Définition 0.5 *La famille* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\omega} \subset \mathcal{L}(E)$, *où* $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$, *s'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur* A.

Remarque 0.6 *Pour* $\lambda \in \Lambda_\omega$, *on voit bien que* A_λ *est le générateur infinitésimal du semi groupe uniformement continu* $(e^{A_\lambda t})_{\lambda\in\Lambda_\omega}$.

Lemme 0.7 *Soit* $A : \mathrm{D}(A) \subset E \to E$ *un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes*

1. *A est un opérateur fermé de domaine dense dans E.*
2. *il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\Re\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ *est l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur* A, *alors pour tous* α, $\beta \in \Lambda_\omega$ *nous avons*

$$\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\| \leq M^2 te^{t\omega}\|A_\alpha x - A_\beta x\|.$$

Preuve: Soient α, $\beta \in \Lambda_\omega$, $v \in [0,1]$ et $x \in X$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x) &= tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - tA_\beta e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x \\ &= te^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}(A_\alpha x - A_\beta x).\end{aligned}$$

En intégrant de 0 à 1 on trouve

$$\int_0^1 \frac{d}{dv}(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x)dv = \int_0^1 te^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}(A_\alpha x - A_\beta x)dv,$$

alors

$$\left.e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right]_0^1 = \int_0^1 te^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}(A_\alpha x - A_\beta x)dv,$$

donc

$$e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x = \int_0^1 te^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}(A_\alpha x - A_\beta x)dv,$$

et par conséquent

$$\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\| \leq \int_0^1 t\|e^{vtA_\alpha}\|\|e^{(1-v)tA_\beta}\|\|A_\alpha x - A_\beta x\|dv.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\alpha}\| &= \|e^{t(\alpha^2 R(\lambda,A)-\alpha I)}\| \\
&= \|e^{-t\alpha I}e^{t\alpha^2 R(\lambda,A)}\| \\
&\leq e^{-\Re\alpha t}\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\alpha^2 k(R(\lambda,A))^k}{k!}\| \\
&\leq e^{-\Re\alpha t}(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}\|\|R(\lambda,A)\|^k}{k!}) \\
&\leq e^{-\Re\alpha t}(M+M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}}{k!(\Re\alpha-\omega)^k}) \\
&\leq Me^{-\Re\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}}{k!(\Re\alpha-\omega)^k} \\
&\leq Me^{-\Re\alpha t+\frac{t|\alpha|^2}{\Re\alpha-\omega}} \\
&\leq Me^{\frac{-\Re\alpha^2 t+\Re\alpha t\omega+t\alpha^2}{\Re\alpha-\omega}} \\
&\leq Me^{\frac{t\omega\Re\alpha+t\Im\alpha^2}{\Re\alpha-\omega}},
\end{aligned}$$

quel que soit $\alpha\in\Lambda_\omega$ et $t\geq 0$. Soit $r>1$, tel que

$$\frac{\omega\Re\alpha+\Im\alpha}{\Re\alpha-\omega}<\omega r,$$

alors

$$\Re\alpha>\frac{r\omega}{r-1},$$

et par suite, pour $r>1$ et tout $\alpha\in\Lambda_\omega$ tel que $\Re\alpha>\dfrac{r\omega}{r-1}$ on obtient

$$\|e^{tA_\alpha}\|\leq Me^{r\omega t},$$

lorsque $r\to 1$ on trouve

$$\|e^{tA_\alpha}\|\leq Me^{\omega t},$$

donc

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\alpha}x-e^{tA_\beta}x\| &\leq t\int_0^1 Me^{\omega vt}Me^{\omega(1-v)t}dv\|A_\alpha x-A_\beta x\| \\
&\leq tM^2e^{\omega t}\|A_\alpha x-A_\beta x\|\int_0^1 dv \\
&\leq tM^2e^{\omega t}\|A_\alpha x-A_\beta x\|,
\end{aligned}$$

pour tout $x\in E$ et tout $t\geq 0$.■

Théorème 0.8 *(Théorème de Hille-Yosida)*
Un opérateur linéaire $A : \mathrm{D}(A) \subset E \to E$ est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}$-semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ pour lequel il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que

$$\|G(t)\| \leq Me^{\omega t}, \, \forall t \geq 0,$$

si et seulement si

1. *A est fermé de domaine dense dans E.*
2. *pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\Re\lambda - \omega)^n}, \, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve: La première implication est une conséquence directe du Théorème **??** et Théorème 0.3.

On suppose maintenant que A possède les propriétés 1. et 2.. $Soit(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. D'après le Lemme 0.4 nous avons $A_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ et $\lim\limits_{\Re\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax$ pour tout $x \in \mathrm{D}(A)$.

Pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, soit $(G_\lambda(t)) = (e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ le semi groupe engendré par A_λ. On utilise le Lemme 0.7 on trouve que

$$\|G_\alpha(t)x - G_\beta(t)x\| \leq M^2te^{t\omega}\|A_\alpha x - A_\beta x\|,$$

quelque soit α, $\beta \in \Lambda_\omega$, et pour tout $x \in \mathrm{D}(A)$ et $t \geq 0$.
Si$[a, b] \subset [0, +\infty[$, alors pour tout $x \in \mathrm{D}(A)$ nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[a,b]} \|G_\alpha(t)x - G_\beta(t)x\| &\leq M^2be^{\omega b}\|A_\alpha x - A_\beta x\| \\ &\leq M^2b\big[\|A_\alpha x - Ax\| + \|A_\beta x - Ax\|\big], \end{aligned}$$

qui converge vers 0 si $\Re\alpha$, $\Re\beta \to \infty$. Il en résulte donc que $(G_\lambda(t))_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ est une suite de cauchy dans $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathcal{L}([\mathrm{D}(A)], E))$.
Donc, il existe un unique $G_0 \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathcal{L}([\mathrm{D}(A)], E))$ tel que $G_\lambda(t)x \to G_0(t)x$ lorsque $\Re\lambda \to \infty$, quelque soit $x \in \mathrm{D}(A)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0, \infty[$.
Puisque

$$\|G_\lambda(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|, \, \forall t \geq 0,$$

on obtient

$$\|G_0(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|, \, \forall t \geq 0, \, \forall x \in \mathrm{D}(A).$$

Considérons maintenant l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Theta_0 : \mathrm{D}(A) &\to \mathcal{C}([a, b], E) \\ x &\mapsto \Theta_0(x) = G_0(\cdot)x, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [a,b] \subset [0,\infty[$.

Comme

$$\begin{aligned}
\|\Theta_0 x\|_{\mathcal{C}([a,b],E)} &= \sup_{t\in[a,b]} \|G_0(t)x\| \\
&\leq Me^{\omega b}\|x\| \\
&\leq Me^{\omega b}\|x\|_{\mathrm{D}(A)},
\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathrm{D}(A)$. On voit que Θ_0 est une application linéaire continue et puisque $\overline{\mathrm{D}(A)} = E$, elle se prolonge donc de façon unique en une application linéaire continue $\Theta : E \to \mathcal{C}([a,b],E)$ tel que $\Theta \mid_{\mathrm{D}(A)} = \Theta_0$ et

$$\|\Theta x\|_{\mathcal{C}([a,b],E)} \leq Me^{\omega b}\|x\|,$$

quelque soit $x \in E$.
Par conséquent il existe un seul opérateur $G \in \mathcal{C}([a,b],\mathcal{L}(E))$, tel que $\Theta x = G(\cdot)x$ pour tout $x \in E$.

Répétons ce procédé pour tous les intervalles compacts de $[0,\infty[$ et on obtient l'existence d'un seul opérateur noté aussi par $G \in \mathcal{C}([a,b],\mathcal{L}(E))$ tel que pour tout $x \in E$ on ait par densité $G_\lambda(t)x$ converge vers $G(t)x$, si $\Re \to \infty$, uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty[$.
De plus,

$$\|G(t)\| \leq Me^{\omega t},\ \forall t \geq 0.$$

Il est évident que $G(0)x = \lim_{\Re\lambda\to\infty} G_\lambda(0)x = x$ et

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} G(t)x &= \lim_{t\to 0}(\lim_{\Re\lambda\to\infty} G_\lambda(t)x) \\
&= \lim_{\Re\lambda\to\infty}(\lim_{t\to 0} G_\lambda(t)x) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Soient $t, s \in [0,\infty[$ et $x \in E$, alors,

$$\begin{aligned}
\|G(t+s)x - G(t)G(s)x\| &\leq \|G(t+s)x - G_\lambda(t+s)x\| + \|G_\lambda(t+s)x - G_\lambda(t)G(s)x\| \\
&+ \|G_\lambda(t)G(s)x - G(t)G(s)x\| \\
&\leq \|G(t+s)x - G_\lambda(t+s)x\| + \|G_\lambda(t)\|\|G_\lambda(s)x - G(s)x\| \\
&+ \|G(s)\|\|G_\lambda(t)x - G(t)x\| \to 0,
\end{aligned}$$

lorsque $\Re\lambda \to \infty$, et donc $G(t+s)x = G(t)G(s)x$ pour tout $x \in E$.

Montrons maintenant que A est le générateur infinitésimal du semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$. Pour tout $x \in \mathrm{D}(A)$ on a

$$\begin{aligned}
\|G_\lambda(s)A_\lambda x - G(s)Ax\| &\leq \|G_\lambda(s)A_\lambda x - G_\lambda(s)Ax\| + \|G_\lambda(s)Ax - G(s)Ax\| \\
&\leq \|G_\lambda(s)\|\|A_\lambda x - Ax\| + \|G_\lambda(s)Ax - G(s)Ax\| \\
&\leq Me^{\omega t}\|A_\lambda x - Ax\| + \|G_\lambda(s)Ax - G(s)Ax\| \to 0,
\end{aligned}$$