

## Chapitre II. Résolution des équations aux dérivées partielles

### II.1. Classifications des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites

Les équations aux dérivées partielles interviennent dans de nombreux domaines de physique, qui comprennent les problèmes de diffusion (Electromagnétique, thermique,...), les phénomènes de propagation (Propagation d'ondes acoustiques), ainsi que le domaine de la mécanique des fluides décrite par les équations hydrodynamiques comme celles de Navier-Stokes. Ces équations différentielles n'ont généralement pas de solutions analytiques et une résolution numérique de ces équations est alors nécessaire. Une équation aux dérivées partielles est une relation liant une fonction de  $n$  variables à ses dérivées partielles.

#### II.1.1. Équations aux Dérivées Partielles (EDPs)

##### II.1.1.1. Définitions

**Equations aux dérivées partielles (EDPs).** Une équation aux dérivées partielles fait intervenir plusieurs variables indépendantes (temps et espace pour les EDPs de l'ingénieur), ainsi que les dérivées partielles de la variable dépendante ( la solution recherchée ) par rapport à ces variables indépendantes.

Exemple: l'équation de convection

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

est une EDP. La variable dépendante est  $C$ , les variables indépendantes sont le temps  $t$  et l'espace  $x$ . La grandeur  $u$  peut (ou non) être fonction de  $t$ ,  $x$  et  $C$ .

**Ordre d'une EDP.** L'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé parmi toutes dérivées partielles de l'EDP.

Exemples: l'EDP (1) est une EDP d'ordre 1 car elle ne contient que des dérivées partielles d'ordre 1 (par rapport à  $t$  ou à  $x$ ). En revanche, l'EDP suivante

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

est une EDP d'ordre 2 car sa dérivée partielle d'ordre le plus élevé est une dérivée seconde (par rapport à  $x$ ).

**EDPs linéaires, non-linéaires, quasi-linéaires.** Une EDP linéaire est une EDP qui ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées de la fonction inconnue. Une telle équation prend la forme

$$a_0 U + a_1 \frac{dU}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n U}{dx^n} = b \quad (3)$$

où les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  et  $b$  sont des constantes (connues) et  $U$  est la fonction inconnue (à déterminer).

Une EDP non-linéaire est une EDP où l'une des dérivées intervient comme argument d'une fonction non-linéaire. L'équation suivante

$$c_0(U) + c_1 \left( \frac{dU}{dt} \right) + \dots + c_n \left( \frac{d^n U}{dx^n} \right) = d \quad (4)$$

est non-linéaire si au moins une des fonctions (connues)  $c_0(x), c_1(x), \dots, c_n(x)$  n'est pas linéaire par rapport à  $x$ .

Une EDP quasi-linéaire est une équation du type (3) où les coefficients sont fonction de la variable dépendante (ici,  $U$ ) et/ou de la variable indépendante (ici,  $t$  et  $x$ ):

$$a_0(t, x, U)U + a_1(t, x, U) \frac{dU}{dt} + \dots + a_n(t, x, U) \frac{d^n U}{dx^n} = b(t, x, U) \quad (5)$$

Exemples: L'équation suivante est une EDP non-linéaire:

$$U + \frac{5}{3t + \left(\frac{dU}{dt}\right)^2} = 0 \quad (6)$$

car la dérivée  $dU/dt$  est prise comme argument.

Dans ce cours, seules les EDPs linéaires et quasi-linéaires seront abordées. Elles représentent une majorité des équations intervenant dans la vie de l'ingénieur.

**Conditions initiales, conditions aux limites.** Contrairement aux EDOs, les conditions initiales ne suffisent pas à assurer l'unicité de la solution. Il faut également fournir des conditions aux limites. Pour certains types d'équations (*Ex.* EDPs elliptiques), le concept de condition initiale n'a pas de sens.

Les conditions initiales et les conditions aux limites se distinguent de la manière suivante :

- une condition initiale s'applique pour une valeur donnée (et unique) d'une variable indépendante. A partir de cette condition initiale, il est possible de déduire la solution pour toutes les autres valeurs de la variable indépendante.
- une condition aux limites est appliquée en tout point de la frontière du domaine sur lequel on souhaite résoudre les équations (et non en un point unique). Il n'est pas possible de déterminer la solution en partant simplement d'un seul point de la limite du domaine et en progressant à l'intérieur de celui-ci, car la solution est également conditionnée par sa valeur en tous les autres points de la frontière.

### II.1.1.2. Classification des EDPs du second ordre

Les EDPs du second ordre représentent une classe importante des EDPs du monde de l'ingénierie (et de la mécanique des fluides en particulier). La partie 'EDPs' de ce cours traite des EDPs du second ordre. On considérera uniquement des EDPs quasi-linéaires:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + D \frac{\partial U}{\partial X} + E \frac{\partial U}{\partial Y} + F = 0 \quad (7)$$

où  $A, B, \dots, F$  sont des fonctions de  $X, Y$  et  $U$ .  $X$  et  $Y$  sont les variables indépendantes (ce pourrait être  $t, x, y$ , etc.) de l'EDP et  $U$  est la variable dépendante. Selon la valeur des coefficients  $A, B$  et  $C$ , l'EDP est dite hyperbolique, parabolique ou elliptique.

**EDPs hyperboliques.** Une EDP du type (7) est dite hyperbolique si son discriminant  $\Delta = B^2 - 4AC$  est strictement positif.

Exemple: l'équation suivante est du type hyperbolique:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

En effet, (8) peut être mise sous la forme (7) en posant  $X = t$ ,  $Y = x$ ,  $A = 1$ ,  $C = -\lambda^2$ , et  $B = D = E = F = 0$ . Il est facile de vérifier que  $B^2 - 4AC = \lambda^2 > 0$ .

**EDPs paraboliques.** Une EDP du type (7) est dite parabolique si son discriminant  $\Delta = B^2 - 4AC$  est nul.

Exemple: l'équation suivante est du type parabolique:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \nu \text{ positif} \quad (9)$$

En effet, (9) peut être mise sous la forme (7) en posant  $X = t$ ,  $Y = x$ ,  $D = 1$ ,  $C = \nu$ , et  $A = B = E = F = 0$ . On vérifiera que  $B^2 - 4AC = 0$ .

