I.1 Introduction

L'automatique est une discipline scientifique qui vise à conférer à un dispositif donné appelé, ''système'' des performances souhaitées, et ce sans nécessité d'une intervention humaine. Une telle discipline requiert d'attribuer un modèle au comportement du dit système (phase de modélisation) et de l'utiliser afin d'une part de mieux comprendre ce comportement (phase d'analyse) et d'autre part d'agir sur le système dans le but d'améliorer ses propriétés (phase de commande).

I.2 Notion de système

Nous parlerons de système à chaque fois que l'on sera capable sur une entité donnée de distinguer des entrées et des sorties liées par causalité. Par le terme de causalité, nous voulons simplement dire qu'une action sur les entrées engendre une réaction sur les sorties.

On note souvent par les lettres U, d et y respectivement les entrées, les perturbations et les sorties de sorte qu'un système peut-être représenté par le diagramme fonctionnel suivant :

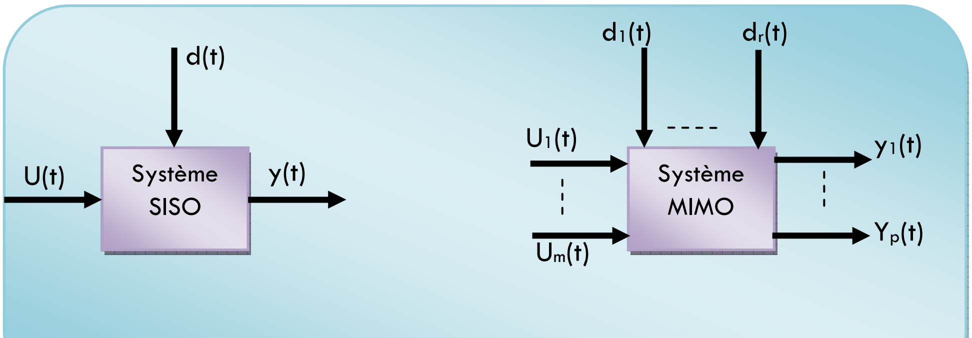

Fig. I.1 Diagramme Fonctionnel

SISO: Systèmes monovariables (Single Input Single Output)

MIMO: Systèmes multivaraibles (Multiple Input Multiple Output)

I.3 Notion de modèle

La synthèse d'une loi de commande nécessite de disposer d'un modèle de système. D'une manière générale un modèle est une représentation abstraite permettant d'agréger l'ensemble des connaissances que l'on a du système.

I.4 Notion d'état d'un système

L'état d'un système à un instant quelconque t_0 est l'ensemble des n variables $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$,$\cdots$.. $x_n(t_0)$ tel que la connaissance de cet ensemble à l'instant $t=t_0$ ainsi que celle du signal d'entrée u(t) pour $t \geq t_0$ suffit à déterminer complètement le comportement du système pour $t \geq t_0$.

I.5 Représentation d'état

I.5.1 Equation d'état

Pour introduire la notion d'état on peut considérer l'exemple d'un moteur à courant continu à excitation séparée entrainant une charge (Fig. I.2).

