Université de Jijel
Master I: SIAD
Enseignante: Dr. Saloua CHETTIBI
Intitulé de la matière: OPTIMISATION STOCHASTIQUE (OS)

Avant-Propos

Un **problème d'optimisation (PO)** prend le format général suivant:

Min $f(\vec{x})$ (f : fonction objectif ou coût $\vec{x}$: variables de décisions)
S.C
$\vec{g}(\vec{x}) \leq 0$ (Plusieurs contraintes d'inégalité)
$\vec{h}(\vec{x}) = 0$ (Plusieurs contraintes d'égalité)

Stochastique veut dire de nature aléatoire : en opposition avec ce qui est déterministe.

Optimisation Stochastique (OS)

Recherche de (ou des) solution(s) optimale(s) (i.e. qui minimise une fonction coût ou maximise une fonction bénéfice) en présence d'incertitude concernant les paramètres du problème (dans la fonction objectif et/ou dans les contraintes.)

Programme de la matière

1. Programmation dynamique déterministe – Exercices
2. Programmation dynamique Stochastique – Exercices
3. Introduction à la programmation linéaire stochastique
4. Problèmes avec recours – Exercices (Parties 3 & 4)
5. Problèmes avec contraintes probabilistes – Exercices

Partie I. Programmation Dynamique Déterministe

1. Introduction

Les problèmes auxquels nous nous intéresserons, dans ce chapitre, sont associés à des situations où des décisions doivent être prises de manière **séquentielle**. Le but recherché est la minimisation d'un coût ou la maximisation d'un profit associé à la **suite de décisions** retenues.

Le modèle de **base** considéré, dans ce qui suit, repose sur deux éléments essentiels:

1- Un système dynamique à temps discret.

2- Une fonction coût additive dans le temps.

A savoir, un système **dynamique** est un système qui évolue au cours du temps. Nous nous intéressons particulièrement au cas d'une évolution **discontinue** dans le temps qu'on peut schématiser comme suit :

$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow \quad ......$$

2. Modèle de base

a) L'évolution de l'état du système au fil des N périodes sous l'influence des décisions prises peut être décrite comme suit :

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) \quad k = 1,2, \dots, N$$

Tel que :

k : numérote les périodes ou les étapes.

f_k: fonction de transfert ou de transition.

x_k : état du système au début de la période k , $x_k \in S_k$. S_k est l'ensemble de tous les états possibles.

u_k : décision (ou contrôle) devant être prise à la période k, $u_k \in C_k$. C_k est l'ensemble de toutes les décisions possibles.

NB. Une variable de décision est généralement contrainte à prendre ses valeurs dans un sous ensemble non vide $U_k \subseteq C_k$ qui peut dépendre de x_k.

On définit aussi la fonction $\boldsymbol{\mu_k}$ *qui* associe à chaque état $x_k \in S_k$ une décision :

$$u_k = \boldsymbol{\mu_k}(x_k).$$

b) Une fonction coût $g_k(x_k, u_k)$ est associée à chaque période du système dynamique (on parle de **coût intermédiaire**).

c) Il est possible de définir un **coût terminal** dépendant uniquement de l'état atteint à la fin du processus et qu'on dénote $g_{N+1}(x_{N+1})$.

$d)$ $Soit$ $\pi = \{\mu_{1,}\mu_{2,\dots,}\mu_N\}$ une politique de décision. Le **coût total** associé à l'état x_j et à la politique π est défini comme suit:

$$J_\pi(x_j) = g_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{k=j}^{N} g_k(x_k, \mu_k(x_k))$$

Le **coût optimal** pour un système débutant dans l'état x_1, noté $\mathrm{J}^*(x_1)$, satisfait :

$$\mathrm{J}^*(x_1) = J_{\pi^*}(x_1) = \min_{\pi\in\Pi} J_\pi(x_1)$$

Tel que π^* dénote la politique optimale.

Exemple 1: Modélisation du problème de sac à dos en tant qu'un processus de décisions séquentielles

On veut charger un sac de volume ***b*** par des objets de différents types numérotés de 1 à N. Chaque objet de type k est caractérisé par une valeur (reflétant son importance) $c_k > 0$ entière et un volume $a_k > 0$ également entier. Le problème de la sélection d'un ensemble d'objets de valeur maximale ne dépassant pas le **volume du sac** est généralement défini sous forme d'un programme linéaire en nombre entiers non négatifs:

$$\left|\begin{array}{l} Max \displaystyle\sum_{k=1}^{N} c_k x_k \\ \text{s.c : } \sum_{k=1}^{N} a_k x_k < b \end{array}\right.$$

Ce problème peut être également modélisé par un processus de décisions séquentielles caractérisé par:

Etapes : On constate qu'on doit prendre une décision par type d'objet. Alors, les étapes seront numérotées de 1 à N. le nombre des étapes étant égal au nombre de décisions à prendre.

Etats : L'état x_k du système au début de l'étape k correspond à l'espace disponible pour l'insertion des objets de type : *k, k+1,…,N.* $x_k \in \{0,1, \dots, b\}$. (i.e disponible après insertion des objets 1…k-1)

Indication : Pour identifier l'état du système, on peut se poser des questions comme: Qu'est ce qui est en train d'évoluer au fil des périodes ? Quelle information faut-il connaitre pour prendre une nouvelle décision.

Décisions : La décision u_k de l'étape k consiste à choisir le nombre d'objets de type *k* à inclure dans la sélection.

Chaque décision doit vérifier $0 \leq u_k \leq \left\lfloor \frac{x_k}{a_k} \right\rfloor$.

Fonction de transfert (transition) : Si u_k objets de type k sont sélectionnés, l'espace disponible à l'étape k+1 est :

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) = x_k - a_k u_k, \quad k=1,2,\ldots,N$$

Fonction coût : La valeur des objets sélectionnés à l'étape k est définie comme suit:

$$g_k(x_k, u_k) = c_k u_k$$

Le profit total sera alors : $\sum_{k=1}^{N} g_k(x_k, u_k) = \sum_{k=1}^{N} c_k u_k$

Clairement, aucun bénéfice terminal n'est défini : $g_{N+1}(x_{N+1}) = 0$

3. Programmation Dynamique (PD)

La PD (*Richard Bellman -1957*) est une technique algorithmique qui permet de résoudre un problème d'optimisation séquentielle sous condition qu'il vérifie le **principe d'optimalité de Bellman** qui s'énonce ainsi : «Toute politique optimale (*pour un problème donné*) ne peut être formée que de sous-politiques optimales (*pour ses sous problèmes*) ». Ce principe se démontre par *l'absurde*.

Cette démonstration s'appuie sur l'équivalence entre les problèmes de décisions déterministes à espace d'état fini et les problèmes de plus courts chemins. La recherche d'une politique de décision optimale revient alors à déterminer dans un graphe un **plus court** chemin (dans un problème de **minimisation**).

Etat →	Sommet
Décision →	Arc
Coût intermédiaire →	Poids associés aux arcs

Soit le plus court chemin entre deux sommets X et Y :

$$X = X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \ldots \rightarrow X_{N-1} \rightarrow X_N = Y$$

Alors, le plus court chemin entre X_i et X_j ($\forall\, i, j$ et $i < j$) est forcément

$$X_i \rightarrow X_{i+1} \ldots \rightarrow X_{j-1} \rightarrow X_j$$

Puisqu'il s'il existait un autre sous-chemin optimal entre X_i et X_j :

$$X_i \to X'_{i+1} \dots \to X'_{j-1} \to X_j$$

Alors le chemin

$X = X_0 \to X_1 \to \cdots \boldsymbol{X_i} \to X'_{i+1} \dots \to X'_{j-1} \to \boldsymbol{X_j} \dots \to X_{N-1} \to X_N = Y$

Serait meilleur que le chemin primitif ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Remarque

Si la fonction coût est additive, alors le principe d'optimalité de Bellman est garanti et donc l'algorithme de la programmation dynamique est applicable.

Théorème (Principe d'optimalité)

Soit $\pi^* = \{\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_N^*\}$ une politique optimale pour un problème de décisions sur N périodes. Si en mettant en œuvre π^*, l'état x_j est atteint à la période j, la politique partielle $\{\mu_j^*, \mu_{j+1}^*, \dots, \mu_N^*\}$ est optimale pour le sous-problème correspondant aux (N-j+1) périodes restantes. Plus formellement, $\{\mu_j^*, \mu_{j+1}^*, \dots, \mu_N^*\}$ minimise les coûts:

$$g_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{k=j}^{N} g_k(x_k, \mu_k(x_k))$$

3.1 Algorithme de la PD

1. **Construction de la politique optimale**
   a. Initialisation

      $J_{N+1} := g_{N+1}(x_{N+1}) \quad \forall\, x_{N+1} \in S_{N+1}$

   b. Pour k=N, N-1,…,1 et pour tout $x_k \in S_k$ résoudre

      $J_k(x_k) := \min_{u_k \in U_k(x_k)} \{ g_k(x_k, u_k) + J_{k+1}(f_k(x_k, u_k)) \}$ ……(*)

      et stocker la valeur $J_k(x_k)$ ainsi que la décision $\mu_k^*(x_k) := u_k^*$ pour laquelle le minimum est atteint.

2. **Lecture de la solution optimale (pour l'état initial x_1)**
   a. Le coût optimal est $J^* = J_1(x_1)$.
   b. La suite de décisions optimales est $u_1^* = \mu_1^*(x_1)$

      Et $u_k^* = \mu_k^*(f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}^*)),\ k = 2,3,\dots,N$

3.2 Variantes et extensions

1. L'algorithme de la programmation dynamique s'applique également aux formes de fonction coût suivantes :

Fonctions multiplicatives

Le coût total est donné par :

$$g_{N+1}(x_{N+1}).\prod_{k=1}^{N} g_k\left(x_k, u_{k,}\right)\ k = 1,2,\ldots,N$$

Avec les conditions suivantes:

$$g_{N+1}(x_{N+1}) \geq 0, \forall\ x_{N+1}\ et\ g_k\left(x_k, u_{k,}\right) \geq 0, pour\ tout\ x_k, u_{k,}\ \ et\ k$$

L'algorithme de la programmation dynamique est identique au cas additif, à l'exception de la formule (*) qui est remplacée par :

$$J_k(x_k) \coloneqq \min_{u_k \in U_k(x_k)} g_k(x_k, u_k).J_{k+1}(f_k(x_k, u_k)$$

Fonctions MIN-MAX

Le coût total est donnée par :

$$\max\{g_1\left(x_k, u_{k,}\omega_k\right), g_2\left(x_k, u_{k,}\omega_k\right), \ldots, g_N\left(x_N, u_{N,}\omega_N\right), g_{N+1}(x_{N+1})\}k = 1,2,\ldots,N$$

(*) devient: $J_k(x_k) \coloneqq \ \min_{u_k \in U_k(x_k)} \max\{g_k(x_k, u_k), J_{k+1}(f_k(x_k, u_k)\}$

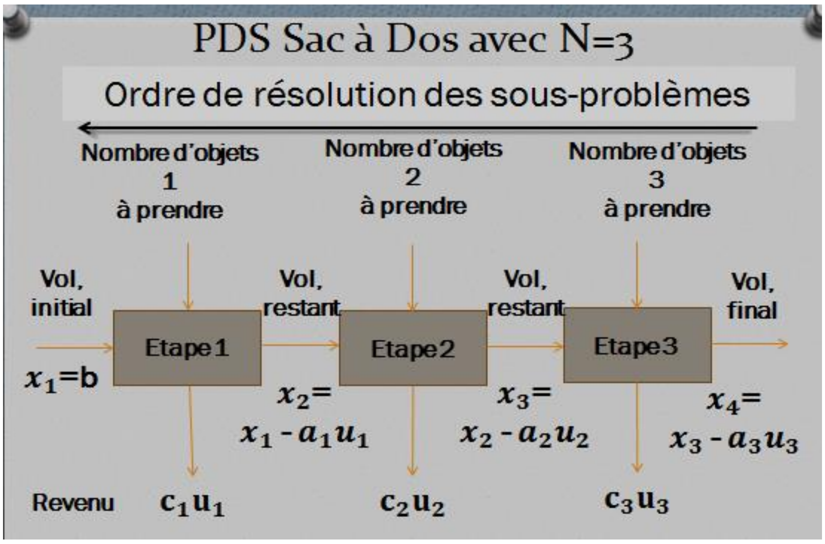
2. L'algorithme de la programmation dynamique est également applicable à des processus de décisions séquentielles plus généraux comportant des variables d'état et/ou de **décisions multidimensionnelles** (i.e vecteurs à *d* composantes) et/ou continues.