**EDPs elliptiques.** Une EDP du type (7) est dite elliptique si son discriminant  $\Delta = B^2 - 4AC$  est strictement négatif.

Exemple: l'équation suivante est du type elliptique:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Q \quad (\text{équation de la chaleur}) \quad (10)$$

En effet, (10) peut être mise sous la forme (7) en posant  $X=t$ ,  $Y=x$ ,  $A = C = 1$ , et  $B = D = E = F = 0$ . On peut vérifier que  $B^2 - 4AC < 0$ .

## II.1.2. Concept de Consistance, stabilité et convergence

Lors de l'utilisation des méthodes numériques : une méthode très précise avec un faible pas de calcul (temps ou espace) peut devenir extrêmement imprécise dès que l'on accroît le pas de calcul. Les concepts de consistance, de stabilité et de convergence permettent de comprendre le comportement des méthodes numériques.

### II.1.2.1. Consistance

**Définitions.** La consistance est une propriété de la discrétisation. On dit que l'EDP discrétisée est consistante par rapport à l'EDP réelle si elle tend vers elle lorsque  $\Delta t$  (resp.  $\Delta x$ ) tend vers 0. La différence entre l'équation discrétisée et l'équation réelle est appelée l'erreur de troncature.

**Principe de l'analyse de consistance.** La consistance d'une discrétisation s'analyse en effectuant un développement en série de Taylor de l'équation discrétisée et en vérifiant que celle-ci tend vers l'EDP originale lorsque  $\Delta t$  (ou  $\Delta x$ ) tend vers 0.

### II.1.2.2. Stabilité

**Définition.** La stabilité est une propriété de la solution (analytique et/ou numérique). La solution est stable si elle est bornée dans le temps (resp. l'espace). La stabilité de la solution numérique est souvent attachée à la valeur de  $\Delta t$  (resp.  $\Delta x$ ).

**Critère de stabilité pour les EDPs du 1<sup>er</sup> ordre.** Il existe une méthode simple pour vérifier la stabilité des solutions numériques : la solution est stable si l'on peut trouver une constante  $V$  telle que :

$$-1 \leq \frac{U^{n+1} - V}{U^n - V} \leq 1 \quad \forall n \quad (11)$$

L'équation (11) exprime le fait que l'écart entre la solution  $U^n$  et la « valeur de référence » ne s'accroît pas au cours du temps. Souvent, la constante  $V$  peut être prise égale à zéro.

### II.1.2.3. Convergence

**Définition.** La convergence est une propriété de la solution numérique. On dit que la solution numérique converge vers la solution analytique si elle tend vers elle en tout point du temps (resp. de l'espace) lorsque  $\Delta t$  (resp.  $\Delta x$ ) tend vers 0.

La consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes à la convergence. Autrement dit, si l'on a discrétisé une EDP de façon consistante et si la solution de cette EDP est stable, alors elle est également convergente.

## II.2. Méthode des différences finies

### II.2.1. Introduction

La méthode des différences finies est basée sur la technique du développement en séries de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donné si on connaît la valeur de la dite fonction ainsi que toutes ces dérivées en un point voisin en espace ou en temps. Cette technique permet de développer des schémas pour remplacer les dérivées premières et secondes des EDP pour pouvoir envisager une solution numérique par ordinateur.

### II.2.2. Etapes à suivre

Pour obtenir une solution numérique il faut tout d'abord définir un domaine numérique constitué par un ensemble de points discrets appelé grille de calcul. Les valeurs instantanées et locales des variables dépendantes du problème sont définies sur l'ensemble des points de la grille de calcul. La différence entre cette vue numérique à travers un certain nombre de points et la distribution continue exacte représente l'erreur commise par la méthode numérique. Il est tout à fait logique de penser que plus le nombre de points est important plus la visualisation est claire.

L'étape suivante consiste à approximer ou remplacer toutes les dérivées partielles par des schémas discrets (différence finies). L'EDP sera transformée en équation algébrique. Cette équation algébrique est ensuite appliquée sur l'ensemble des nœuds de la grille de calcul. Le résultat sera un système d'équation comportant autant d'équations que d'inconnues (nœuds). Ce système sera ensuite résolu par une méthode appropriée. Le résultat sera une distribution discrète de la solution sur l'ensemble des points du domaine de calcul.

### II.2.3. Création de la grille de calcul

Avant de commencer, il faut trouver un moyen qui nous permettra de localiser spatialement et temporellement tous les points de la solution numérique. C'est ce qu'on va appeler création de la grille de calcul. Dans la suite, on va raisonner sur un espace plan (2D) et l'extension pour le 3D sera faite de manière intuitive. La Figure 1 représente la manière la plus directe pour repérer les points suivant la procédure structurée. C'est un peu comme une matrice, chaque point sera affecté de deux indexes ( $i,j$ ) qui le positionneront par rapport à ces voisins.

