

4)

$$\left\| \frac{G(t)x_n - x_n}{t} + a_n x_n \right\|_{l_p}^p$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} x_n - x_n}{t} + a_n x_n \right|^p$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} x_n - x_n}{a_n t} a_n x_n + a_n x_n \right|^p$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-a_n t} - 1}{a_n t} + 1 \right|^p \times |a_n x_n|^p$$

$$\{x_n \in l_p : (a_n x_n) \in l_p\} \subset \mathcal{D}(A)$$

Exo3:

1) $\lambda \text{id} - (A+B)$ est inversible pour $\text{Re } \lambda > \omega + M \|B\|$:

$$\lambda \text{id} - (A+B) = (\lambda \text{id} - A) - B = (\lambda \text{id} - A)(\text{id} - R(\lambda, A)B).$$

on a $\lambda \in \rho(A)$ d'où $\lambda \text{id} - A$ est inversible et donc pour que $\lambda \text{id} - (A+B)$ soit inversible il faut que $\text{id} - R(\lambda, A)B$ soit inversible. $\text{id} - R(\lambda, A)B$ est inversible si et seulement si $\|R(\lambda, A)B\| < 1$.

$$\|R(\lambda, A)B\| \leq \|R(\lambda, A)\| \cdot \|B\|$$

$$< \frac{M}{\text{Re } \lambda - \omega} \times \frac{\text{Re } \lambda - \omega}{M} = 1$$

d'où $\text{id} - R(\lambda, A)B$ est inversible.

2- Comme $\lambda \text{id} - (A+B)$ est inversible pour tout $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{Re } \lambda > \omega + M \|B\|\}$ alors

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Re } \lambda > \omega + M \|B\|\} \subset \rho(A+B).$$

3 -

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A+B)\| &= \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} (R(\lambda, A)B)^k \right) R(\lambda, A) \right\| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|R(\lambda, A)\|^k \cdot \|B\|^k \right) \|R(\lambda, A)\| \\ &\leq \|R(\lambda, A)\| \times \frac{1}{1 - \|R(\lambda, A)\| \cdot \|B\|} \\ &\leq \frac{M}{\text{Re } \lambda - (\omega + M \|B\|)} \end{aligned} \quad (7)$$

④ $D(A+B) = D(A)$ (car B est borné).

$$\overline{D(A+B)} = E.$$

$A+B$ est fermé.

Pour $\lambda \in \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega + M \|B\| \}$ on a $\lambda \in \mathcal{S}(A+B)$

et on a

$$\|R(\lambda, A+B)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - (\omega + M \|B\|)}.$$

et par conséquent d'après le théorème de Hille-Yosida $A+B$ est le générateur infini d'un C_0 -semi-groupe $(S(t))$ qui satisfait la condition

$$\|S(t)\| \leq M e^{(\omega + M \|B\|)t} \quad \forall t \geq 0.$$

5) soit $x \in D(A) = D(A+B) \Rightarrow S(s)x \in D(A)$ et $AS(s)x = S(s)Ax$.
D'autre part. $s \mapsto G(t-s)S(s)x$ est dérivable et

$$H'(s) = \frac{dG(t-s)}{ds} S(s)x + G(t-s) \frac{dS(s)}{ds} x.$$

$$\boxed{H'(s) = G(t-s)BS(s)x}$$

on intègre les deux membres de l'égalité

$$H(t)x - H(0)x = \int_0^t G(t-s)BS(s)x \, ds.$$

$$\Rightarrow S(t)x = G(t)x + \int_0^t G(t-s)BS(s)x \, ds,$$

d'après (5) on a