3. Il est également très facile d'inclure un **facteur d'actualisation** (aussi appelé facteur d'escompte) dans l'algorithme de la PD. L'objectif est alors de déterminer une politique de décision optimisant la somme (ou le produit) des coûts actualisés (escomptés).

Exemple 1- Suite : Résolution du problème de sac à dos par l'algorithme de la PD

On cherche le chargement optimal d'un sac de volume 6. Les caractéristiques des objets susceptibles d'être inclus dans ce sac sont données par le tableau suivant :

Objet K	1	2	3
Valeur c_k	5	3	7
Volume a_k	3	2	4



A chaque étape ***k*** nous cherchons la solution du problème suivant :

$$J_k\,(x_k) := \max_{u_k \in U_k(x_k)} \{ c_k\, u_k + J_{k+1}\,(x_{k+1}) \}$$

$$\textbf{S.C } x_{k+1} = x_k \text{-} a_k u_k \geq 0$$

$$u_k \geq 0 \; entier$$

Initialisation

$J_4\,(x_4) = 0.$

Etape3

$$J_3\,(x_3) := \max_{u_3} \{ c_3\, u_3 \} = \max_{u_3} \{7u_3\}$$

$$\textbf{S.C } \; 0 \leq u_3 \leq \left\lfloor \frac{x_3}{4} \right\rfloor \; entier$$

Pour $x_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$J_3\,(x_3) = \max_{u_{3=0}} \{7u_3\} = 0 \,;\, \mu_3^*(x_3) = 0$

Pour $x_3 \in \{4, 5, 6\}$:

$J_3\,(x_3) := \max_{u_3} \{ c_3\, u_3 \} = \max_{u_{3 \in \{0,1\}}} \{7.0, 7.1\} = 7 \,;\, \mu_3^*(x_3) = 1$

La table optimale de l'étape 3 est donc :

x_3	0	1	2	3	4	5	6
$J_3\,(x_3)$	0	0	0	0	7	7	7
$\mu_3^*(x_3)$	0	0	0	0	1	1	1

Etape2

$$J_2\,(x_2) = \max_{u_2} \{ 3\, u_2 + J_3\,(x_3) \} = \max_{u_2} \{ 3\, u_2 + J_3\,(x_2 - 2u_2) \}$$

$$\textbf{S.C } \; 0 \leq u_2 \leq \left\lfloor \frac{x_2}{2} \right\rfloor \; entier$$

Pour $x_2 \in \{0, 1\}$:

$J_2\,(x_2) = 0;\ \mu_2^*(0) = \mu_2^*(1) = 0.$

Pour $x_2 = 2$:

$J_2\,(x_2) = \max_{u_{2\in\{0,1\}}}\{ 3\,u_2 + J_3\,(x_2 - 2u_2)\} = max\{ 3\ \times 0 + J_3\,(2), 3\ \times 1 +$
$J_3\,(0)\}$
$= max\{0 + 0{,}3 + 0\} = 3; \mu_2^*(2) = 1$

Pour $x_2 = 3$:

Identique au cas précédent : toujours $u_2 \in \{0{,}1\}$ et $J_3\,(3) = J_3\,(2) = 3$; $\mu_2^*(3) = 1$

Pour $x_2 = 4$:

$J_2\,(x_2) = \max_{u_{2\in\{0,1,2\}}}\{ 3\,u_2 + J_3\,(x_2 - 2u_2)\} = max\{ 3\ \times 0 + J_3\,(4), 3\ \times 1 +$
$J_3\,(2), 3\ \times 2 + J_3\,(0)\} = \max\{0 + 7, 3 + 0, 6 + 0\} = 7$
$= max\{0 + 0{,}3 + 0\} = 3; \mu_2^*(4) = 0.$

Cette valeur ne change pas pour $x_2 = 5$

Pour $x_2 = 6$:

$J_2\,(x_2) = \max_{u_{2\in\{0,1,2,3\}}}\{ 3\,u_2 + J_3\,(x_2 - 2u_2)\} = max\{ 3 \times 0 + J_3\,(6), 3 \times 1 +$
$J_3\,(4), 3 \times 2 + J_3\,(2), 3 \times 3 + J_3\,(0)\} = \max\{0 + 7, 3 + 7, 6 + 0, 9 + 0\} = 10$;
$\mu_2^*(6) = 1$

La table optimale de l'étape 2 est donc :

x_2	0	1	2	3	4	5	6
$J_2\,(x_2)$	0	0	3	3	7	7	10
$\mu_2^*(x_2)$	0	0	1	1	0	0	1

Etape 1

Dans cette étape l'unique problème à résoudre est :

$$J_1\,(6) = \max_{u_{1\in\{0,1,2\}}}\{ 5\,u_1 + J_2\,(6 - 3u_2)\} = max\{5 \times 0 + J_2\,(6), 5 \times 1 + J_2\,(3), 5 \times 2 + J_2\,(0)\} = \max\{0 + 10{,}5 + 3{,}10 + 0\} = 10$$

Il existe deux décisions optimales $\mu_1^*(6) = 0$ ou 2.

Pour chacune d'elles nous pouvons reconstruire la sélection optimale en consultant les politiques stockées dans les tables des étapes 2 et 3.

Lecture de la solution optimale :

Si $u_1^* = 0$

L'état du système à l'étape 2, le volume encore disponible est, $x_2 = 6 - 3\mathrm{u}_1^* = 6$; la décision optimale pour cet état est $u_2^* = 1$

Le volume restant après une telle sélection est $x_3 = 6 - 2\mathrm{u}_2^* = 4$; la décision optimale pour cet état est $u_3^* = 1$.

La suite de décisions est donc {0,1,1} et correspond à un chargement formé d'un objet 2 et d'un objet 3.

NB. La valeur de cette solution est égale à 3+7=10= $J_1\,(6)$

Si $\boldsymbol{u_1^* = 2}$:

la politique optimale sera {2,0,0}.

TD N°1. Programmation Dynamique Déterministe

Partie I

Modéliser les problèmes suivants en tant que des processus de décisions séquentielles. Pour chaque problème, déterminer l'équation à résoudre à chaque étape de l'algorithme de la programmation dynamique.

1. **Problème d'investissement, Modèle de base**

Une entreprise dispose d'un budget de 500.000 *u.m* pour l'amélioration de ses usines pendant l'année à venir. L'entreprise possède 3 sites de production dont les bénéfices annuels, en fonction de la somme investie pour leur amélioration, sont connus (voir le tableau ci-dessous). Nous supposons que les investissements doivent être des multiples entiers de 100.000 *u.m*. L'entreprise cherche une politique d'amélioration qui maximise ses bénéfices annuels.

Ce problème se modélise d'une manière très similaire au problème du sac à dos. L'équation à résoudre à chaque étape de l'algorithme de la PD est :

$$J_k(x_k) = \max_{u_k \in U_k(x_k)} \{g_k(x_k, u_k) + J_{k+1}(x_k - u_k)\}$$

Les étudiants doivent résoudre ce problème comme devoir avec les données numériques suivantes ; à savoir un montant non investi ne génère aucun profit d'où l'initialisation :

$$J_4(x_4) = x_4$$

	Montants investis					
	0	1	2	3	4	5
Site 1	1	3	4	5	5.5	6
Site 2	0.5	2.5	4	5	6	6.5
Site 3	2	4	5.5	6.5	7	7.5

2. **Problème du garagiste, Facteur d'actualisation**

Un garagiste a besoin d'un équipement spécial pour effectuer les contrôles antipollution des véhicules de ses clients. Le prix d'un appareil neuf est égale à **P** et il doit être changé après 3 ans au maximum. Le coût de maintenance de l'installation pendant sa i[eme] année d'utilisation est $\boldsymbol{c_i}$ et son revenu annuel est $\boldsymbol{r_i}$. A la fin de chaque année, le garagiste doit décider s'il veut conserver l'équipement pour l'année suivante ou le remplacer par un appareil neuf. Le prix de revente d'un appareil dépend de son âge $\boldsymbol{i}$ soit $\boldsymbol{p_i}$. A la fin de la 5ème année, l'installation doit être revendue. Le garagiste cherche à minimiser ses coûts escomptés pour les 5 ans à venir.

Dans ce problème, on considère un facteur d'actualisation des coûts et des profits $\mathbf{0} < \alpha < 1$, tel que un montant m disponible dans $\boldsymbol{n}$ années correspond à un montant $\boldsymbol{\alpha^n m}$ disponible immédiatement.

N = 5 associé aux années d'utilisation de l'appareil.

L'état correspond à l'âge de la machine ; d'ailleurs c'est le critère selon lequel on décide si on doit garder ou vendre la machine. La fonction $g_k\,(x_k, u_k)$ se définit selon la règle : $Coût = \; Dépenses - Revenus$.

L'équation à résoudre à chaque étape de l'algorithme de la PD est :

$$J_k\,(x_k) = \min_{u_k \in U_k(x_k)} \{g_k\,(x_k, u_k) + \alpha J_{k+1}\,(x_k - u_k)\,\}$$

3. Problème d'affectation des tâches au personnel, Cas multidimensionnel

Une compagnie emploie 3 ingénieurs en électricité (IE), 3 ingénieurs en mécanique (IM), et un nombre illimité de techniciens (Techs). Cette compagnie doit accomplir 4 tâches la semaine prochaine: A, B, C et D. On considère qu'on connait la durée associée à chaque paire (combinaison de personnel, tâche). De plus, les contraintes suivantes sont à respecter : 1) Au maximum deux ingénieurs peuvent être affectés à une tâche. 2) Si des techniciens sont affectés à une tâche, aucun ingénieur ne doit être affecté à cette même tâche. La compagnie cherche à affecter du personnel aux différentes tâches de manière à minimiser le temps total.

K est associé aux quatre tâches.

Le vecteur d'état : nombre des IE et IM disponibles au début de la période k; à savoir l'état initial (3,3).

Le vecteur décision : nombre des IE et IM à affecter à la tâche k, la somme des deux composantes ne doit dépasser 2 selon les contraintes de l'exercice. La décision (0,0) implicitement veut dire l'affectation de la tâche à des techniciens.

Comme exercice supplémentaire, les étudiants peuvent résoudre ce problème pour les combinaisons tâches/ personnel ci-dessous

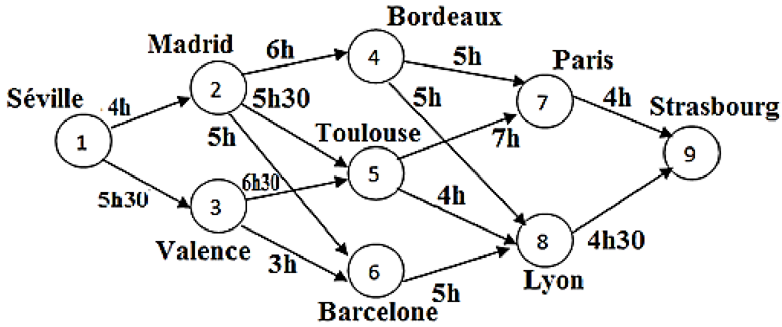
	Techs	1 IM	2 IM	1 IE	2 IE	1 IM 1IE
A	45	49	30	47	21	15
B	-	73	15	-	27	20
C	60	52	24	78	54	-
D	75	70	57	61	80	57

La politique optimale doit être: {(2,0),(1,1),(0,2),(0,0)}

<u>Partie II</u> Application de l'algorithme de la PDD

1. **Problème d'itinéraire de voyage, fonction MIN-MAX**

Un automobiliste doit se rendre de Séville à Strasbourg. Il a décidé d'effectuer le voyage en 4 jours et d'en profiter pour rendre visite à quelques amis. Afin de limiter les risques d'accident dus à la fatigue, il aimerait minimiser la durée de sa plus longue étape journalière. Trouver le chemin de voyage optimal.