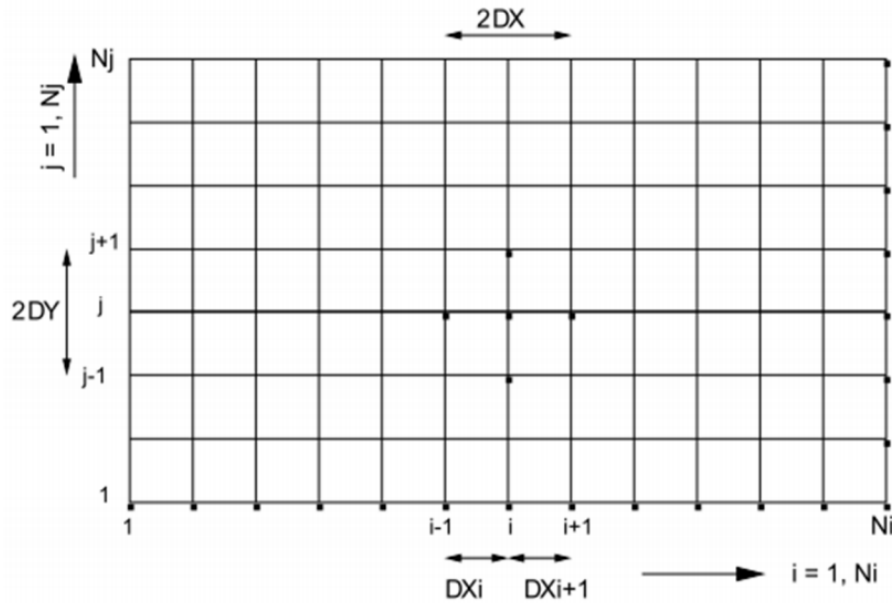


Figure 1. Grille de calcul structurée

Soit  $U$ , la variable à calculer. Sa valeur aux différents points de la grille s'écrit de la manière suivante :

$$U_{i+1,j} = U(x_0 + \Delta x, y_0) \quad (1)$$

$$U_{i-1,j} = U(x_0 - \Delta x, y_0) \quad (2)$$

$$U_{i,j+1} = U(x_0, y_0 + \Delta y) \quad (3)$$

$$U_{i,j-1} = U(x_0, y_0 - \Delta y) \quad (4)$$

### II.2.3.1. Maillage non structuré

L'autre façon de mailler un domaine de calcul est de définir un nuage de points, pas nécessairement structuré. Dans ce cas-là, il faudra numéroter les points de calcul un par un. Chaque point aura ces coordonnées  $x$  et  $y$ .

Le fichier de la grille de calcul sera compléter par une liste des éléments (eux-mêmes numéroter) et les points composants chaque élément.

### II.2.4. Développement en série de Taylor

$$U(x_0 + \Delta x, y_0) = U(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_0 \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \left. \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \right|_0 \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (5)$$

$$U(x_0 - \Delta x, y_0) = U(x_0, y_0) - \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_0 \frac{\Delta x^2}{2!} - \dots + \left. \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \right|_0 \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (6)$$



Une autre écriture de l'équation (5), on oublie temporairement la deuxième dimension.

$$U(x_{i+1}) = U(x_i) + U'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{U''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + \frac{U^n(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

Le terme  $R_n$ , représente les termes omis d'ordre  $(n+1)$  à l'infini. Théoriquement, on aura besoin d'un nombre infini de termes pour pouvoir calculer la valeur de  $U(x_{i+1})$ . En pratique, on se limite à un nombre fini de terme et tout le reste sera considéré en tant que l'erreur de l'approximation (erreur de troncature).

#### II.2.4.1. Construction des schémas pour la dérivée d'ordre un et deux

En arrangeant l'équation (5), on obtient le schéma aux différences avant:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_0 = \frac{U(x_0 + \Delta x, y_0) - U(x_0, y_0)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (7)$$

L'équation (6), donne le schéma aux différences arrière :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_0 = \frac{U(x_0, y_0) - U(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (8)$$

Le schéma aux différences centrées s'obtient en soustrayant l'équation (6) de l'équation (5) :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_0 = \frac{U(x_0 + \Delta x, y_0) - U(x_0 - \Delta x, y_0)}{2 \Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (9)$$

La dérivée seconde est obtenue en additionnant l'équation (5) à l'équation (6) :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_0 = \frac{U(x_0 + \Delta x, y_0) - 2U(x_0, y_0) + U(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (10)$$

Les schémas ci-dessus s'écrivent sous forme indicielle :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (12)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (13)$$

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (14)$$

### a. Remarque

- Le fait de dire qu'un schéma est d'ordre deux veut dire qu'il est plus précis que celui d'ordre un. L'erreur de troncature est proportionnelle à  $\Delta x^2$  au lieu de  $\Delta x$  (pour le schéma d'ordre 1). De ce fait un schéma d'ordre deux est toujours préféré en différences finies.
- Pour la dérivée par rapport au temps, il est d'usage d'utiliser un schéma avant d'ordre un. C'est un peu par rapport à la nature de la variable temps.
- La principale remarque est que le schéma centré est d'ordre 2 est plus précis que les deux autres. Malheureusement ce schéma ne peut être utilisé pour les nœuds de frontières où le domaine de calcul est défini seulement d'un seul côté du nœud de calcul.

### II.2.4.2. Schéma d'ordre 2 pour les nœuds des frontières

La formule d'un schéma d'ordre 2 applicable aux nœuds des frontières peut être construite en utilisant trois points au lieu de deux. La procédure est la suivante:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{aU_{i,j} + bU_{i-1,j} + cU_{i-2,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (15)$$

$$U_{i-1,j} = U_{i,j} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{\Delta x^2}{2!} - \left( \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{\Delta x^3}{6} + \dots \quad (16)$$

$$U_{i-2,j} = U_{i,j} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} (2\Delta x) + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} - \left( \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(2\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (17)$$

En multiplie l'équation (16) par b et l'équation (17) par c :

$$aU_{i,j} + bU_{i-1,j} + cU_{i-2,j} = \left( (a+b+c)U_{i,j} - \Delta x(2c+b)\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2}(4c+b)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \bigg|_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (18)$$

L'identification de l'équation (18) à l'équation (15), donne :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 2c + b &= -1 \\ 4c + b &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

La résolution de ce système d'équation, donne l'expression suivante pour un schéma de second ordre utilisant trois points pour la dérivée première.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{3U_{i,j} - 4U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (20)$$

### II.2.5. L'équation de conduction de la chaleur (Joseph Fourier)

L'équation de Fourier traduisant le transfert de chaleur par conduction sera utilisée dans la suite du cours comme exemple de base pour illustrer l'application de la méthode des différences finies.

Bien que la conductivité thermique, la chaleur spécifique et la masse volumique peuvent varier en fonction de la température, elles seront considérées constantes dans la suite du cours.