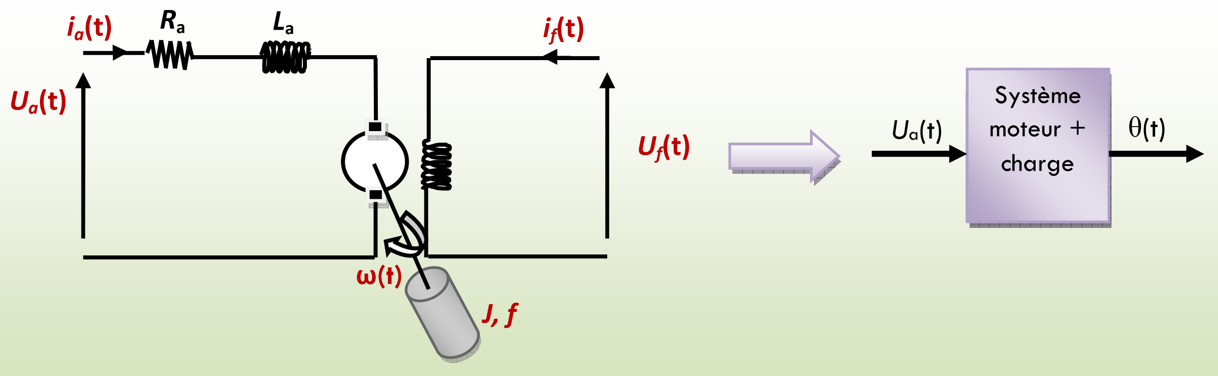

Fig. I.2 Moteur à courant continu à excitation séparée

Le comportement interne de ce système est décrit par l'ensemble d'équations suivantes :

$$\begin{cases} U_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} + e(t) \\ e(t) = K\omega(t) \\ C_e(t) = Ki_a(t) \\ J\dfrac{d\omega(t)}{dt} = C_e(t) - f\omega(t) \\ \omega(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt} \end{cases} \tag{I.1}$$

Avec :

R_a : Résistance d'induit

L_a : Inductance d'induit

K : Coefficient du couple (constante de la f.c.e.m)

J : Inertie totale de la charge

f : Coefficient des frottements visqueux.

Les grandeurs physiques caractéristiques du système sont :

U_a(t) : Tension d'induit

i_a(t) : Courant d'induit

e(t) : Force contre électromotrice

ω(t) : Vitesse de rotation

θ(t) : Position angulaire

à un instant donné t on peut considérer que le moteur se trouve dans un certain état caractérisé par une suite de grandeurs physiques i_a(t), ω(t) et θ(t). Cette suite de grandeurs peut être regroupée dans un vecteur appelé vecteur d'état noté :

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^T = [i_a(t) \quad \omega(t) \quad \theta(t)]^T \qquad \text{avec } x(t) \in R^3$$

Il est possible d'écrire le système d'équation (I.1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{di_a(t)}{dt} = -\dfrac{R_a}{L_a} i_a(t) - \dfrac{K}{L_a}\omega(t) + \dfrac{1}{L_a} U_a(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{d\omega(t)}{dt} = \dfrac{K}{J} i_a(t) - \dfrac{f}{J}\omega(t) \\ \dot{x}_3(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \end{cases} \tag{I.2}$$

En tenant compte de l'expression du vecteur d'état, le système d'équations (I.2) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{K}{L_a} & 0 \\ \dfrac{K}{J} & -\dfrac{f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_a \tag{I.3}$$

Qui s'identifie à l'équation :

$$\dot{x} = Ax + BU \tag{I.4}$$

Avec U : commande appliquée au système ($U=U_a$)

Les termes A et B représentent les matrices constantes définies par :

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{K}{L_a} & 0 \\ \dfrac{K}{J} & -\dfrac{f}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La sortie du système notée y(t) représente la grandeur mesurée θ(t).

θ est liée au vecteur d'état par l'équation :

$$y(t) = \theta(t) = x_3(t) \tag{I.5}$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$y = Cx$ avec : $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

L'étude précédente conduit à une représentation d'état définie par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{I.6}$$

I.5.2 Représentation d'état LTI

Les relations suivantes constituent une représentation d'état linéaire invariante dans le temps d'un système LTI (en anglais Linear Time Invariant).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t) \\ y(t) = Cx(t) + DU(t) \end{cases} \tag{I.7}$$

Avec :

A : Matrice d'état ou d'évolution dynamique de dimension (nxn)

B : Vecteur d'entrée ou de commande de dimension (nxm)

C : Vecteur de sortie (d'observation ou de mesure) de dimension (sxn)

D : Scalaire dit de transmission direct, qui est nul s'il n'existe aucun lien statique direct entre le signal d'entré et celui de sortie (sxm).

X(t) : Vecteur d'état de dimension ($nx1$)

U(t) : Vecteur d'entré de dimension ($rx1$)

y (t) : Vecteur de sortie de dimension ($mx1$)

N.B. Dans le cas où A, B, C, et D sont des fonctions de temps, le modèle est dit linéaire variant dans le temps.

I.5.3 Schéma fonctionnel

La représentation d'état (I.7) peut être associée au schéma bloc donné par la figure suivante.