<u>Modélisation</u>

$k \in \{1,..,4\}$ associé aux 4 jours du voyage.

x_k : ville dans laquelle se trouve l'automobiliste le matin du jour k.

u_k : Destination du jour k

$x_{k+1} = u_k$

$t_k\ (x_k, u_k)$: Durée du trajet entre la ville x_k et la ville u_k (mentionnée sur le graphe)

<u>Initialisation</u>

$$J_5\ (Strasbourg) = 0$$

<u>Etape 4</u>

Comme la destination du jour 4 (destination finale) est imposée, une seule décision est possible (Strasbourg)

x_4	**Paris**	**Lyon**
$J_4\,(x_4)$	4	4,5
$\mu_4^*(x_4)$	Strasbourg	Strasbourg

Etape 3

Pour chaque valeur possible de x_3, à savoir Bordeaux (4) Toulouse(5) Barcelone (6) on doit résoudre :

$$J_3\,(x_3) = \min_{u_3 \in U_3(x_3)}\{\ \max\{t_3\,(x_3,u_3), J_4\,(u_3)\}\}$$

Pour $x_3 = 4$

$$J_3\,(4) = \min_{u_3 \in \{7,8\}}\{\ \max\{t_3\,(4,u_3), J_4\,(u_3)\}\}$$

$= min\{\,max\{t(4{,}7), J_4\,(7)\}\,, max\{t(4{,}8), J_4\,(8)\}\} = min\{max\{5{,}4\}\,, max\{5{,}4.5\}\} = min\{5{,}5\} = 5$

Alors les deux destinations sont optimales.

On procède de la même façon pour les états et les étapes restants ; on aura par la suite les tables d'optimalité suivantes

x_3	**Bordeaux**	**Toulouse**	**Barcelone**
$J_3\,(x_3)$	5	4.5	5
$\mu_3^*(x_3)$	Paris , Lyon	Lyon	Lyon

Etape 2

x_2	**Madrid**	**Valence**
$J_2\,(x_2)$	5	5
$\mu_2^*(x_2)$	Barcelone	Barcelone

Etape 1

La ville de départ est $x_1 = 1$ (Séville)

$$J_1\,(1) = \min_{u_{1 \in \{2,3\}}}\{\ \max\{t_1\,(1,u_1), J_2\,(u_1)\}\} = \min\{\max\{4{,}5\}\,, \max\{5.5\,{,}5\}\} = 5$$

La première destination : $\mu_1^*(1) = u_1^* = 2\ (Madrid)$

La suite des décisions en consultant les tables est :

Séville →Madrid →Barcelone →Lyon → Strasbourg

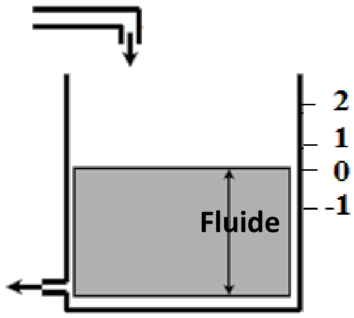
Et le plus long trajet journalier ne dépasse pas 5 heures.

Problèmes de contrôle optimal (Problème 2 & 3)

Dans un problème de contrôle, la « décision » correspond au contrôle appliqué sur le système. L'objectif d'un processus de contrôle est que l'état du système suive une certaine référence. Toute déviation par rapport à la référence est alors pénalisée.

2. **Problème de contrôle d'un réservoir**

Considérons le réservoir de la figure. Le fluide sort du réservoir à un taux fixé à **1** (du trou en bas) et il peut être introduit dans le réservoir avec le robinet en haut. La quantité du flux entrant peut être contrôlée et elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$. On restreint le niveau du réservoir à l'ensemble fini $\{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$.



Sur l'horizon : $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{5}$ on veut que le réservoir suive la référence suivante:

$$\boldsymbol{r_i} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{i} = \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5} \end{cases}$$

On veut atteindre cet objectif de façon que le coût suivant soit minimisé :

$$(\boldsymbol{x_5} - \boldsymbol{r_5})^2 + \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{4}} ((\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{r_i})^2 + \boldsymbol{u_i}^2)$$

1. Définir les variables d'état et de décision ainsi que la fonction de transition.

2. Pour un état initial égal à zéro, trouver la politique optimale.

NB. Pour un coût indéfini, utiliser la notation ∞ et négliger le dans les calculs.

Modélisation du problème en tant que PDS

$k \in \{1, .., 4\}$

$x_k \in \{-1,0,1,2\}$

$u_k \in \{0,1,2\}$

$f_k(x_k, u_k) = x_k + u_k - 1$

$g_k(x_k, u_k) = (x_k - r_k)^2 + {u_k}^2$

$g_5(x_5) = (x_5 - r_5)^2$

Après application de l'algorithme de la PD, on trouve que la politique optimale est {1,2,1,1} avec un coût minimal de 10.

3. **Problème de contrôle d'un engin volant**

Considérons un modèle de contrôle de la trajectoire d'un engin volant (avion, fusée, satellite, etc.). Supposons que le temps a été discrétisé en N intervalles numérotés de 1 à N. La vitesse de l'engin peut être modifiée au début de chaque intervalle et le but du contrôle est d'atteindre une vitesse cible V à la fin de l'intervalle N. Afin d'éviter des changements trop brusques, toute variation Δ_v de la vitesse est pénalisée par un coût égale à Δ_v^2 . Si, à la fin du processus, la vitesse v atteinte ne correspond pas à la vitesse V souhaitée, une pénalité égale à $4(V\text{-}v)^2$ est également encourue. Déterminer, pour chaque intervalle *k*, la vitesse de l'engin de manière à minimiser la somme des pénalités. Considérer : N=2, la vitesse initiale=0 et la vitesse cible V=900.

L'état correspond à la vitesse au début de l'intervalle k tandis que la décision est la vitesse cible du même intervalle. La fonction de transition est linéaire : $x_{k+1} = u_k$ *. Le coût intermédiaire est quadratique*$(x_k - u_k)^2$*. Le coût terminal est* $4(V - x_{N+1})^2$*. Dans cet exercice, la résolution analytique (ici la vitesse est continue) du problème nous donne une politique de {400,800}.*

Indication

Une fonction polynôme du second degré atteint son optimum (ici son minimum) lorsque sa dérivée première s'annule.

Partie 2. Programmation Dynamique Stochastique (PDS)

L'évolution de l'état du système n'est pas contrôlée seulement par les décisions prises mais elle est également soumise à l'influence de facteurs extérieurs : le hasard.

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \omega_k), \qquad k = 1,2, \dots, N$$

Tel que :

ω_k : Le paramètre aléatoire dont on connait la distribution de probabilité et qui peut dépendre de x_k, u_k (mais pas des perturbations précédentes).

Notons qu'en optimisation stochastique, les décisions sont prises sous incertitude c'est-à-dire avant la réalisation de l'évènement aléatoire (et donc que l'incertitude soit levée).

La fonction coût devient : $g_k(x_k, u_k, \omega_k)$ et on définit l'espérance du **coût total** associé à un état x_j *et* à *une politique* π comme suit:

$$J_\pi(x_j) = \boldsymbol{E}_{\omega_k}\left[g_{N+1}(x_{N+1}) + \sum_{k=j}^{N} g_k(x_k, u_k, \boldsymbol{\omega_k})\right]$$

Rappel

Considérons une variable aléatoire Y discrète prenant les valeurs y_i avec les probabilités p_i. L'espérance est définie comme-suit : $E(Y) = \sum_i p_i y_i$

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6. On gagne 6 u.m, si on obtient 1 ou 6 et on perd 2 u.m sinon.

$P(Y = -2) = \frac{4}{6}$ $\quad P(Y = 6) = \frac{2}{6}$ $\quad$ *alors* $E(Y) = \frac{2}{3} * (-2) + \frac{1}{3} * (6) = \frac{2}{3}$

L'**algorithme de la PDS** diffère de la version déterministe en deux points :

1) A chaque étape k on doit résoudre :

$$J_k(x_k) \coloneqq \min_{u_k} \boldsymbol{E}_{\omega_k}\left[g_k(x_k, u_k, \boldsymbol{\omega_k}) + J_{k+1}\big(f_k(x_k, u_k, \boldsymbol{\omega_k})\big)\right]$$

2) La politique de décision optimale ne fournit pas une suite de décisions optimales mais doit être mise en œuvre de manière séquentielle.

L'application de l'algorithme de la programmation dynamique stochastique sera illustrée à travers les exercices de la série de TD 2.

TD 2. Programmation Dynamique Stochastique

<u>Exercice 1</u> (Maintenance d'une machine)

Au début de chaque semaine, une machine est soit en état de marche (F) soit en panne (P). Si une machine fonctionne pendant toute une semaine, elle génère un bénéfice de 1000 um. Si elle tombe en panne pendant la semaine, aucun bénéfice n'est obtenu.

Afin de diminuer les risques de panne, une *maintenance* (M) dont le coût est de 200 um, peut être effectuée sur une installation **en état de marche**. Si cette option est choisie, la machine a une probabilité égale à 0.4 de tomber en panne pendant la semaine. En *l'absence de maintenance* (S), cette probabilité est de 0.7.

Si une machine **tombe en panne** pendant une semaine, elle reste dans cet état jusqu'au début de la semaine suivante où elle devra être *réparée* (R) ou *remplacée* (A). Le coût d'une réparation est de 450 um et la probabilité qu'une machine retombe une panne la même semaine est égale à 0.4. Le prix d'une nouvelle installation est 900 um. Une machine neuve ne tombe jamais en panne pendant sa première semaine d'utilisation.

Sachant que l'objectif est de maximiser les revenus nets de l'installation pour les N=2 semaines à venir :

1) Définir la fonction de transition et la fonction de bénéfices.
2) Trouver la politique de décision optimale en considérant $x_1 = F$.

Tout d'abord essayons de répondre à la question suivante : quel est l'évènement aléatoire susceptible d'influencer l'état de la machine ? Clairement, il s'agit de « la panne de la machine ». Alors, définissons les valeurs possibles que peut prendre notre paramètre aléatoire:

$$\omega_k = \begin{cases} 1 & \textit{Si la machine tombe en panne au début de la semaine K} \\ 0 & \textit{Sinon.} \end{cases}$$

Récapituler maintenant dans un tableau, les fonctions de transition et de bénéfice :

x_k	u_k	ω_k	$P(\omega_k = .\vert x_k, u_k)$	$f_k(x_k, u_k, \omega_k)$	$g_k(x_k, u_k, \omega_k)$
F	S	0	$1 - 0.7 = 0.3$	F	1000
		1	0.7	P	0
	M	0		F	
		1	0.4	P	

P	R	0			
		1			
	A	0	1		
		1	0	-	-

A chaque étape de l'algorithme de la PDS on doit résoudre :

$$J_k(x_k) \coloneqq \max_{u_k} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega_k}} \left[g_k(x_k, u_k, \boldsymbol{\omega_k}) + J_{k+1}\big(f_k(x_k, u_k, \boldsymbol{\omega_k})\big)\right]$$

Initialisation

$$J_3(x_3) \coloneqq 0 \;\; \forall\, x_3$$

Etape 2

On doit résoudre pour tous les états possibles l'équation

$$J_2(x_2) \coloneqq \max_{u_2} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega_2}} \left[g_2(x_2, u_2, \boldsymbol{\omega_2})\right]$$

Pour $x_2 = F$:

$$J_2(F) \coloneqq \max_{u_{2} \in \{S,M\}} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega_2}} \left[g_2(F, u_2, \boldsymbol{\omega_2})\right] = max \begin{cases} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega_2}}[g_2(F, S, \boldsymbol{\omega_2})] \\ \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega_2}}[g_2(F, M, \boldsymbol{\omega_2})] \end{cases}$$

$$= max \begin{cases} 0.3 \times g_2(F, S, \boldsymbol{0}) + 0.7 \times g_2(F, S, \boldsymbol{1}) \\ 0.6 \times g_2(F, M, \boldsymbol{0}) + 0.4 \times g_2(F, M, \boldsymbol{1}) \end{cases} = max \begin{cases} 300 \\ 400 \end{cases}$$

On procède de la même façon pour $x_2 = P$

$\mathbf{x_2}$	F	P
$\mathbf{J_2\,(x_2)}$	400	150
$\boldsymbol{\mu_2^*(x_2)}$	M	R

Etape 1 :

étant donné que la machine est initialement en état de marche, on doit résoudre l'unique équation :

$$J_1(F) \coloneqq \max_{u_1 \in \{S,M\}} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega_1}} \left[g_1(F, u_1, \boldsymbol{\omega_1}) + J_2\big(f_1(F, u_1, \boldsymbol{\omega_1})\big)\right]$$

Ce qui donne après application numérique :

$$J_1(F) = 700 \; et \; \mu_1^*(\mathrm{F}) = \mathrm{M}$$

Stratégie de décision

Dans la première semaine, effectuer une maintenance. Ensuite, si la machine tombe en panne (c'est-à-dire si $\mathrm{x}_2 = P$) alors Réparer. Sinon (c'est-à-dire si $\mathrm{x}_2 = F$), procéder à une maintenance.