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + Q \quad (21)$$

où :  $T(x, y, t)$  : La température, fonction de l'espace et du temps.

$c$  : La chaleur spécifique.

$\rho$  : La masse volumique.

$Q$  : Source de chaleur par unité de temps et de volume.

$\lambda$  : Le coefficient de conductivité thermique.

$t$  : Le temps.

Notre première approche du problème sera d'appliquer cette équation pour un cas assez simple tel que le transfert de chaleur en 1D. Soit un fil métallique de section droite très petite par rapport à sa longueur de façon à ce que le flux de chaleur

existe seulement suivant la longueur du fil. Si en plus la source de chaleur est absente, l'équation précédente prend la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (22)$$

Où  $a = \frac{\lambda}{c \rho}$ , représente la diffusivité thermique.

Si les températures maximale et minimale du processus sont connues, la température sera adimensionalisée (Conditionnée) comme suit :

$$\theta = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \quad (23)$$

et en introduisant la variable d'espace adimensionnelle,  $x' = x/L$ , où  $L$  est la longueur du fil, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (24)$$

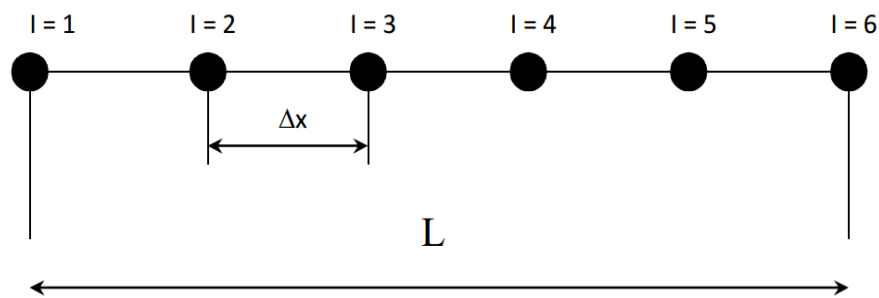
où  $x'$  a été remplacée par  $x$  pour simplifier l'écriture.

### II.2.5.1. Problème stationnaire

Si en plus le problème est stationnaire, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (25)$$

Le problème sera complété par la pose des conditions aux limites.



$NI = 6$  Nombre de nœuds du maillage.

Les conditions aux limites seront du type Dirichlet :

$$\theta(1) = 1, \quad \theta(NI) = 0 \quad (26)$$

On calcul  $\Delta x$  par l'expression suivante :

$$\Delta x = 1/(NI - 1) \quad (27)$$

L'équation (25) sera discrétisée par un schéma centré de second ordre :

$$\frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (28)$$

Le nombre de nœuds global étant 6 dont deux sont réservés pour les conditions aux limites et quatre sont à calculés par la méthode des différences finies.

L'application de l'équation algébrique (28) aux quatre nœuds donne le système suivant :

$$l=2 \quad \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 = 0 \quad \text{soit} \quad -2\theta_2 + \theta_3 = -1 \quad (29)$$

$$l=3 \quad \theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0 \quad (30)$$

$$l=4 \quad \theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0 \quad (31)$$

$$l=5 \quad \theta_4 - 2\theta_5 + \theta_6 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_4 - 2\theta_5 = 0 \quad (32)$$

Mathématiquement parlant, on dispose d'un système de quatre équations à quatre inconnus :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Ce type de matrice est appelée, matrice tri diagonal et elle est facilement résolu soit par des méthodes directes (méthode du pivot) soit par des méthodes itératives (méthode de Gauss-Seidel). Après résolution on obtiens la solution suivante:

$$\theta_5 = 0.2 \quad , \quad \theta_4 = 0.4 \quad , \quad \theta_3 = 0.6 \quad , \quad \theta_2 = 0.8$$

On a aussi :

$$\theta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \theta_6 = 0$$

Il est clair que la solution est une droite en parfaite concordance avec la conduction thermique unidirectionnelle qui possède un caractère linéaire.

### II.2.5.2. Problème non stationnaire

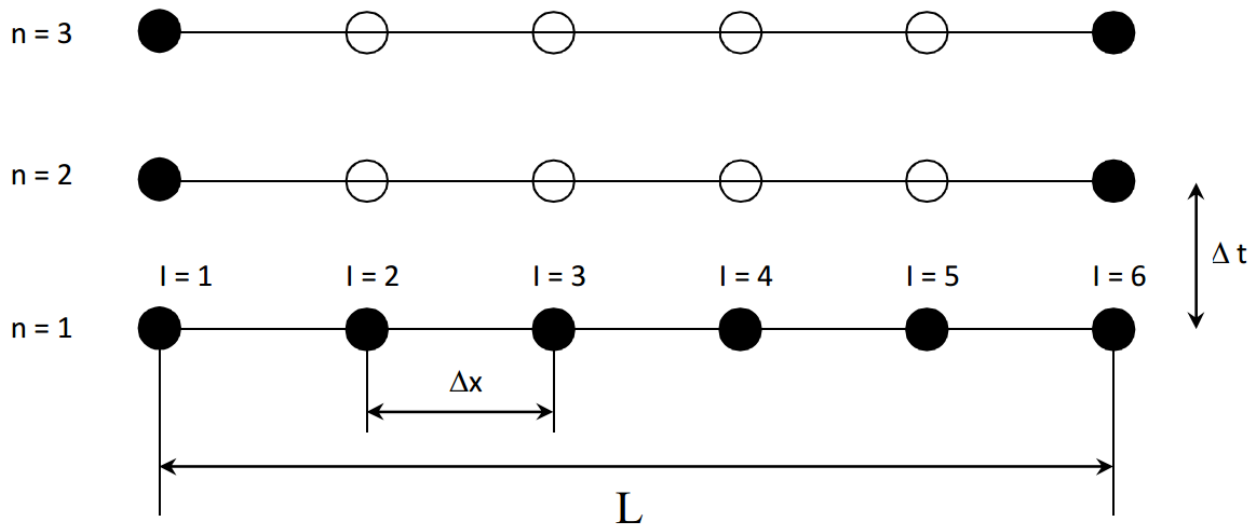
On reprend l'équation (24)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dans ce genre de problème, en plus des conditions aux limites on a besoin des conditions initiales. C'est à dire une distribution initiale de la solution pour le temps

zéro. Les variables auront deux indices: le premier se rapportant au temps et le deuxième à l'espace :

