Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes
et Informatique
Département de Mathématiques

Masters E.D.P et Applications
EDP d'Evolution
14/04/ 2020

Travaux Dirigés

Exercice 01: Soit $E = L^2(\mathbb{R}^n)$, on considère l'application de" translation"

$$(S(t)u)(x) = u(t+x),\ u \in L^2(\mathbb{R}^n,\ \forall t \geq 0.$$

1. Montrer que $(S(t))_{t\geq 0}$ est semi groupe fortement continu.
2. Déterminer le générateur infinitésimal de ce semi groupe.

Exercice 02: Soient $p \in [1, \infty[$ et

$$l_p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

avec la norme $\|x_n\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Considérons une suite de nombres réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et définissons une famille $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur l'espace l_p par

$$T(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (e^{-a_n t}x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \forall t \geq 0.$$

1. Montrer que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu.
2. Trouver son générateur infinitésimal.

Exercice 03: Soient E un espace de Banach, B un opérateur linéaire borné et soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$.

1. Montrer que l'opérateur $\lambda id - (A+B)$ est inversible pour tout $\Re > \omega + M\|B\|$.
2. En déduire que $\{\lambda\mathbb{C} : \Re\lambda > \omega + M\|B\|\} \subset \rho(A+B)$.
3. Montrer que
$$\|R(\lambda, A+B)\| \leq \frac{1}{\lambda - (\omega + M\|B\|)}.$$
4. En déduire que $A+B$ est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ qui satisfait
$$\|S(t) \leq Me^{t(\omega+M\|B\|)},\ \forall t \geq 0.$$
5. Considérons l'opérateur $H(s) = G(t-s)S(s)$. Montrer que pour tout $x(A)$, l'application $H(s)$ est dérivable et calculer sa dérivéesi elle existe puis montrer que
$$S(t) = G(t) + \int_0^t G(t-s)BS(s)ds,\ \forall t \geq 0.$$
6. En déduire que
$$\|S(t) - G(t)\| \leq Me^{\omega t}(e^{M\|B\|t} - 1),\ \forall t \geq 0.$$

Exo 1 Solution du TD

$$G(t)\, u(x) = u(t+x). \qquad \forall u \in L^2(\mathbb{R})$$

Montrer que $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe.

Remarquons tout d'abord que

$$\|G(t)u\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} |u(t+x)|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |u(\xi)|^2 d\xi = \|u\|^2_{L^2}$$

et par suite $\|G(t)\| = 1$.

$G(0)u(x) = u(x+0) = u(x) \Rightarrow G(0) = id.$

$$G(t+s)u(x) = u(t+s+x)$$

$$= u(t+(s+x)) = G(t)u(s+x)$$

$$= G(t)\,G(s)u.$$

d'où

$$G(t+s) = G(t)\,G(s).$$

On sait que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on ait

$$\|G(t)\varphi - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq [\text{mes Supp } \varphi]^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x+t) - \varphi(x)|.$$

soit $u \in L^2(\mathbb{R})$, grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite d'éléments $(u_\varepsilon) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers u, c'est à dire,

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^2} \leq \varepsilon/3$$

d'où

$$\|G(t)u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|G(t)u - G(t)u_\varepsilon\|_{L^2} + \|G(t)u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2} + \|u_\varepsilon - u\|_{L^2}$$

$$\leq \|G(t)\|.\|u_\varepsilon - u\| + \|G(t)u_\varepsilon - u_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon - u\|$$

$$\leq 2\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left[\text{mes supp } u_\varepsilon\right]^{1/2} \sup |u_\varepsilon(x+t) - u_\varepsilon(x)|$$

puisque u_ε est continue alors il existe $\eta > 0$ pour $|t| < \eta$ on a

$$|u_\varepsilon(x+t) - u_\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3\left[\text{mes supp } u_\varepsilon\right]^{1/2}}$$

et par conséquent

$$\|G(t)u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

d'où la continuité forte de $(G(t))_{t \geq 0}$

) <u>Le générateur</u> <u>infinitésimal</u> :

On doit démontrer en premier lieu que

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(h)u - u}{h} = \frac{du}{dx} \quad \text{au sens des distributions}$$

pour $\varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$\left\langle \frac{G(h)u - u}{h}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \times \varphi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} u(x+h)\varphi(x) - \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x-h)\, dx - \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} u(x) \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}\, dx$$

$$\lim_{h \to 0} \left\langle \frac{T(h)u - u}{h}, \varphi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} u(x) \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}\, dx$$

$$= \langle -u, \varphi' \rangle = \langle u', \varphi \rangle$$

$\vdash$ donc (2) $\lim \frac{G(h)u - u}{h} = \frac{du}{dx}$ au sens des distributions.