Exercice 2 (Gestion de stock)

On donne le modèle suivant pour un problème de gestion de stock :

x_k: Nombre d'unités disponibles au début de la période k.

u_k : Le nombre d'unités commandées (reçues immédiatement) au début de la période k

ω_k : La demande aléatoire pendant la période k.

$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \omega_k) = \max\{x_k + u_k - \omega_k, 0\} = [x_k + u_k - \omega_k]^+$

$x_k \in S_k = \{0,1, \dots, C\}$; C : capacité maximale du stock.

Les quantités de commande envisageable pour un niveau x_k du stock est :

$U_k(x_k) = \{0,1, \dots, C - x_k\}$;

Les coûts associés à ce système comprennent

- Un coût de réapprovisionnement : $c(u_k) = K\delta(u_k) + cu_k$

  Où :

  K : coût fixe de commande ;

  $\delta(u_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_k = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

  c : coût unitaire de commande.

- Un coût de gestion :

$$\begin{aligned} r(x_k, u_k, \omega_k) &= h\max\{x_k + u_k - \omega_k, 0\} - p\min\{x_k + u_k - \omega_k, 0\} \\ &= h[x_k + u_k - \omega_k]^+ + p[x_k + u_k - \omega_k]^- \end{aligned}$$

Où :

h : coût unitaire de stockage ; p : coût unitaire de pénurie ;

En outre, on considère que : $g_{N+1}(x_{N+1}) = 0 \ \forall x_{N+1}$

Calculer la politique optimale de réapprovisionnement pour un problème sur 3 périodes et une capacité maximale du stock C=3, avec :

- Un coût de réapprovisionnement (k=1) :

$$c(u_k) = \delta(u_k) + \frac{3}{2}u_k$$

- Un coût de gestion (h=1, p= +3) :

$$r(x_k, u_k, \omega_k) = [x_k + u_k - \omega_k]^+ + 3[x_k + u_k - \omega_k]^-$$

- Une loi de probabilité de la demande :

  $P[\omega_k = 0] = \frac{1}{10}$, $P[\omega_k = 1] = \frac{1}{5}$, $P[\omega_k = 2] = \frac{3}{5}$, $P[\omega_k = 3] = \frac{1}{10}$

  Pour k=1,2,3

Le modèle du problème est suffisamment détaillé. Donnons directement l'équation à résoudre à chaque étape de l'algorithme de la PDS :

$$J_k(x_k) \coloneqq \min_{u_k \in \{0,\ldots,C-x_k\}} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega_k}} \left[c(u_k) + r(x_k, u_k, \boldsymbol{\omega_k}) + J_{k+1}(x_{k+1}) \right]$$

La résolution détaillée du problème est laissé à l'étudiant. On donne à titre indicatif la table optimale de l'étape 3 :

x_3	*0*	*1*	*2*	*3*
$J_3(x_3)$	*12.54*	*10.9*	*8.54*	*7.6*
$\mu_3^*(x_3)$	*2*	*0*	*0*	*0*

<u>Exercice 3</u> (Stratégie Optimale de Jeu)

Un joueur d'échec doit disputer une rencontre en deux parties et désire maximiser ses chances de gain. Chaque partie rapporte 1 point au vainqueur et 0 au perdant, à moins d'un match nul auquel cas les deux joueurs marquent un demi-point. Si, à l'issue, des deux matchs, le score est égale à 1-1 les deux joueurs continuent à s'affronter jusqu'à ce que l'un d'eux remporte une partie et la rencontre par la même occasion.

Connaissant bien les ouvertures pratiquées par son adversaire, le joueur a sélectionné les siennes afin de pouvoir choisir, pour chaque affrontement, entre deux styles de jeu:

1- un ***style agressif*** lui donnant une probabilité de gain $P_a > 0$ et une probabilité de perte $1 - P_a$
2- un ***style passif*** lui donnant une probabilité de nul $P_p > 0$ et une probabilité de perte $1 - P_p$

Le joueur désire déterminer une stratégie de sélection de style de jeu maximisant ses chances à gagner la rencontre.

<u>Indications:</u>

- En cas d'égalité après les deux matchs, le joueur adopte un style de jeu agressif pour tous les matchs qui en suivent.
- Le coût terminal exprime la probabilité de gain :

$$g_{N+1} = \begin{cases} 1 & \text{en cas de gain de la rencontre} \\ p_a & \text{en cas d'égalité après les deux parties} \\ 0 & \text{en cas de perte} \end{cases}$$

- De plus, nous avons que :

$$g_k(x_k, u_k, \omega_k) = 0, \forall\, k$$

- On considère :

$$P_a = 0.45 \qquad \text{et} \qquad P_p = 0.9$$

$k \in \{1,2\}$: Associé aux deux premières parties du jeu.

x_k : Score avant le début de la partie k. De ce fait :

$x_1 \in \{0-0\}$

$x_2 \in \{0-1, 0.5-0.5, 1-0\}$

L'état terminal :

$x_3 \in \{0-2, 0.5-1.5, 1-1, 1.5-0.5, 2-0\}$

$$u_k = \begin{cases} A \quad \text{si le joueur choisit un style agressif} \\ P \quad \text{si le joueur choisit un style passif} \end{cases}$$

ω_k : variable aléatoire qui représente le résultat de la partie k.

$f_k(x_k, u_k, \omega_k) = \omega_k$. Récapituler l'évolution du score dans le tableau ci-dessous :

	x_k	u_k	$x_{k+1} = \omega_k$	P(ω_k =.)
Etape k=1	0 – 0	P	0.5 – 0.5	0.9
			0 – 1	
		A	1 – 0	0.45
			0 – 1	
Etape k=2	0 – 1 0.5 – 0.5 1 – 0	…	…	…

Puisque aucun coût intermédiaire n'est défini, à chaque itération de l'algorithme de la PDS on doit résoudre :

$$J_k(x_k) = \max_{u_k \in \{A,P\}} E_{\omega_k}[J_{k+1}(f_k(x_{k,} u_k, \omega_k))]$$

L'application numérique est laissée à l'étudiant.

La stratégie de jeu optimale

En première partie, le joueur doit adopter un style agressif. Ensuite, s'il gagne la partie ($i.e\ \ x_2 = 1 - 0$), il doit jouer passivement. Sinon ($i.e\ \ x_2 = 0 - 1$ ou $x_2 = 0.5 - 0.5$), il doit jouer agressivement.

Partie 3. Introduction à la Programmation Linéaire Stochastique

1. Rappel sur la PL

Plusieurs problèmes de décisions pratiques se décrivent sous forme de **programmes linéaires**.

Un PL sous **forme standard** s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Min } F = \sum c_j x_j \\ \text{s.c } \sum a_{ij} x_j = b_j \quad i = 1, m \\ \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, n \end{cases}$$

Ou encore en notation **matricielle**:

$$\begin{cases} \text{Min } F = c^T x \\ \text{s.c } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

NB. Dans cette partie, l'étudiant peut utiliser n'importe quel logiciel pour la résolution des PLs rencontrés dans les différents exemples.

Exemple [Problème du Fermier- Partie 1]

Un fermier dispose de 500A de terre et cultive du blé, du maïs et des betteraves sucrières. Au moins 200T de blé et 240T de maïs sont nécessaires pour nourrir son bétail. Tout surplus peut être vendu, mais un complément doit être acheté en dessous de ces valeurs. Le prix d'achat est de 40% supérieur au prix de vente. Le fermier peut vendre la betterave pour 36 $/T pour les 6000 premières tonnes et 10 $/T au-delà, en raison des quotas européens. Le fermier veut décider la surface à réserver pour chaque culture. Reposant sur ses expériences passées, le fermier sait que **la moyenne du rendement** de sa terre en blé, maïs et en betteraves est, respectivement, 2.5 T/A, 3 T/A et 20 T/A. (**NB.** A : Acre ; T: Tonnes.)

Culture	**Blé**	**Maïs**	**Betterave**
Rendement (T/A)	2.5	3	20
Coût de plantation ($/A)	150	230	260
Prix de vente ($/T)	170	150	36 sous 6000T 10 sinon
Prix d'achat ($/T)	238	210	-
Minimum requis (T)	200	240	-

Modéliser le problème du fermier (déterministe) sous forme d'un PL.

$$\begin{aligned} \min\ & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 \\ & + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\ \text{s. t.}\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500,\ 2.5\,x_1 + y_1 - w_1 \geq 200, \\ & 3\,x_2 + y_2 - w_2 \geq 240,\ w_3 + w_4 \leq 20x_3, w_3 \leq 6000, \\ & x_1, x_2, x_3,\ y_1, y_2,\ w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0. \end{aligned}$$

2. Programme Linéaire Stochastique

Dans plusieurs situations pratiques, les coefficients a_{ij}, b_i , c_j ne sont pas connus avec certitude, mais on connaît seulement leurs distributions de probabilité (i.e. ils sont représentés par des variables aléatoires). Il suffit qu'un seul paramètre soit aléatoire pour qu'un PLS (Programme Linéaire Stochastique) se découle.

Une approche simple (*mais bon tout ce qui est simple est faux*) pour résoudre de tels problèmes consiste à ramener les programmes stochastiques à des programmes déterministes *(en quelque sorte négliger l'incertitude et ses conséquences).*

3. Méthode de la valeur estimée (EXPECTED VALUE Method)

Le principe de cette méthode consiste à remplacer chaque variable aléatoire par son estimation et puis résoudre le Problème résultant. On obtient ce qu'on appelle EVS (Expected Value Solution).

Considérons le PL stochastique suivant :

$$\begin{aligned}
&\text{Min } -x_2 \\
&\text{s.c} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&\qquad \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + x_4 = 2 \ldots\ldots (1) \\
&\qquad -1 \leq x_1 \leq 1 \\
&\qquad x_j \geq 0, j = 2,3,4
\end{aligned}$$

Supposons que les coefficients de x_1 et de x_2 dans (1) ne sont pas connus avec certitude, et qu'on connait leur distribution jointe :

$$(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}) = \begin{cases} \left(1, \frac{3}{4}\right) \text{avec une probabilité } 0.5 \\ \left(-3, \frac{5}{4}\right) \text{avec une probabilité } 0.5 \end{cases}$$

Dans ce cas : $E[\tilde{a}_{21}]= -1$ et $E[\tilde{a}_{22}]=1$;

En remplacent les coefficients $\tilde{a}_{21}$ et $\tilde{a}_{22}$ par leurs valeurs estimées on trouvera la solution :

$$\textbf{EVS} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,2,0,0)\ .$$

On veut examiner la faisabilité de cette solution sous incertitude ; la contrainte correspondante à (1) peut être équitablement :

$x_1 + \frac{3}{4}x_2 + x_4 = 2$ ou $-3x_1 + \frac{5}{4}x_2 + x_4 = 2.$

En effet, la solution (0,2,0,0) ne satisfait aucune des contraintes et elle est de ce fait infaisable sous incertitude.