$U(t, x) \equiv U(n\Delta t, i\Delta x)$  sera représentée par  $U_i^n$



### a. Schéma explicite

L'équation précédente sera approximer par le schéma suivant :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2) \quad (34)$$

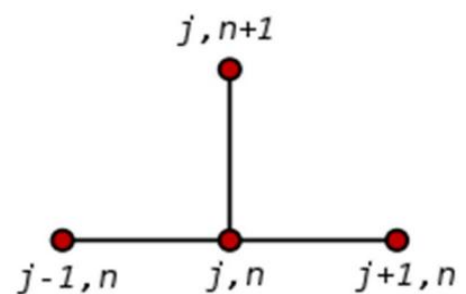
On remarque qu'on a utilisé un schéma avant d'ordre un pour la dérivée par rapport au temps et un schéma centré d'ordre deux pour la dérivée par rapport à l'espace.

Lors de cette discrétisation nous avons choisi de prendre les termes de droites au temps  $n$ . ce schéma s'appelle un schéma **explicite**, puisqu'il permet de formuler l'expression de la variable au point  $i$  et à l'instant  $n+1$  explicitement en fonction de la solution déjà calculée au temps  $n$ . Ce schéma est représenté par la molécule suivante.

L'équation (34) sera arrangée comme suit :

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n$$

$$\text{avec } \lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$



(36)

L'équation (35) sera appliqué aux nœuds d'une même rangé (c.a.d.  $n = cste$ ).

Reprenons le problème de conduction de la température précédent  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

et posons les conditions aux limites suivantes :  $\theta(t,0) = 1.0, \theta(t,1) = 0.0$

et les conditions initiales :  $\theta(0,x) = 0.0$  pour  $0 < x < 1$

Si on reprend le même nombre de nœuds que précédemment (NI=6) le pas d'espace sera  $\Delta x = 0.2$ .

**Cas 1 :**  $\Delta t = 0.1$  ( $\lambda = 2.5$ )

x	.0000	.2000	.4000	.6000	.8000	1.0000
1	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	1.0000	2.5000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	1.0000	-7.5000	6.2500	.0000	.0000	.0000

A ce niveau, on peut arrêter les calculs puisqu'on remarque que les résultats numériques de la prédiction ne peuvent être acceptés physiquement. En l'absence de source de chaleur les valeurs de la température doivent être bornées par les conditions aux limites, pire encore on voit apparaître des valeurs négatives de la température adimensionnelle. On conclue que le schéma numérique n'est pas stable puisqu'il amplifie les erreurs introduites par les conditions initiales.

**Cas 2 :**  $\Delta t = 0.01$  ( $\lambda = 0.25$ )

x	.0000	.2000	.4000	.6000	.8000	1.0000
1	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	1.0000	.2500	.0000	.0000	.0000	.0000
3	1.0000	.3750	.0625	.0000	.0000	.0000
.						
.						
.						
10	1.0000	.6476	.3592	.1663	.0591	.0000

D'après les résultats ci-dessus, on remarque que la première variante avec  $\Delta t = 0.1$  est instable. Elle ne peut pas aboutir à une solution raisonnable. Alors qu'avec  $\Delta t = 0.01$  le processus est stable.

**Conclusion.** La stabilité d'un schéma explicite n'est pas toujours assurée.

### **b. Concept de stabilité d'un schéma**

Un schéma est dit stable s'il amorti les erreurs provenant des C.I., des C.L. et de l'approximation utilisée. S'il amplifie les erreurs, le schéma sera instable et ne pourra pas converger vers une solution réaliste.

Par l'application d'une méthode d'analyse de la stabilité basée sur la transformation de Fourier au schéma explicite étudié précédemment, on peut dire que ce schéma est stable si la condition (50) est vérifiée.

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \quad (37)$$

Pour un calcul stable les conclusions seront :

- Pour un  $\Delta x = 0.2$  la valeur maximale du pas du temps sera  $\Delta t = 0.08$ .
- Pour un  $\Delta x = 0.1$  la valeur maximale du pas du temps sera  $\Delta t \leq 0.02$ .

C'est à dire, plus la précision spatiale est grande plus le calcul sera plus long, puisque le pas du temps exigé pour la stabilité du schéma explicite sera plus petit. Du point de vue capacité de stockage en mémoire, ce schéma exige un espace double pour la distribution de la solution numérique ( $n$  et  $n+1$ ).

### **c. Schéma implicite**

Reprenons le problème de la conduction thermique non stationnaire et réécrivons l'équation discrète (34) comme suit (les termes de droite sont au temps  $n+1$ ) :

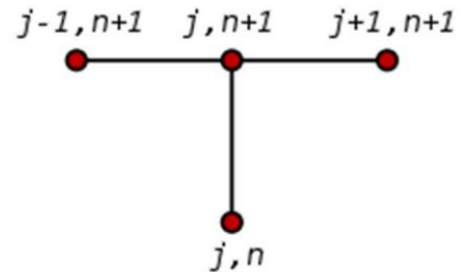
$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2)$$

Après groupement et arrangement :

$$\lambda U_{i-1}^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_i^{n+1} + \lambda U_{i+1}^{n+1} = -U_i^n \quad (39)$$

Cette équation présente trois inconnus en même temps, ce qui ne permet pas de la résoudre directement comme c'était le cas pour le schéma explicite. Cette forme de discrétisation est appelée schéma implicite. Pour trouver la solution il faut écrire l'ensemble des équations issues de l'application de (39) sur tous les nœuds de la même ligne et ensuite résoudre le système tout entier.