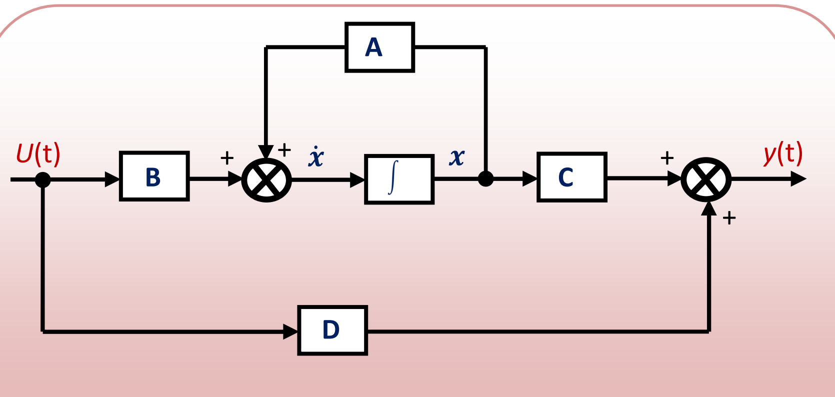

Fig. I.3 Schéma fonctionnel

I.5.4 Comment obtenir un modèle d'état

On peut obtenir une représentation d'état linéaire en manipulant le jeu d'équations ou en opérant à partir de l'équation différentielle unique.

I.5.4.1 Equations préliminaires

Lors de la phase de modélisation on essaie généralement de décrire le comportement du système par un jeu d'équations.

Exemple :

Prenons l'exemple d'un circuit RLC comme celui de la figure suivante.

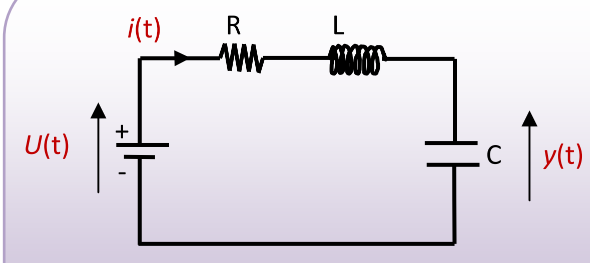

Fig. I.4 Circuit RLC

Les équations issues des lois de l'électricité qui régissent le comportement du circuit RLC sont les suivantes :

$$\begin{cases} U(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + y(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \Leftrightarrow \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{1}{c}i(t) \end{cases} \qquad \textbf{(I.8)}$$

I.5.4.2 Modèle entrée/sortie : équation différentielle

Il s'agit d'éliminer du jeu d'équations toutes les grandeurs internes du système qui ne sont ni l'entrée ni la sortie. On obtient alors une unique équation différentielle ne faisant apparaître que l'entrée U, la sortie y et leurs dérivées successives.

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ & b_m \frac{d^m U(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}U(t)}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1\frac{dU(t)}{dt} + b_0 U(t) \end{aligned} \qquad \text{(I.9)}$$

<u>**Exemple : Circuit RLC**</u>

Si l'on revient à l'exemple du circuit RLC, en regroupant les deux équations données en (I.8) on obtient par élimination de i(t)

$$U(t) = Lc\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + Rc\frac{dy(t)}{dt} + y(t) \qquad \textbf{(I.10)}$$

N.B. Il est claire que des valeurs élevées de *m* et *n* rendent difficile la détermination analytique de l'expression du signal y(t). Donc on a besoin d'introduire un nouvel outil de modélisation plus aisé qui s'agit de la fonction de transfert.