Remarque 1

Remplacer les variables aléatoires par leurs espérances ne fournit **pas toujours** une solution faisable à l'égard des variables aléatoires.

4. Méthode d'analyse de scénarios

Le principe de cette méthode consiste à résoudre le problème pour toutes les réalisations possibles des variables aléatoires. Elle suppose que les évènements aléatoires se présentent suivant des distributions discrètes. Dans ce cas, on aura autant de solutions que de scénarios. Par la suite, les différentes solutions sont combinées par une règle heuristique. Dans l'exemple précédent :

- La solution associée à $(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}) = \left(1, \frac{3}{4}\right)$ est (-1, 3, 0, 0.75).
- La solution associée à $(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}) = \left(-3, \frac{5}{4}\right)$ est (0.1176, 1.8824, 0.0000, 0.0000).

Remarque2

Chaque solution a une chance de 50% d'échouer à satisfaire la contrainte.

Conclusion

Un modèle de prise de décision sous incertitude doit prendre en considération les conséquences des futures infaisabilités d'une manière explicite.

Dans la littérature de la programmation stochastique, deux modèles sont largement appliquées, à savoir :

- les problèmes avec **recours** (voir partie 4 du cours)
- les problèmes avec **contraintes probabilistes** (voir partie 5 du cours).

Exemple (Problème du fermier –Partie 2)

En réalité, le rendement de la terre dépend des conditions météorologiques. Pour simplifier, on suppose qu'il y a trois scénarios: mauvaise, moyenne et bonne année (notez que les différents rendements sont considérés en tant que variables aléatoires discrètes corrélées).

- Une bonne année donne un rendement 20% au-dessus de la moyenne
- Une mauvaise année donne un rendement 20% en dessous de la moyenne.

1) Appliquer l'approche **d'analyse de scénarios** (Wait-and-See).

	Blé	Mais	Betteraves
S1 (mauvaise année)	2	2.4	16
S2 (année moyenne)	2.5	3	20
S3 (bonne année)	3	3.6	24

On résout les PLs correspondants aux différents scénarios :

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	y_1	y_2
Solution 1	100	25	375	0	0	6000	0	0	180
Solution 2	**120**	**80**	**300**	100	0	6000	0	0	0
Solution 3	183.33	66.67	250	350	0	6000	0	0	0

2) Quel est le profit qu'on peut obtenir dans chaque scénario ?

On exploite la fonction objective pour calculer le coût (un coût négatif signifie gain)

S1 (mauvaise année)	59 950 $
S2 (année moyenne)	118 600 $
S3 (bonne année)	167 667 $

3) Considérons que les trois scénarios sont **équiprobables**, quelle est l'estimation du profit ? (valeur de la solution Wait-and-See : WS)

On calcul l'espérance ou dans ce cas la **moyenne** des profits :

$$\mathbf{WS} = 115405{,}6667 \approx 115406\$$$

4) Déterminer l'**EVS**.

L'EVS dans ce problème coïncide avec la solution obtenue pour le deuxième scénario.

5. Décisions de première étape Vs Décisions de seconde étape

On appelle décisions de première étape : les décisions qui **doivent** être prises avant que l'incertitude soit levée. Les décisions de seconde étape (ou de recours) : décisions qui **peuvent** être prises en réagissant à la situation qui se présente après que les variables aléatoires réalisent leurs valeurs.

Dans l'exemple du fermier:

- Les variables aléatoires : le rendement de la terre en blé, maïs et betteraves.
- Les décisions de première étape sont : x_1, x_2, x_3
- Les décisions de seconde étape sont : $y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4$

6. Forme extensive d'un programme stochastique (Equivalent Déterministe : ED).

Dans ce problème, on cherche à optimiser plutôt l'espérance du profit (*la fonction objective sera modifiée : elle va contenir une espérance*). On résolvant ce problème on obtient ce qu'on appelle **solution stochastique**. L'appellation « Forme extensive» vient du fait que ce problème d'optimisation décrit **explicitement** les variables de décision de seconde étape pour tous les scénarios possibles.

Exemple

Donner la **forme extensive** du problème du Fermier

$$\begin{aligned}
\min\ & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\
& - \tfrac{1}{3}(170w_{11} - 238y_{11} + 150w_{21} - 210y_{21} + 36w_{31} + 10w_{41}) \\
& - \tfrac{1}{3}(170w_{12} - 238y_{12} + 150w_{22} - 210y_{22} + 36w_{32} + 10w_{42}) \\
& - \tfrac{1}{3}(170w_{13} - 238y_{13} + 150w_{23} - 210y_{23} + 36w_{33} + 10w_{43}) \\
\text{s.t. } & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500\ ,\ 3x_1 + y_{11} - w_{11} \geq 200\ , \\
& 3.6x_2 + y_{21} - w_{21} \geq 240\ ,\ w_{31} + w_{41} \leq 24x_3\ ,\ w_{31} \leq 6000\ , \\
& 2.5x_1 + y_{12} - w_{12} \geq 200\ ,\ 3x_2 + y_{22} - w_{22} \geq 240\ , \\
& w_{32} + w_{42} \leq 20x_3\ ,\ w_{32} \leq 6000\ ,\ 2x_1 + y_{13} - w_{13} \geq 200, \\
& 2.4x_2 + y_{23} - w_{23} \geq 240,\ w_{33} + w_{43} \leq 16x_3\ , \\
& w_{33} \leq 6000,\ x, y, w \geq 0\ .
\end{aligned}$$

1) Déterminer la **solution stochastique** ainsi que le profit associé **RP** (**Recourse Solution value**).

   Décisions optimales de première étape : $x_1 = 170, x_2 = 80, x_3 = 250$

   Décisions optimales de la deuxième étape :

	w_1	w_2	w_3	w_4	y_1	y_2
S1	310	48	6000	0	0	0
S2	225	0	5000	0	0	0
S3	140	0	4000	0	0	48

   Alors : le $\boldsymbol{RP} = 108\ 390$ \$

2) Determiner le **EEV** (Expected Result of using the EVS).

   On doit fixer : $x_1 = 120, x_2 = 80, x_3 = 300$ dans le problème déterministe équivalent précédent puis le résoudre à nouveau.

   Le profit associé à la solution obtenu est :

$$\boldsymbol{EEV} = 107\ 240\ \$$$

7. EVPI (Expected value of Perfect Information)

Mesure le profit obtenu si on connait le futur avec certitude.

$$EVPI \;=\; WS - RP$$

Pratiquement, cela peut être interprété par le montant maximal que le décideur serait prêt à payer pour avoir une information précise sur le future. (Dans notre exemple : prix que le fermier serait prêt à payer pour une prévision météorologique).

Dans l'exemple du fermier :

$$EVPI \;=\; 115406 - \; 108390 \;=\; 7016$$

8. VSS (Value of Stochastic Solution)

Évalue le profit obtenu en prenant en considération l'incertitude (autrement : le coût d'ignorer l'incertitude).

$$VSS \;=\; RP - EEV$$

Dans l'exemple du fermier :

$$VSS \;=\; 108390 - 107240 = 1150\$$$

4. Problèmes avec Recours

1. Introduction

Un Programme Linéaire Stochastique (PLS) avec recours est un modèle de décision dynamique avec T étapes tel que $T \geq 2$. Dans ce qui suit, nous considérerons le cas de deux étapes seulement (T=2).

En effet, le modèle de programmation stochastique le plus largement appliqué est celui des programmes linéaires avec recours en deux étapes. Dans ce dernier, on prend des décisions dans la première étape, après quoi un événement aléatoire se produit affectant le résultat de ces décisions. Une décision de recours peut alors être prise au cours de la deuxième étape pour compenser les effets négatifs qui pourraient avoir lieu à la suite des décisions de la première étape.

2. Formulation d'un PLS en deux étapes avec recours

Dans un problème avec recours à deux étapes, les décisions de la première étape sont prises en tenant compte de leurs conséquences futures. Ces dernières sont mesurées par ce qu'on appelle **fonction de recours**. On dénote les variables aléatoires (discrètes ou continues) par un vecteur ξ.

Notre problème de référence prend le format suivant:

$$\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{min\, c^T\, x + \psi(x)} \\ \textbf{s.c } \boldsymbol{Ax = b\, ,x \geq 0} \\ \textbf{avec } \boldsymbol{\psi(x) = E_{\xi}[Q(x,\xi)]} \\ \textbf{et } \boldsymbol{Q(x,\xi) = \min\{q(\xi)^T y \mid W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x,\ y \geq 0\ \}} \end{array}\right.$$

Problème de seconde étape

Notations

x : décisions de la première étape

y : décisions de la deuxième étape (actions de recours ou actions correctives)

$Q(x,\xi)$: fonction de recours.

$\psi(x)$: **Espérance** de la fonction de recours.

A, b, c : Matrice et vecteurs déterministes.

$q(\xi)$: Vecteur stochastique des coûts unitaires de pénalités

$\mathrm{W}(\xi)$: Matrice de recours stochastique

$h(\xi) - T(\xi)x$: mesure le manque (ou la violation des contraintes)

Exemple [Planification de production]

Un usine peut traiter deux matières premières $mat1$ et $mat2$ afin de produire deux produits $prod1$ et $prod2$. Les coûts de production sont $c^T = (2,3)^T$. La capacité de prodution ne peut dépasser 100. La demande sur les produits est aléatoire ainsi que les productivités des matières premières. Afin de satisfaire ses clients, les quantités manquantes peuvent être achetées directement du marché avec les coûts unitaires suivants : $q^T = (7,12)^T$.

On cherche à trouver le plan de production optimale.

1) Formulons ce problème en tant que **PLS avec recours**

   x_1, x_2 : quantités traités en $mat1$ et $mat2$

   y_1, y_2 : quantités achetés des $prod1$ et $prod2$ en cas de manque

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\min\{2x_1 + 3x_2 + E_\xi[7\boldsymbol{y_1} + \mathbf{12}\boldsymbol{y_2}]\} & \\
\boldsymbol{Sc} & \\
x_1 + x_2 \leq 100 & \textit{// ne pas dépasser la capacité de l'usine} \\
\alpha(\xi)x_1 + \boldsymbol{\beta}(\xi)x_2 + \boldsymbol{y_1} \geq h_1(\xi) & \textit{// premier produit} \\
\gamma(\xi)x_1 + \boldsymbol{\delta}(\xi)x_2 + \boldsymbol{y_2} \geq h_2(\xi) & \textit{// deuxième produit} \\
x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 \;\; \boldsymbol{y_1} \geq 0 \;\; \boldsymbol{y_2} \geq 0 &
\end{array}
\right.
$$

2) Dégageons le **problème de seconde étape**

$$Q(x,\xi) = \min\{q(\xi)^T y \mid W(\xi)y = h(\xi) - T(\xi)x, \quad y \geq 0\}$$

$$
\left|
\begin{array}{l}
Q(x,\xi) = min(7y_1 + 12y_2) \\
Sc \\
y_1 \geq h_1(\xi) - \alpha(\xi)x_1 - \beta(\xi)x_2 \\
y_2 \geq h_2(\xi) - \gamma(\xi)x_1 - \delta(\xi)x_2
\end{array}
\right.
$$

3) Déterminons la **matrice de recours**

   Il faut d'abord passer par la forme standard en soustrayant les variables d'écart. Enfin, la matrice de recours est la suivante :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Types de Recours

Recours Fixe Lorsque W et q sont déterministes (i.e. ne dépendent pas de ξ), les pénalités seront indépendantes de la réalisation des incertitudes. Dans ce cas, on parle de **recours fixe**. Le problème de production précédent est un exemple.

Dans ce qui suit on s'intéresse au recours fixe seulement.

Remarque

La fonction de recours est mal définie, si pour certaines valeurs de x il existe une réalisation de ξ pour laquelle le problème de seconde étape n'est pas réalisable. Pour cela, nous nous intéressons à définir un recours complet.