Si nous reprenons l'exemple précédent, le système s'écrira :





$$i = 2 \quad -(1 + 2\lambda)U_2^{n+1} + \lambda U_3^{n+1} = -U_2^n - \lambda U_1$$

$$i = 3 \quad \lambda U_2^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_3^{n+1} + \lambda U_4^{n+1} = -U_3^n$$

$$i = 4 \quad \lambda U_3^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_4^{n+1} + \lambda U_5^{n+1} = -U_4^n$$

$$i = 5 \quad \lambda U_4^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_5^{n+1} = -U_5^n - \lambda U_6$$

$U_1$  et  $U_6$  sont connues et représentent les conditions aux limites.

On dispose maintenant d'un système de quatre équations à quatre inconnus.

$$\begin{bmatrix} -(1+2\lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -(1+2\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -(1+2\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -(1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_2^* - \lambda \\ -U_3^* \\ -U_4^* \\ -U_5^* \end{bmatrix}$$

Les variables de type  $U_i^*$  représentent la solution numérique à l'itération précédente. La solution de ce système donne directement la solution de l'équation.

On constate que l'adoption de n'importe quelle valeur du paramètre  $\lambda$  aboutit à une solution numérique stable. On conclue que le schéma implicite est inconditionnellement stable.

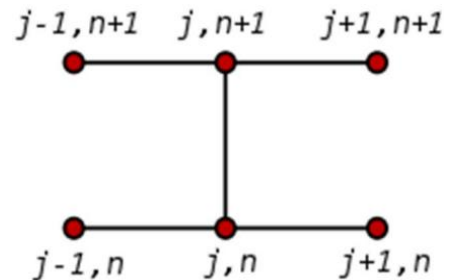
#### **d. Schéma de Crank-Nickolson**

Suivant ce schéma l'équation (24) s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \equiv a \left( \frac{1}{2} \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (40)$$

Un tel schéma prend une moitié en explicite et l'autre moitié en implicite. Une façon plus généralisée de discrétiser l'équation (24) est :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \equiv a \left( \alpha \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\alpha) \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right)$$



Pour  $\alpha = 0$  le schéma est explicite, pour  $\alpha = 1$  il est implicite et pour  $\alpha = 0.5$  il devient Crank-Nicholson.

## II.3. Méthode des éléments finis

Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés.

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traité par la méthode des éléments finis.

Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

### II.3.1. Grandes lignes de la méthode

La résolution d'un problème physique par éléments finis suit d'une manière générale les étapes suivantes:

- ❖ Etape 1: Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

- ❖ Etape 2: Division du domaine en sous domaines.

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.

- ❖ Etape 3: Approximation sur un élément.

Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, le champ, la température, est approximée par une simple fonction généralement polynomiale ou autres. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

❖ Etape 4: Assemblage et application des conditions aux limite.

Toutes les propriétés de l'élément (masse, conductivité, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

❖ Etape 5: Résolution du système global.

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il définit soit un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire (statique) ou un problème dynamique. Sa résolution nécessite l'utilisation d'une méthode appropriée.

La principale particularité de la méthode des éléments finis est bien de discrétiser, non pas la relation d'équilibre, mais une forme « affaiblie » de cette équation. Cette forme est appelée sous des noms divers: Forme faible, Forme intégrale, Forme variationnelle ... L'objectif d'affaiblir c'est pour réduire certaines contraintes mathématiques (discontinuités ...) empêchant l'utilisation d'outils classiques pour sa résolution. Par conséquence, la solution d'une forme faible correspond à une solution approchée ou « faible ».

## II.3.2. Formulation variationnelle

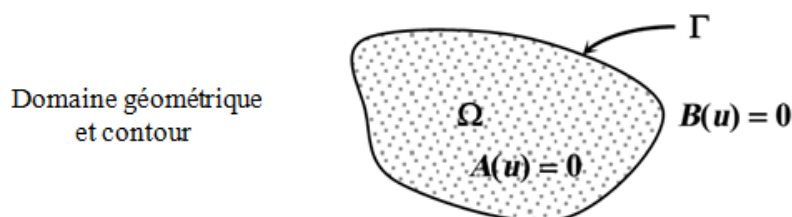
### a. Forme forte

Un problème classique d'équations différentielles gouvernant un système physique s'énonce comme suit :

Trouver une fonction  $u \in V$ ;  $V$  espace des fonctions, telle que :

$$A(u) = 0 \mid \Omega \quad ; \quad B(u) = 0 \mid \Gamma \quad (2.1)$$

Où  $A(u)$  est l'ensemble d'équations gouvernantes définies sur le domaine  $\Omega$  et  $B(u)$  est l'ensemble des conditions aux limites que les fonctions  $u$  doivent vérifier sur le contour  $\Gamma$ . La fonction  $u$  peut être un scalaire tel que la température, la pression,... ou un vecteur tel que le déplacement, la vitesse, ...



Le problème variationnel associé au système (2.1) s'écrit en prenant l'intégrale du système d'équations gouvernantes pondérées par des fonctions poids, l'énoncé devient :

Trouver  $u \in V$  telle que :

$$\forall w \in V : \int_{\Omega} w A(u) d\Omega = 0 \quad (2.2)$$

Cette équation est appelée forme intégrale forte de l'équation différentielle. Si la solution de (2.2) est satisfaite pour toute fonction poids  $w$ , alors l'équation différentielle (2.1) est satisfaite en tout point du domaine  $\Omega$ .

**b. Forme faible**

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons deux manières de procéder; soit par le choix de la fonction de pondération, soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} w B(u) d\Gamma = 0 \quad (2.3)$$

Dans la pratique, il est possible d'intégrer (2.2) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(w) D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(w) F(u) d\Gamma = 0 \quad (2.4)$$

Les opérateurs C, D, E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé. Cette dernière équation est la formulation faible de l'équation différentielle.

