mathcal{D}(I)$, nous obtenons l'égalité suivante (prise dans le sens des distributions)

$$\tfrac{d}{dt}\, (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\phi}) + \mu\, (\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla \boldsymbol{\phi}) + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\phi}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\phi} \rangle \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{V}. \tag{3.17}$$

• Prouvons maintenant que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^2(I; V')$. Soit $\mathcal{A}\boldsymbol{u}$ la forme linéaire définie par

$$\langle \mathcal{A}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\phi} \rangle = (\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla \boldsymbol{\phi}) \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{V}.$$

Il est facile de voir que $\mathcal{A}\boldsymbol{u}$ est une forme continue dans $L^2(I; \boldsymbol{V})$. De même, soit $\mathcal{B}\boldsymbol{u}$ la forme linéaire définie par

$$\langle \mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\phi} \rangle = b\, (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\phi}) \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{V}.$$

Utilisant (3.5), pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(I; \boldsymbol{V})$ on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_I \langle \mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle\, dt \right| &= \left| - \int_I b\, (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{u}(t)) \right| \\
&\le \int_I \|\boldsymbol{u}(t)\|_4^2\, \|\nabla \boldsymbol{\varphi}(t)\|_2\, dt \\
&\le \sqrt{2} \int_I \|\boldsymbol{u}(t)\|_2\, \|\nabla \boldsymbol{u}(t)\|_2\, \|\nabla \boldsymbol{\varphi}(t)\|_2\, dt \\
&\le \sqrt{2}\, \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(I;\boldsymbol{H})}\, |\boldsymbol{u}|_{L^2(I;\boldsymbol{V})}\, |\boldsymbol{\varphi}|_{L^2(I;\boldsymbol{V})}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\|\mathcal{B}\boldsymbol{u}\|_{L^2(I;\boldsymbol{V}')} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi} \in L^2(I;\boldsymbol{V}) \\ |\boldsymbol{\varphi}|_{L^2(I;\boldsymbol{V})} \le 1}} \left| \int_I \langle \mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle\, dt \right| \le \sqrt{2}\, \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(I;\boldsymbol{H})}\, |\boldsymbol{u}|_{L^2(I;\boldsymbol{V})}$$

montrant ainsi que $Bu \in L^2(I;\boldsymbol{V}')$. Vu que $\boldsymbol{u}$ satisfait (3.17), utilisant (3.2), on obtient

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\phi}\rangle = \langle f(t) - \mu\mathcal{A}\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{B}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\phi}\rangle \qquad \forall\boldsymbol{\phi}\in\boldsymbol{V},$$

et comme $\boldsymbol{f} - \mathcal{A}\boldsymbol{u} - \mathcal{B}\boldsymbol{u} \in L^2(I;\boldsymbol{V}')$, d'après le lemme 3.2.2, on déduit que $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \in L^2(I;\boldsymbol{V}')$.

• Reste à prouver que $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$. D'après ce qui précède, $\in \boldsymbol{W}(I) \hookrightarrow C(\bar{I};\boldsymbol{H})$. Multipliant l'identité précédente par $\psi \in \mathcal{D}(-\infty,T)$ et utilisant la formule d'intégration par parties (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}-\int_I (\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\phi})\,\psi'(t)\,dt + \int_I (\mu\,(\nabla\boldsymbol{u}(t),\nabla\boldsymbol{\phi}) + b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\phi}))\,\psi(t)\,dt \\ = \int_I \langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\phi}\rangle\,\psi(t)\,dt + (\boldsymbol{u}(0),\phi)\,.\end{aligned}$$

Comparant avec (3.16), on obtient

$$(\boldsymbol{u}(0)-\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{\phi})\,\psi(0) = 0.$$

Choisissant ψ telle que $\psi(0) = 1$, il vient que $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$.

Étape 3. Unicité. Soient $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ deux solutions faibles de (3.1). Alors $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ satisfait

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}(t)}{\partial t},\boldsymbol{\phi}\right) + \mu\,(\nabla\boldsymbol{u}(t),\nabla\boldsymbol{\phi}) + b\,(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}_1(t),\boldsymbol{\phi}) + b\,(\boldsymbol{u}_2(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\phi}) = 0 \qquad \forall\boldsymbol{\phi}\in\boldsymbol{V}.$$

En posant $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{u}(t)$, et prenant en compte (3.4) et le lemme 2.2.2 on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2 + \mu\,\|\nabla\boldsymbol{u}(t)\|_2^2 = -b\,(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}_1(t),\boldsymbol{u}(t))\,.$$

D'après l'inégalité (3.5) et l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}|2b\,(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}_1(t),\boldsymbol{u}(t))| &\le 2^{\frac{3}{2}}\,\|\boldsymbol{u}(t)\|_2\,\|\nabla\boldsymbol{u}_1(t)\|_2\,\|\nabla\boldsymbol{u}(t)\|_2 \\ &\le 2\mu\,\|\nabla\boldsymbol{u}(t)\|_2^2 + \frac{1}{\mu}\,\|\nabla\boldsymbol{u}_1(t)\|_2^2\,\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2 \le \frac{1}{\mu}\,\|\nabla\boldsymbol{u}_1(t)\|_2^2\,\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2\,.$$

De simples calculs montrent que cette inégalité est équivalente à

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(\frac{-1}{\mu}\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{u}_1(s)\|_2^2\,ds\right)\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2\right) \le 0.$$

Intégrant entre 0 et t, on obtient

$$\exp\left(\frac{-1}{\mu}\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{u}_1(s)\|_2^2\right)\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2 \le \|\boldsymbol{u}(0)\|_2^2 = 0$$

et donc $\|\boldsymbol{u}(t)\|_2 = 0$, i.e. $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$.

Étape 4. Estimations a priori. Les estimations (3.6) et (3.7) sont une conséquence directe de (3.12) et (3.13). □

Bibliographie

[1] C. AMROUCHE, V. GIRAULT, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension, Czechoslovak Mathematical Journal, 44 (1994), 109-140.

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1987.

[3] G. P. GALDI, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations*, Vol. I and II, Springer Tracts in Natural Philosophy 38, 39, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations* , North-Holland, Amsterdam, 1977.