Recours complet

Si $\forall\, \xi$ et $\forall\, x$, le problème de seconde étape est réalisable, alors le recours est complet. Plus formellement, le recours est complet si la matrice de recours W de dimension $m \times n$ satisfait :

$$\{t|t = Wy\,,\ y \geq 0\} = \mathbb{R}^m \text{ Autrement } \quad \exists\, y \in \mathbb{R}^n\ tq\ t = Wy\ \forall\, t \in \mathbb{R}^m$$

Recours simple

Le recours simple est un cas particulier du recours **complet** où $W = (I \ \ -I)$ (*I : la matrice identité d'ordre m*).

Dans l'exemple du problème de planification de production, le recours est simple vu le format de la matrice de recours et il est, de ce fait, complet.

Montrons qu'il est complet :

On a :

$\{t|t = Wy\,,\ y \geq 0\} = \mathbb{R}^2$, puisque $\exists\, y \in \mathbb{R}^4$ pour tout $t \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} t_1 = y_1 - y_3 \\ t_2 = y_2 - y_4 \end{cases}$$

Recours relativement complet

Notons par $K_1 = \{x|Ax = b\}$ l'ensemble de faisabilité de première étape. Si $\forall\, \xi$ et $\forall$ $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K_1}$, le problème de seconde étape est réalisable alors le recours est dit relativement complet.

Remarques

- Il est clair que le recours complet **implique** le recours relativement complet.
- Pratiquement, il nous **suffit** de savoir que le recours soit relativement complet.
- Le recours complet est plus facile à identifier que le recours relativement complet.

4. Contraintes induites

Si le recours n'est pas relativement complet, alors le problème de seconde étape est non réalisable ou faisable. Pour faire face à ce problème, il faut ajouter des contraintes dites induites (*induced constraints*) en première étape.

On dénote K_2 l'ensemble des contraintes induites :

$$K_2 = \{x |\ T(\xi)x + Wy = h(\xi), y \geq 0\}$$

Maintenant, on exige que les x appartiennent à $K_1 \cap K_2$. Rappelons que K_1 est l'ensemble des solutions admissibles de la première étape.

NB. Cela s'applique même pour le cas de variables aléatoires continues.

Exemple

Considérons

$K_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_1 - 2x_2 \geq -4;\ x_1 + 2x_2 \leq 8, 2x_1 - x_2 \leq 6\}$

Le support de ξ est Ξ=[4,19]×[6,21].

Les contraintes de deuxième étape sont les suivantes :

$$\begin{cases} \xi_1 - 2x_1 - 3x_2 = y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\ \xi_2 - 3x_1 - x_2 = 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Notons que :

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 0 \text{ et } 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 0$$

Alors on peut établir de nouvelles contraintes (portant sur les x seulement):

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq \xi_1 \\ 3x_1 + x_2 \leq \xi_2 \end{cases}$$

Ces inéquations doivent d'être satisfaites pour toute réalisation possible de ξ .

Pour définir les contraintes induites, on doit choisir les valeurs minimales pour $\xi_1 et\ \xi_2$ ce qui donne :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$$

De ce fait,

$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 | 2x_1 + 3x_2 \leq 4;\ 3x_1 + x_2 \leq 6\}$$

Donner $K_1 \cap K_2$?

Remarques

Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ alors on doit réviser notre modèle pour s'assurer qu'il est bien conçu ou encore pour voir s'il y a d'autres possibilités de compensation qui ne sont pas encore incluses dans le modèle.

TD N°3. Programmation Stochastique et Problèmes avec Recours

Exercice 1

La demande d'une ville en eau est 10 unités. La ville reçoit de l'eau à partir d'une rivière. Cette source fournit une quantité d'eau b. En cas de manque, les autorités peuvent acheter de l'eau d'une autre ville voisine avec c$ l'unité.

1. S'agit-il d'un **problème avec recours** ? Justifier votre réponse.
2. Considérons que la variable aléatoire dans ce problème possède 5 réalisations possibles équiprobables qui sont : 0,3,6,9,12.
   - Appliquer l'approche de la **valeur estimée**.
   - Appliquer l'approche d'**analyse de scénarios**.
3. Considérer maintenant que la variable aléatoire suit la **loi uniforme** sur l'intervalle [2,8]. Appliquer l'approche de la valeur estimée.

Indications

1- Essayer de déterminer « les décisions de première étape » si elles existent ?

2- Formuler le problème linéaire (stochastique) d'abord.

3- On rappelle que $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ tel que $f(x)$ est la fonction de densité. A savoir, pour la loi uniforme définie sur l'intervalle [a,b] : $f(x) = \frac{1}{b-a}$

Exercice 2 [Exercice extrait du sujet d'examen 2019]

Une entreprise produit des bureaux, des tables et des chaises. On donne dans le tableau ci-dessous, le *nombre des unités* de bois requises pour chaque type de produit. Le nombre des heures de finition et de menuiserie nécessaires sont également fournis. A savoir, une unité de bois coûte 2$, une heure de finition coûte 4$ tandis qu'une heure de menuiserie coûte 5$. La vente d'un bureau rapporte 60$, alors que celle d'une table rapporte 40$. Le prix de vente d'une chaise est de 10$. D'habitude la demande en termes de bureaux, tables et chaises est de : 170, 120, 250 unités respectivement.

	Bois	Finition	Menuiserie
Bureau	8	4	2
Table	6	2	1.5
Chaise	1	1.5	0.5

1) L'entreprise cherche à minimiser ses pertes tout en satisfaisant la demande. Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire.

En réalité, la demande $\tilde{d}$ est aléatoire, on distingue quatre scénarios possibles :

	Bureau	Table	Chaise	Probabilité
Scénario 1	50	20	200	0.2
Scénario 2	150	110	225	0.4
Scénario 3	250	250	500	0.3
Scénario 4	200	200	200	0.1

2) Quels sont le (ou les) problème(s) à résoudre, si on applique : l'approche de la valeur estimée, l'approche d'analyse de scénarios.

Dans ce problème, supposons que les quantités des ressources à allouer doivent être déterminées avant de connaitre la demande. Une fois la demande est connue, on décide la quantité à fabriquer de chaque produit.

3) Formuler le problème avec recours correspondant. Pour ce faire, donner le problème de première étape et celui de seconde étape (séparément).
4) A partir du problème de seconde étape, donner la matrice de recours.
5) En considérons les scénarios de demande déjà mentionnés, donner la forme extensive du programme stochastique.

Indications

Toutes les questions de cet exercice sont directes. Pour y répondre, essayer de revenir sur les différents exemples déjà vus dans le cours.

<u>Exercice 3</u>

Chaque matin, un vendeur de journaux doit décider combien de journaux à acheter afin de maximiser son profit. Il ne sait pas au début de la journée combien de journaux il pourra vendre. Chaque journal lui coûte **c** et peut être vendu à un prix **q**. La quantité achetée **x** est toujours inférieur à **u**. À la fin de la journée, le vendeur peut retourner chaque journal invendu à un prix **r** . La demande quotidienne en journaux est décrite par une variable aléatoire **ω** .

1. Modéliser le problème sous forme d'un **programme stochastique avec recours.**
2. Considérons que c = 10, q = 25, u=600 et r = 5, et une demande pouvant prendre les valeurs 50, 75, 100, 125 ou 150, de manière équiprobable. Donner la **forme extensive du programme stochastique** avec recours.

1- Programme stochastique avec recours

$Min\{\, cx + \psi(x)\}$

sc. $0 \leq x \leq u$

tq $\psi(x) = E_{\omega}[Q(x,\omega)]$

et $Q(x,\omega) = \min\{-qy_1 - ry_2\}$

sc. $y_1 \leq \omega$

$y_1 + y_2 \leq x$

$y_1, y_2 \geq 0$

2- Forme extensive du programme stochastique

$$Min\left\{ 10x - \frac{1}{5} * (25y_{11} + 25y_{12} + \cdots + 25y_{15} + 5y_{21} + 5y_{22} + \cdots + 5y_{25})\right\}$$

$0 \leq x \leq 600$

$y_{11} \leq 50 \; \ldots . y_{51} \leq 150$

$y_{11} + y_{21} \leq x \ldots\; y_{15} + y_{25} \leq x$

$y_{11}, \ldots, y_{15} \geq 0$

$y_{21}, \ldots, y_{25} \geq 0$

<u>Exercice 4</u>

Considérons le problème d'affectation annuelle du personnel infirmier de telle manière que l'hôpital soit capable de satisfaire la demande stochastique en soins infirmier où:

- L'hôpital dispose de trois classes d'infirmiers/soins.
- En plus de leurs heures régulières, les infirmiers peuvent travailler des heures supplémentaires pour satisfaire la demande des patients.
- En cas d'insuffisance en personnel, l'hôpital peut faire recours à une agence privée.

1) Classifier les décisions suivantes en décisions structurantes ou correctives:

- $\boldsymbol{v_{i,m}}$: Le nombre des heures de travail supplémentaires de soins i, le mois m.
- $\boldsymbol{w_{i,m}}$: Le nombre des heures de travail régulières de soins i, le mois m.
- $\boldsymbol{z_{i,m}}$: Le nombre des heures de soins i assurées par une agence privée , le mois m.

$\boldsymbol{v_{i,m}}$ **et** $\boldsymbol{z_{i,m}}$: sont des décisions correctives.

$\boldsymbol{w_{i,m}}$ **:** sont des décisions structurantes.

2) Représenter ce problème à l'aide d'un ***modèle avec recours où l'objectif est la minimisation des coûts totaux annuels*** en tenant compte des notations suivantes:

a_i :	Coût d'une heure régulière de soins i.
d_m:	Demande aléatoire le mois m.
b_i:	Coût d'une heure supplémentaire de soins i.
c_i:	Coût d'une heure de soins i assurée par l'agence privée.
e_m:	fraction des heures régulières productives, le mois t, constante pour toutes les classes de soins (la disponibilité des infirmiers change d'un mois à l'autre à cause des congés par exemple).
g:	Les heures supplémentaires pour n'importe quel mois et n'importe quelle classe de soins sont bornés par **g** fois les heures régulières de ce mois, pour cette classe.

Problème de première étape

$$Min \left\{\sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{12} a_i\, w_{i,m} + E_\xi[Q(w,\xi)]\right\}$$

$$w_{i,m} \geq 0 \;\forall\, i = \overline{1,3} \quad \forall\, m = \overline{1,12}$$

Problème de seconde étape

$$Q(w,\xi) = Min\, \{\sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{12} (b_i\, v_{i,m} + c_i z_{i,m})\}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (\, e_m w_{i,m} + v_{i,m} + z_{i,m}) \;\geq \breve{d}_m \;\; \forall\, m = \overline{1,12}$$

$$v_{i,m} \leq g e_m w_{i,m}\; \overline{1,3} \quad \forall\, m = \overline{1,12}$$

Suite de la Partie 4 du cours :

Algorithme L-Shaped pour la résolution de l'ED d'un PLS-RF

1. Introduction

Considérons que le vecteur aléatoire ξ possède un support fini. Soit $k = 1, \ldots, K$ qui indexe ses réalisations possibles et soit p_k leurs probabilités. Sous cette hypothèse, on peut écrire le modèle DE (Modèle déterministe équivalent ou forme extensive) du programme. Cette forme est créée en associant un ensemble de décisions de deuxième étape y_k à chaque réalisation ξ c'est-à-dire à chaque réalisation de q_k, h_k, et T_k ce qui donne :

$$\begin{cases} \min c^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k q_k^T y_k \\ s.c\ Ax = b \\ T_k x + W y_k = h_k & k = 1, \ldots, K \\ x \geq 0, y_k \geq 0 & k = 1, \ldots, K \end{cases}$$

2. Algorithme L-Shaped

2.1. Principe général

Dans l'algorithme L-Shaped deux classes de problèmes sont créées : le problème maître et les problèmes-esclaves.