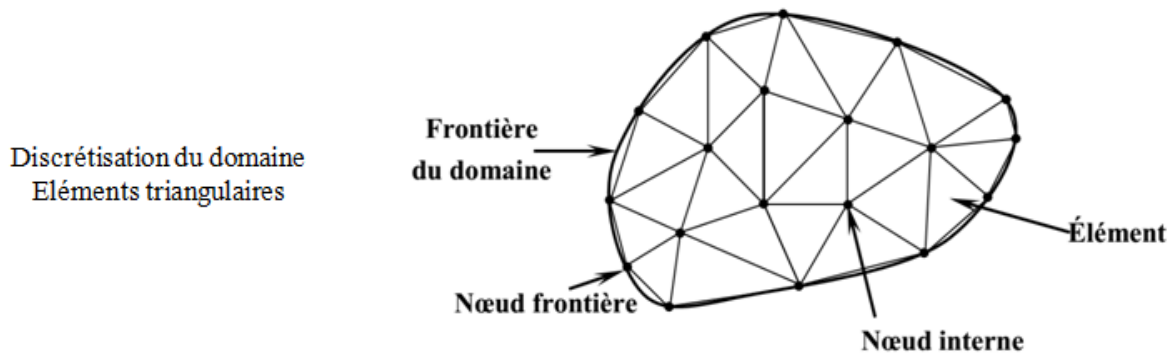
**Remarque**

Pour obtenir de telle formulation intégrales, nous disposons de la méthode des résidus pondérés connue sous le nom de la méthode de Galerkin, elle est la plus utilisée.

w s'appelle aussi fonction poids d'où le mot "pondéré".

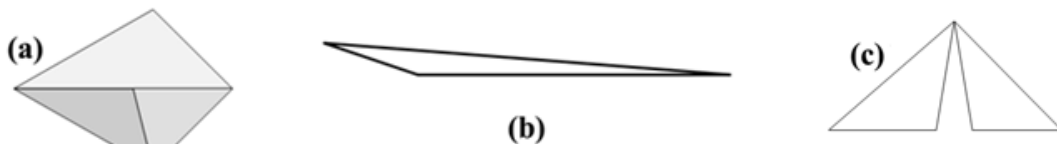
**III.3.3. Discrétisation du domaine**

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets.



La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

- Un nœud d'un élément ne doit pas être intérieur à un côté d'un autre du même type **(a)**.
- Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat, éviter les angles proches de  $180^\circ$  ou de  $0^\circ$  **(b)**.
- L'ensemble de tous éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné ; les vides entre éléments sont exclus **(c)**.



Règles de discrétisation

Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments.

### **III.3.4. Approximation sur l'élément**

Après avoir défini l'élément, on peut remplacer la fonction exacte par une approximative. On utilise souvent des polynômes ou des fonctions faciles à mettre en œuvre.

#### **a. Approximation polynomiale et approximation nodale**

Cette forme d'approximation est appelée interpolation polynomiale.

Ce qui donne :

$$u = \langle N(x) \rangle U_n \quad (2.5)$$

C'est la forme la plus utilisée par le fait que ses variables sont les valeurs de la fonction aux noeuds, la résolution donne directement ces valeurs.

Ce type d'approximation est appelée interpolation nodale, les fonctions  $N_i$  sont appelées fonction de forme.

### **III.3.5. Assemblage et résolution**

L'assemblage et la résolution du système d'équations obtenu seront illustrées à partir d'un exemple ultérieur.

## **II.3.6. L'équation de la chaleur en 1D**

Dans ce qui suit, nous essayons de présenter à travers un exemple simple, les étapes nécessaires à la mise en œuvre de la méthode des éléments finis (MEF).

Reprenons l'exemple de thermique 1D régi par:

$$\begin{cases} k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + f = 0 & \forall x \in [0, L] \\ T(x=0) = 30 \\ q(L) = -k \frac{dT}{dx}(L) = h(T(L) - T_{ext}) \end{cases} \quad (2.6)$$

Où  $f$  est une constante.

Nous appelons résidu (Noté Res), l'expression mathématique de la forme forte du problème étudié.

Dans notre cas:  $Res(T) = k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + f$  ce résidu s'annule quand  $T(x)$  est solution.

#### **a. Pondération du résidu par une fonction test**

$$w(x) \left( k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + f \right) = 0, \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall w(x) \quad (2.7)$$

Où  $w(x)$  est la fonction de pondération ou de test

**b. Intégration sur le domaine**

$$I = \int_0^L w(x) \left( k \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + f \right) dx = 0, \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall w(x) \quad (2.8)$$

**Intégration par partie.**

$$I = - \int_0^L \frac{dw(x)}{dx} k \frac{dT(x)}{dx} dx + \left[ w(x) k \frac{dT(x)}{dx} \right]_0^L + \int_0^L w(x) f dx = 0 \quad (2.10)$$

$$\forall x \in [0, L], \quad \forall w(x)$$

**Avantages.** - Réduction de l'ordre maximum des dérivées présentes  
 - introduction naturelle des conditions aux limites

**c. Introduction des conditions aux limites**

$$I = - \int_0^L \frac{dw(x)}{dx} k \frac{dT(x)}{dx} dx + w(L) k \frac{dT}{dx} \Big|_L - w(0) k \frac{dT}{dx} \Big|_0 + \int_0^L w(x) f dx = 0 \quad (2.11)$$

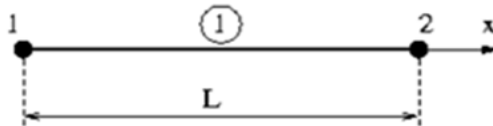
$$\forall x \in [0, L], \quad \forall w(x)$$

$$* \quad k \frac{dT}{dx} \Big|_L = -h(T(L) - T_{ext})$$

$$* \quad k \frac{dT}{dx} \Big|_0 = q_0 \quad (\text{Introduction du flux inconnu en } x = 0)$$

**II.3.6.1. Discrétisation par éléments finis**

- Le domaine d'étude est maillé avec un seul élément fini à deux nœuds.