I.5.4.3 Fonction de transfert

La fonction de transfert est un modèle de comportement entrée/sortie qui s'obtient à partir de l'équation différentielle linéaire à coefficients constats. En appliquent la transformée de Laplace à l'équation (I.9) on obtient :

$$G(P)=\frac{Y(P)}{U(P)}=\frac{b_mP^m+b_{m-1}P^{m-1}+.............b_1P+b_0}{a_nP^n+a_{n-1}P^{n-1}+.............a_1P+a_0} \tag{I.11}$$

I.5.4.4 Modèle d'état par le jeu d'équations

Soient les deux variables d'état $x_1(t)=i(t)$ et $x_2(t)=y(t)$ de l'exemple du circuit RLC. Les équations du système (I.8) peuvent se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-\dfrac{R}{L}x_1(t)-\dfrac{1}{L}x_2(t)+\dfrac{1}{L}U(t)\\ \dot{x}_2(t)=\dfrac{1}{c}x_1(t)\end{cases} \tag{I.12}$$

Ce qui conduit au modèle d'état suivant :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-R}{L} & \dfrac{-1}{L}\\ \dfrac{1}{c} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}U \tag{I.13}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+BU(t)\\ y(t)=Cx(t)+DU(t)\end{cases}$$

Avec :

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{c} & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\ \text{et D=0}$$

I.5.4.5 Modèle d'état par l'équation différentielle unique

La technique consiste à considérer l'équation différentielle globale (I.9) en Supposant que m=0 et a_n=1. Posons les variables d'état suivantes :

$$\begin{cases}x_1=y\\ x_2=\dot{y}\\ x_3=\ddot{y}\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n=\dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{y}=x_2\\ \dot{x}_2=\ddot{y}=x_3\\ \dot{x}_3=\dddot{y}=x_4\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot{x}_n=\dfrac{d^{n}y}{dt^{n}}\end{cases}$$

(I.9) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+.........................+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_0U(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 U(t) - a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} - \dots\dots\dots\dots\dots - a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_0 y(t)$$

D'où la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} U \tag{I.14}$$

$y = Cx$ avec $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$ et D=0

Exemple circuit RLC :

Appliquons cette technique à l'équation (I.10) on aura :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{1}{Lc}U(t) - \frac{R}{L}\frac{dy(t)}{dt} - \frac{1}{Lc}y(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{Lc}U - \frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{Lc}x_1$$

On obtient donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{Lc} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Lc} \end{bmatrix} U$$

$y = Cx$ **avec :** $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, **D=0**

I.5.5 Polynôme caractéristique et pôles du système

On appelle polynôme caractéristique de la matrice d'évolution d'état A, le polynôme de degré n défini par :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{I.15}$$

Avec I : matrice d'identité, λ: valeurs propres

Le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme suivante :

$$P(\lambda) = (-1)^n\left[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots\dots\dots + a_0\right] \tag{I.16}$$

On appelle pôles du système les solutions de l'équation caractéristique $P(\lambda) = 0$

$$P(\lambda)=0 \Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0 \qquad (I.17)$$

Les pôles du système correspondent aussi aux valeurs propres de la matrice d'évolution d'état A.

Exemple

Soit la matrice d'état A définie par : $A=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 6 & 0\end{bmatrix}$

- **Calculer les valeurs propres.**

Solution :

Valeurs propres $\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -1\\ 6 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+5\lambda+6$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=-2\\ \lambda_2=-3\end{cases}$$

I.5.6 Expression de la fonction de transfert à partir des équations d'état

En utilisant la représentation d'état (I.7), la fonction de transfert G(P) peut être calculée en appliquant la transformée de Laplace. On a :

$$\begin{cases}X(P)=L[x(t)]\\ Y(P)=L[y(t)]\\ U(P)=L[U(t)]\end{cases}$$

On obtient $\begin{cases}PX(P)-X(0)=AX(P)+BU(P)\\ Y(P)=CX(P)+DU(P)\end{cases}$

Supposons que X(0)=0 (conditions initiales nulles) on a :

$$X(P)=(PI-A)^{-1}BU(P)$$

On en déduit donc :

$$Y(P)=\left[C(PI-A)^{-1}B+D\right]U(P)$$

D'où :

$$G(P)=\frac{Y(P)}{U(P)}=C(PI-A)^{-1}B+D \qquad (I.18)$$

I.6 Commandabilité et Observabilité ou gouvernabilité

I.6.1 Commandabilité ou gouvernabilité

Soit le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t) \\ y(t) = Cx(t) + DU(t) \end{cases} \qquad (I.19)$$

Le modèle est commandable ou gouvernable si pour toute instance x_1 du vecteur d'état il existe un signal d'entrée U(t) d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état x_0 à l'état x_1 en un temps fini.