- Les problèmes esclaves (un pour chaque scénario) reçoivent comme entrée les valeurs des variables du premier niveau et calculent **les variables de recours** propres à chaque scénario ainsi que le **coût associé**.
- Le problème maître comporte les variables du premier niveau et une description approximée de la fonction de recours $\boldsymbol{\theta}$; il est mis initialement sous la forme :

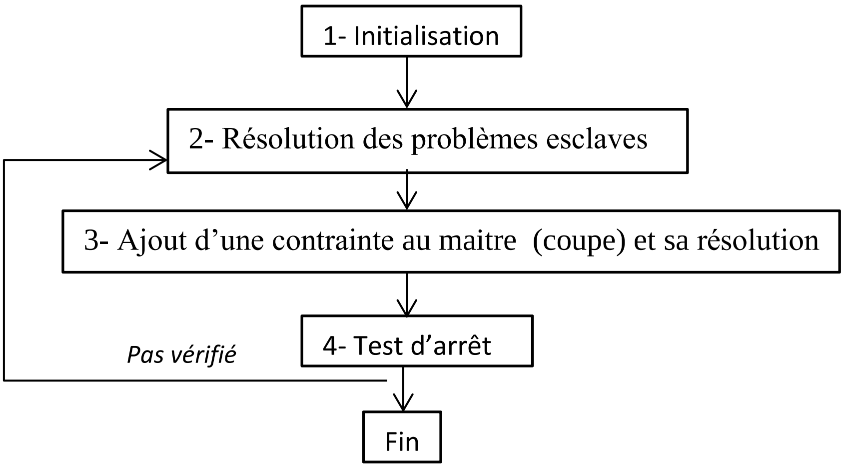
$$\begin{aligned} & min\ c^T x + \theta \\ & sc. Ax = b \\ & \theta \geq \psi(x) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Le but est de construire la fonction de recours à partir des solutions proposées au fur et à mesure par le problème maître et en ajoutant des coupes déduites de la résolution des problèmes esclaves.

Plus précisément:

- La résolution des problèmes esclaves nous permet de définir une ***borne supérieure*** de la fonction objectif.
- La résolution du maître nous permet de définir ***une borne inférieure*** de la fonction objectif.

Quand les ***deux bornes*** sont suffisamment ***proches*** on s'arrête et on retient la solution optimale x* correspondante.



2.2 Description de l'algorithme L-shaped

<u>Etape1:</u> [*Initialisation : Trouver une solution initiale* **]**

$i = 0, \quad LB = -\infty, \quad UB = +\infty \quad , \epsilon > 0$

Trouver x^0 en résolvant

$$\min c^T x$$
$$sc. Ax = b$$
$$x \geq 0$$

<u>Etape 2:</u> [*Résolution des problèmes esclaves et trouver les coûts associés* $\mathrm{f}_\mathrm{k}^\mathrm{i}$ **]**

Pour k=1,…,K

Résoudre le programme :

$$\mathrm{f}_\mathrm{k}^\mathrm{i} = \min q_k^T y$$
$$sc. W_k y = h_k - T_k x^i$$
$$y \geq 0$$

Si ce programme est infaisable pour un scénario k alors générer une contrainte (coupe) de faisabilité comme suit :

1. Trouver μ_k^i solution du :

$$\max \mu^T (h_k - T_k x^i)$$
$$sc. \mu^T W \leq 0$$
$$\|\mu\| \leq 1$$

2. Calculer :

$\alpha_i = (\mu_k^i)^T . h_k$

$\beta_i = (\mu_k^i)^T . T_k$

3. Aller à l'étape 3

Sinon (si faisable pour tous les scénarios) générer une contrainte (coupe) d'optimalité comme suit :

1. Trouver π_k^i solution du programme (le dual) suivant :

$\max \pi^T (h_k - T_k x^i)$

$\pi^T W_k \leq q_k^T$

2. calculer

$\alpha_i = \sum_{k=1}^{K} (\pi_k^i)^T . h_k . p_k$……….(1)

$\beta_i = \sum_{i=1}^{K} (\pi_k^i)^T . T_k . p_k$…………(2)

3. Calculer la borne supérieure de la valeur objective

$V^i = c^T x^i + \sum_{k=1}^{K} p_k f_k^i$

UB= min$\{V^i, UB\}$

Si UB mise à jour alors

$x^* \leftarrow x^i$

<u>Etape 3:</u> [*Ajouter une coupe au problème maitre puis le faire résoudre*]

1. Si un sous problème infaisable

Ajouter ${\beta_i}^T x \geq \alpha_i$ (Coupe / contrainte de faisabilité)

Sinon

Ajouter ${\beta_i}^T x + \theta \geq \alpha_i$ (coupe /contrainte d'optimalité)

2. Résoudre le problème maitre pour trouver une solution (x^{i+1}, θ^{i+1}) et la valeur objective optimale V^{i+1} :

$V^{i+1} = min\, c^T x + \theta$

$sc. Ax = b$

${\beta_t}^T x + \theta \geq \alpha_t, t \in I_i$

${\beta_t}^T x \geq \alpha_t, t \notin I_i$

$x \geq 0$

I_i est l'ensemble des indices d'itération où les contraintes d'optimalité ont été générées.

3. LB= max$\{V^{i+1}$, LB$\}$

<u>Etape 4:</u> [*Test d'arrêt***]**

Si UB-LB$\leq \epsilon$ alors

Stop et retenir x^* correspondant à UB

Sinon

i$\leftarrow i+1$

Retour à l'étape 1.

Remarques

- L'étape 1 de l'algorithme L-Shaped peut être simplifiée si :
  - On connait que le recours est complet ou au moins relativement complet.
  - On peut définir des contraintes induites.
- Si on considère le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$sur $\mathbf{K}^n$,
  - La **norme euclidienne** est donnée par

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

  - La **norme 1** est donnée par

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Pratiquement, on choisit la norme 1 pour rester dans le cas linéaire (puisque la norme euclidienne engendre des contraintes quadratiques).

3. L'algorithme L-Shaped Multi-Coupes

L'inconvénient de L-Shaped est la perte d'information à cause de l'agrégation des coupes dans l'étape 3 (voir équation (1) et (2)). Alors, afin d'améliorer l'efficacité de l'algorithme L-Shaped, la version Multi-Coupes a été proposée dans le but de minimiser le nombre d'itérations.

Le principe est le suivant :

Au lieu d'ajouter une seule coupe au problème maitre à chaque itération, la méthode Multi-Coupes ajoute toutes les coupes obtenues à chaque itération. Cela permet d'utiliser toute l'information obtenue à partir des problèmes esclaves ce qui permet de mieux approximer la fonction objective.

Le problème à résoudre aura la forme suivante :

$$\min c^T x + \sum_{k=1}^{K} \theta_k$$

$$sc. Ax = b$$

$$\beta_{tk}{}^T x + \theta_k \geq \alpha_{tk}, t \in I_i, k = 1, \dots, K$$

$$\beta_t{}^T x \geq \alpha_t, t \notin I_i$$

$$x \geq 0$$

Inconvénient

Taille importante du problème maitre (une variable est introduite pour chaque sous problème/scénarios).

Remarque

Afin de trouver un compromis entre les avantages et les inconvénients des deux méthodes précédentes, une agrégation partielle des coupes est envisageable.

5. Introduction aux Modèles avec contraintes probabilistes[1]

1. Rappel sur les variables aléatoires continues et les lois de probabilité

Une variable aléatoire est dite **continue** si elle peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une **mesure** sont de type continu.

Le poids d'un individu, le taux de glucose dans le sang sont des exemples de variables aléatoires continues.

➢ Quelques Lois Continues usuelles et leur fonction de densité

Loi	Densité
Uniforme Support $[a, b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$
Normale X$\sim N(\mu, \sigma^2)$ Support infini $]-\infty, +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$
Exponentiel De paramètre $\lambda = \frac{1}{E(X)}$ Support semi-infini $[0, +\infty[$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

➢ Soit X une Variable Aléatoire (V.A) continue, on définit :

Fonction de répartition

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\ F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Espérance

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{xf(x)dx}$$

NB. Une V.A X est dite centrée si E(X)=0

Variance

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2$$

NB. Une V.A X est dite réduite si V(X)=1

Ecart type

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(x)}}$$

[1] Chance Constrained Programming.

- Transformations sur les V.A
  - ✓ La V.A : $Y = X - E(X)$ est une V.A centrée.
  - ✓ La V.A : $Y = \frac{X}{\sqrt{V(X)}}$ est une V.A réduite.
- Loi Normale centrée réduite

  Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est une V.A. centrée et réduite qui suit $N(0,1)$
- Stabilité de la loi normale par la somme

  Soit deux V.A indépendantes $X \sim N(\mu_1, {\sigma^2}_1)$ et $Y \sim N(\mu_2, {\sigma^2}_2)$

  Alors $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, {\sigma^2}_1 + {\sigma^2}_2)$

2. Rappel sur la Convexité et la Concavité des fonctions

- *Définition 1.*

  Une fonction $f(x)$ est une fonction ***convexe*** si, et seulement si, pour tout point x_1, x_2 de son domaine et pour tout $0 < \lambda < 1$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

- *Définition 2.*

  Une fonction $f(x)$ est une fonction ***concave*** si, et seulement si, pour tout point x_1, x_2 de son domaine et pour tout $0 < \lambda < 1$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

  Autrement, une fonction $f(x)$ est concave si $-f(x)$ est convexe.

- *Définition 3.*

  Une fonction, $f(x)$, est dite ***log-concave*** si son logarithme, $\log(f(x))$, est concave.

- *Proposition.*

  Soit P une mesure de probabilité continue avec une densité f alors : P est log-concave ssi f est log-concave.

  Par exemple les lois uniforme et normale sont des distributions log-concaves.

3. Modèles avec Contraintes Probabilistes

Le but de la programmation sous contraintes probabilistes est de trouver la meilleure solution réalisable avec une probabilité cible p. Cette probabilité étant définie par l'utilisateur.

Deux modèles des contraintes probabilistes existent[2]:

- **Contraintes probabilistes jointes :** ici α est la probabilité que toutes les contraintes soient satisfaites simultanément.

$$P\{T(\xi)x \geq h(\xi)\} \geq \alpha \text{ où } \alpha \in]0,1]$$

- **Contraintes probabilistes séparées :** considérer l'incertitude sur chaque contrainte séparément ; on impose que la solution satisfasse chaque contrainte i avec la probabilité α_i :

$$P\{T_i(\xi)x \geq h_i(\xi)\} \geq \alpha_i, i = 1 \ldots m$$

Où $T_i(.)$ et $h_i(.)$ représentent la ieme ligne et composante de T(.) et h(.) respectivement et $\alpha_i \in]0,1]$.

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux ensembles de décisions faisables de la forme :

$$K(\alpha) = \{x | P(T(\xi)x \geq h(\xi)) \geq \alpha\}$$

En outre, on considère des variables aléatoires continues.

4. Equivalents déterministes

Les méthodes de résolutions traditionnelles nécessitent la conversion des contraintes probabilistes à leurs équivalents déterministes . Cette tâche est souvent compliquée et n'est réussite que pour certains cas particuliers.