- La forme faible (ou intégrale) est donnée par :

$$I = \int_0^L \frac{dw(x)}{dx} k \frac{dT(x)}{dx} dx - \int_0^L w(x) f dx + w(L) h(T(L) - T_{ext}) - w(0) q_0 = 0$$

$$\forall x \in [0, L], \quad \forall w(x) \quad (2.12)$$

L'intégration requiert une approximation des variables  $w(x)$ ,  $T(x)$  et de leurs dérivées  $dw(x)/dx$ ,  $dT(x)/dx$ .

### II.3.6.2. Approximation par éléments finis (Galerkin)

Une Approximation au sens des éléments finis d'une variable  $T(x)$  sur un élément à deux nœuds, s'écrit :

$$T(x) = N_1(x)T_1 + N_2(x)T_2 \quad (2.13)$$

$N_1(x), N_2(x)$  sont appelées fonctions d'approximation ou fonctions de forme (fonctions polynomiales).

Les fonctions de formes vérifient la relation générale :

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.14)$$

Pour un élément fini à deux nœuds :

$$\begin{cases} N_1(0) = 1 \\ N_1(L) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_2(0) = 0 \\ N_2(L) = 1 \end{cases}$$

### II.3.6.3. Calcul des fonctions $N_i$

- Choisir l'ordre d'approximation : l'élément à deux nœuds implique une approximation du premier ordre.

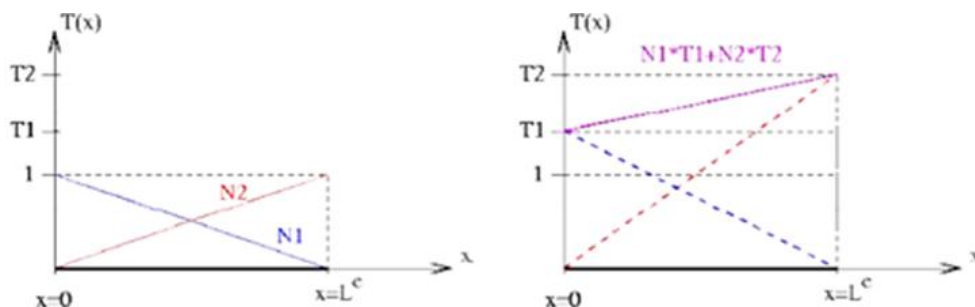
$$N_1(x) = a_1x + b_1, \quad N_2(x) = a_2x + b_2 \quad (2.15)$$

- Construction des deux systèmes d'équations :

$$\begin{cases} N_1(0) = a_1 \cdot 0 + b_1 = 1 \\ N_1(L) = a_1 \cdot L + b_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} N_2(0) = a_2 \cdot 0 + b_2 = 0 \\ N_2(L) = a_2 \cdot L + b_2 = 1 \end{cases}$$

- Résolution : la résolution du système d'équations donne la valeur des inconnus  $a_1, b_1, a_2$  et  $b_2$ . Donc, les expressions des fonctions d'approximation sont données par :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (2.16)$$



### II.3.6.4. Approximation de la fonction test

Si la variable inconnue  $T(x)$  et la fonction test utilisent les mêmes fonctions  $N_i$ , l'approximation est alors dite de type Galerkin.

### II.3.6.4. Discrétisation de la forme intégrale

- Réécriture des approximation sous la forme :

$$T(x) = N_1(x)T_1 + N_2(x)T_2 = \langle N_1(x) \ N_2(x) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

- La fonction test est approximée de la même manière :

$$w(x) = N_1(x)w_1 + N_2(x)w_2 = \langle N_1(x) \ N_2(x) \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

- Les dérivées se calculent selon :

$$\frac{dT}{dx} = \langle \frac{dN_1(x)}{dx} \ \frac{dN_2(x)}{dx} \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}, \quad \frac{dw}{dx} = \langle \frac{dN_1(x)}{dx} \ \frac{dN_2(x)}{dx} \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

- Introduction des approximations dans la forme intégrale :

$$I = I_{INT} + I_{CL}$$

$$I_{INT} = \int_0^L \langle w_1 \ w_2 \rangle \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix} k \langle N'_1 \ N'_2 \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx - \int_0^L \langle w_1 \ w_2 \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} f dx \quad (2.20)$$

$$I_{INT} = \int_0^L \langle w_1 \ w_2 \rangle k \begin{bmatrix} (N'_1)^2 & N'_1 N'_2 \\ N'_1 N'_2 & (N'_2)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx - \int_0^L \langle w_1 \ w_2 \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} f dx \quad (2.21)$$

$$I_{INT} = \int_0^L \langle w_1 \ w_2 \rangle k \begin{bmatrix} (1/L)^2 & -(1/L)^2 \\ -(1/L)^2 & (1/L)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx - \int_0^L \langle w_1 \ w_2 \rangle \begin{Bmatrix} 1 - (x/L) \\ (x/L) \end{Bmatrix} f dx \quad (2.22)$$

Soit le système obtenu :

$$I_{INT} = \langle w_1 \ w_2 \rangle \frac{k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} - \langle w_1 \ w_2 \rangle \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} f \quad (2.23)$$

Pour le terme des conditions aux limites :

$$I_{CL} = w_2 h(T_2 - T_{ext}) - w_1 q_0 = \langle w_1 \ w_2 \rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ hT_{ext} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

En regroupant les deux expressions :

$$I = I_{INT} + I_{CL} = \langle w_1 \ w_2 \rangle \left( [K] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} - \{F\} - \{R\} \right) = 0, \quad \langle w_1 \ w_2 \rangle \quad (2.25)$$



$$\text{D'où : } [K] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \{F\} + \{R\}$$

$$\text{Avec : } [K] = \begin{bmatrix} k/L & -k/L \\ -k/L & (k/L) + h \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} f(L/2) \\ f(L/2) + hT_{ext} \end{Bmatrix}, \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$[K]$  : Matrice de rigidité

$\{F\}$  : Vecteur des sollicitations externes

$\{R\}$  : Vecteur des réactions (ou flux) externes inconnus

Prise en compte de la condition à la limite :  $T(x = 0) = T_1 = 30$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k/L & (k/L) + h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ f(L/2) + hT_{ext} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$