<u>Cas 1</u> (Contraintes séparées)

Si $T_i(\xi) \equiv T_i$ (déterministe)

soit F_i la fonction de répartition de h_i , on a[3] :

$$P(T_i x \geq h_i(\xi)\}) = F_i(T_i x) \ \geq \alpha_i \ alors \ K_i(\alpha_i) = \{x | \ F_i(T_i x) \ \geq \alpha_i\}$$

<u>Exemple</u>

Trouver l'équivalent déterministe de la contrainte probabiliste suivante :

---

[2] Le choix entre les deux modèles est imposé par le problème lui-même.
[3] Ce qui correspond à des contraintes linéaires déterministes .

$$P\{Ax > h(\omega)\} \geq \alpha$$

Tel que :

A est un vecteur déterministe.

h est un nombre aléatoire dont la fonction de répartition est la suivante :

$$F(h) = 1 - e^{-h/\lambda} \text{ et } \lambda > 0$$

$$\begin{aligned} K_1(\alpha) &= \{x | P\{Ax > h(\omega)\} \geq \alpha\} \\ &= \{x | F(Ax) \geq \alpha\} \\ &= \{x | 1 - e^{-Ax/\lambda} \geq \alpha\} \\ &= \{x | e^{-Ax/\lambda} \leq 1 - \alpha\} \\ &= \{x | \ln(e^{-Ax/\lambda}) \leq \ln(1-\alpha)\} \\ &= \{x | -Ax/\lambda \leq \ln(1-\alpha)\} \\ &= \{x | Ax \geq -\lambda \ln(1-\alpha)\} \end{aligned}$$

<u>Cas 2</u>(Contraintes Jointes)

A déterministe et les composantes $h_i, i = 1, \dots, m$ de h sont des **variables aléatoires indépendantes** avec **des mesure de probabilité P_i log-concave** et des fonctions de répartition F_i alors l'équivalent déterministe est :

$$K(\alpha) = \{x | \sum_{i=1}^{m} ln\,(F_i(T_i x)) \geq ln\alpha\}$$

<u>Cas 3</u> (Contraintes séparées)

h déterministe et A est un vecteur[4] dont les coefficients sont normalement distribués alors l'équivalent déterministe est :

$$K(\alpha) = \{x | \sum_i \mu_i x_i - \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum_i \sigma_i{}^2 x_i{}^2} \geq h\}$$

Notons que Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard $N(0,1)$

[4] Une seule contrainte…on procède de la même façon pour les autres lignes de A (si plusieurs contraintes…)

Démonstration

$$\sum_i a_i\, x_i \sim N\left(\sum_i \mu_i\, x_i, \sum_i {\sigma_i}^2\, {x_i}^2\right)$$

Alors

$$\frac{\sum_i a_i\, x_i - \sum_i \mu_i\, x_i}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2} \sim N(0,1)$$

De même pour l'opposé :

$$\frac{\sum_i \mu_i\, x_i - \sum_i a_i\, x_i}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\sum_i a_i\, x_i \geq h\right) \geq \alpha \;\leftrightarrow\; P\left(\frac{\sum_i a_i\, x_i - \sum_i \mu_i\, x_i}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2} \geq \frac{h - \sum_i \mu_i\, x_i}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2}\right) \geq \alpha$$

$$\leftrightarrow\; P\left(\frac{\sum_i \mu_i\, x_i - \sum_i a_i\, x_i}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2} \leq \frac{\sum_i \mu_i\, x_i - h}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2}\right) \geq \alpha$$

$$\leftrightarrow\; P\left(\frac{\sum_i \mu_i\, x_i - h}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2} \geq \frac{\sum_i \mu_i\, x_i - \sum_i a_i\, x_i}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2}\right) \geq \alpha$$

$$\leftrightarrow \Phi\left(\frac{\sum_i \mu_i\, x_i - h}{\sqrt{\sum_i {\sigma_i}^2}\, {x_i}^2}\right) \geq \alpha$$

TD N°4 .Modèles avec contraintes probabilistes

Exercice 1

Vérifier la convexité de $K(\alpha)$ dans le deuxième cas vu dans le cours.

Exercice 2

Trouver la forme déterministe équivalente de la contrainte probabiliste suivante :

$$P(\xi x + \omega y \geq 5) \geq 0.9$$

ξ, ω sont des variables aléatoires indépendantes tel que :

$\xi \sim N(\bar{\xi}, \sigma_\xi)$ et $\omega \sim N(\bar{\omega}, \sigma_\omega)$

Exercice 3

Soient les problèmes avec contraintes probabilistes suivants. Supposer :

$$\omega_1 \sim N(1,10)\ \omega_2 \sim N(2,9)\ \omega_3 \sim N(3,10)\ \omega_4 \sim N(4,8)$$

Problème 1

$$\mathbf{Min}\ (x_1 + 3x_2 + x_3)$$

$$\mathbf{P}\left\{\begin{matrix} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \geq 4 \\ \omega_3 x_1 + \omega_4 x_3 \geq 4 \end{matrix}\right\} \geq \mathbf{0.99}$$

$$x \geq 0$$

Problème 2

$$\mathbf{Min}\ (x_1 + 3x_2 + x_3)$$

$$\mathbf{P}\{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \geq 4\} \geq \mathbf{0.98}$$

$$\mathbf{P}\{\omega_3 x_1 + \omega_4 x_3 \geq 4\} \geq \mathbf{0.99}$$

$$x \geq 0$$

Problème 3

$$\mathbf{Min}\ (x_1 + 3x_2 + x_3)$$

$$\mathbf{P}\{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \geq 4 + \omega_1\} \geq \mathbf{0.98}$$

$$\mathbf{P}\{\omega_3 x_1 + \omega_4 x_3 \geq 4\} \geq \mathbf{0.99}$$

$$x \geq 0$$

Parmi ces problèmes, il y a un seul qui répond aux conditions nécessaires pour le calcul de l'équivalent déterministe en utilisant un des cas vus au cours. Lequel ? Justifier votre réponse. Donner (α) .

Exercice 4

Considérons un problème de localisation à couverture qui consiste à implanter des services avec un coût total d'investissement minimal. Chaque nœud de demande doit être couvert par au moins un service. En outre, chaque client doit être à une distance inférieure ou égale à un certain niveau critique (distance de couverture).

Soit m : nombre des clients et n : nombre de sites.

c_j : coût de localisation d'un service dans un nœud j.

1. Définir le programme linéaire correspondant.
2. Dans le cas d'un service d'ambulance, un site peut servir plusieurs régions. Lors de l'arrivée d'une demande, les ambulances peuvent être toutes occupées. Soit q la probabilité qu'aucune ambulance n'est disponible dans le site j (identique pour tous les sites). Exprimer les contraintes de couvertures probabilistes.
3. Trouver leur ED.

Corrigé

1. Définissons d'abord la fonction objectif

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Tel que

$x_j = 1$ si un service est créé au nœud de location potentielle j, $x_j = 0$ sinon.

Exprimons maintenant les contraintes de couverture :

On définit l'ensemble des sites éligibles pour un client i comme suit :

$$N_i = \{j | d_{ij} < d_i\}$$

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n$$

Le programme linéaire :

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$\sum_{j \in N_i} x_j \geq 1 \quad i = 1, \dots, m$

$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n$

2. Les contraintes de couvertures probabilistes

$P(au\ moins\ une\ ambulance\ est\ disponible\ dans\ un\ site\ \text{élligible}\ ouvert\ )\ \geq\ \alpha$

$$\alpha\ un\ certain\ niveau\ de\ confiance\ g\text{é}n\text{é}rallement\ 90\%\ ou\ 95\%$$

La probabilité qu'aucun des sites n'a une ambulance disponible est :

$$q^{\sum_{j \in N_i} x_j}$$

Alors la contrainte de couverture probabiliste peut être définie comme suit :

$$1 - q^{\sum_{j \in N_i} x_j} \geq \alpha \quad i = 1, \dots, m$$

Ou bien

$$q^{\sum_{j \in N_i} x_j} \leq 1 - \alpha \quad i = 1, \dots, m$$

3. Appliquant le logarithme, on obtient l'équivalent linéaire déterministe :

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq \left\lceil \frac{ln(1-\alpha)}{q} \right\rceil$$

Exercices supplémentaires

Exercice 1

Considérons le PL stochastique suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Min } cx_2 \\ &\text{s.c } \; a_{11} \; x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ &\quad\;\; \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_4 = b_2 \dots \dots [\mathbf{1}] \\ &\quad\;\; x_j \geq 0, j = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Supposons que tous les coefficients dans [1] sont des variables stochastiques et qu'on connait leur distribution jointe. Le nombre des réalisations possibles de la première, deuxième et troisième variable est 25, 27 et 28 respectivement. Combien de solutions nous obtiendrons avec l'approche d'analyse de scénarios ?

Exercice 2

Une compagnie aérienne cherche la partition optimale de son nouvel avion de façon à maximiser son profit. L'avion peut comporter jusqu'à 200 sièges de classe économique (autrement c'est la capacité maximale de l'avion). Cependant, l'avion peut être décomposé en trois sections ; à savoir : une section « Première Classe », une section « Business », une section de « Classe Economique ».

Notons que :

- un siège de première classe occupe 2 fois l'espace que prend un siège de classe économique.
- un siège de classe Business occupe 1.5 fois l'espace que prend un siège de classe économique.
- le profit pour un siège de première classe vaut 3 fois le profit pour un siège de classe économique.
- le profit pour un siège de classe Business vaut 2 fois le profit pour un siège de classe économique.

Considérons qu'il y a trois scénarios équiprobables concernant la demande clientèle, et que le nombre de billets vendus (par section) ne doit pas dépasser le nombre de sièges disponibles (par section) :

Développer **la forme extensive du programme stochastique** correspondant en respectant les notations :

- x_c : nombre de sièges de la classe c.
- y_{cs} : nombre de billets vendus de la classe c dans le scénario.

Exercice 3

1. Soit le problème P suivant. Le problème P a-t-il **un recours complet** ?

$$\begin{aligned} &\min 5y_1 + 2y_2 \\ &\mathbf{s.c} \\ &y_1 \geq 1 - x_1 \\ &y_2 \geq \xi - x_1 - x_2 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Soit le problème de seconde étape suivant :

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \min \{y_1 + 10y_2 + 10y_3\} \\ &\mathbf{sc.} \;\; y_1 + y_2 - y_3 = \xi + x_1 - 2x_2 \\ &\quad\;\; y_1 \leq 2 \\ &\quad\;\; y \geq 0 \end{aligned}$$

Donner la matrice de recours puis vérifier si le recours est fixé complet ou non.

Exercice 4

1. Considérons le problème de seconde étape suivant .Trouver les **contraintes induites** correspondantes.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2y_1 + y_2 \\ s.t. \quad & y_1 + 2y_2 \geq \xi_1 - x_1, \\ & y_1 + y_2 \geq \xi_2 - x_1 - x_2, \\ & 0 \leq y_1 \leq 1, \qquad 0 \leq y_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Tel que : $\xi_1 \in [2,4]$, $\xi_2 \in [2,4]$

2. Considérons l'ensemble de faisabilité de première étape suivant :

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 | x_1 + x_2 \geq -4;\ x_1 \leq 8\}$$

Considérons $(\xi_1, \xi_2) \in \{2,4\} \times \{6,8\}$ et que les contraintes de seconde étape à satisfaire pour tout ξ sont :

$$\begin{cases} \xi_1 - 2x_1 - 3x_2 = -y_1 - 3y_2 - y_3 \\ \xi_2 - x_1 - x_2 = -2y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

- Trouver les **contraintes induites**.
- Donner l'ensemble auquel doivent appartenir les décisions de première étape, pour que le problème de seconde étape soit faisable.

3. Les contraintes de première étape d'un PLS avec recours en deux étapes sont exprimées sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Et les contraintes du problème de la seconde étape sont données comme suit :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{y} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{-6} \\ \mathbf{-4} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Où : $\omega \in \{0,1\}$ est une variable aléatoire.

- Trouver les **contraintes induites.**
- Déduire l'ensemble auquel doivent appartenir les décisions de première étape pour que le problème de seconde étape soit faisable.

Exercice 5

Soit les problème de deuxième étape suivants où $\xi \in [5,20]$:

Problème 1

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \min \{y_1 + 10y_2 + 10y_3\} \\ \textbf{sc.}\ \ y_1 + y_2 &= x_1 - \xi - 2x_2 \\ y_1 + y_3 &\leq 2 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Problème 2

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \min \{y_1 + 10y_2 + 10y_3\} \\ \textbf{sc.}\ \ y_1 - y_3 &= x_1 - \xi - 2x_2 \\ y_2 - y_4 &= 2 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Pour quel problème doit-on calculer les contraintes induites? Justifier votre réponse. Calculer K_2 quand c'est nécessaire.

Exercice 6

Soit le programme stochastique suivant:

$$\mathbf{Min}\ (2x_1 + 3x_2 + E_\xi[7\tilde{y}_1 + 12\tilde{y}_2])$$
$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$(2+\eta_1)x_1 + 6x_2 + \tilde{y}_1 \geq 180$$
$$3x_1 + x_2 + \tilde{y}_2 \geq 162 + \eta_2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \tilde{y}_1 \geq 0, \tilde{y}_2 \geq 0$$

- Donner le problème de seconde étape
- Donner K_1
- Donner la matrice de recours ; Est-elle une matrice de recours complet?
- Donner la forme extensive du programme stochastique, supposer que :
    - $\eta_1 \in \{10, 30\}$ et $\eta_2 \in \{1, 2\}$
    - Toutes les réalisations sont équiprobables.