I.6.2 Observabilité

Le modèle (I.19) est observable si quel que soit t_0, il existe un intervalle de temps fini $[t_0, t_1]$ tel que la connaissance de l'entrée U(t) et de la sortie y(t) sur cet intervalle permet de reconstituer $x(t_0)$.

I.6.3 Critères de Commandabilité et d'Observabilité

I.6.3.1 Critère de Commandabilité

La paire de matrices (A,B) ou le système (I.19) est commandable si et seulement si :

$$Rang(Q_c) = n \quad , \quad \text{où} \quad Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \qquad (I.20)$$

La matrice Q_c est dite matrice de commandabilité.

Rappel : Rang d'une matrice :

- On définit le Rang r d'une matrice $M \in C^{nxm}$ par le nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes de cette matrice. Elle est de Rang plein si et seulement si *min(m,n)=r.*
- Une matrice carrée A de Rang plein est dite régulière, dans ce cas il vient *det(A)≠0.* Par opposition une matrice déficiente en Rang est dite singulière et il vient alors *det(A)=0.*

Exemple :

Soit le système défini par : $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Vérifier la commandabilité de ce système.

Solution :

Le système est commandable si le $Rang(Q_c) = n = 3$

- Calcul de la matrice de commandabilité Q_c.

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\end{bmatrix}$$

$$A^2B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$Q_c=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

- **Calcul du Rang de Q_c.**

  $\det(Q_c)=-8\neq 0$

  $\det(Q_c)\neq 0 \Rightarrow$ $Rang(Q_c)=3$ **le système est donc complètement commandable.**

I.6.3.2 Critère d'Observabilité

La paire de matrices (A,C) ou le système (I.19) est observable si et seulement si :

$$Rang(Q_o)=n \quad , \quad \text{où} \quad Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\\ \vdots\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix} \qquad \text{(I.21)}$$

La matrice Q_o est dite matrice d'observabilité.

Exemple :

Soit le système défini par : $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

- Vérifier l'observabilité de ce système.

Solution :

Le système est observable si le $Rang(Q_o)=n=3$

- Calcul de la matrice d'observabilité Q_o.

$$Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}$$

$$CA=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$CA^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25 & 24 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -24 & -8 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-24 & -8 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -4 & 4 & 1\\ -24 & -8 & 1\end{bmatrix}$$

- **Calcul du Rang de Q_o.**

  $\det(Q_o)=128\neq 0$

  $\det(Q_c)\neq 0$ $\Rightarrow$ $Rang(Q_o)=3$ **le système est donc complètement observable.**

I.7 Stabilité

Par définition un système est stable si et seulement si la matrice d'évolution libre A vérifie :

$$\lim_{t\to\infty} e^{At}\to 0 \tag{I.22}$$

I.7.1 Théorème

Le système est stable si et seulement si les valeurs propres de A (racines de *det(A)=0*) sont à parties réelles strictement négatifs.

Exemple :

Soit la matrice d'état A définie par : $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 6 & 0\end{bmatrix}$

- **Calculer les valeurs propres.**

Solution :

Valeurs propres $\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -1\\ 6 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+5\lambda+6$$

$\det(A-\lambda I)=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=-2<0 \;et\; \lambda_2=-3<0 \;\Rightarrow$ **Les deux valeurs propres sont strictement négatives, le système est donc stable.**

I.7.2 Calcul direct de e^{At}

Soit la matrice de transition pour un système de la forme (I.19) :

$$\phi(t) = e^{At} \tag{I.23}$$

Dans le domaine de Laplace, celle-ci s'écrit :

$$\phi(P) = \left(PI - A\right)^{-1} \tag{I.24}$$

Le calcul de e^{At} peut donc être résumé de la manière suivante :

- Calculer ($PI - A$)
- Calculer $\left(PI - A\right)^{-1} = \dfrac{adj(PI-A)^T}{\det(PI-A)}$
- Calculer la transformée de Laplace inverse de $(PI - A)^{-1}$

I.7.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps on a :

$$-Q = A^T P + PA \tag{I.25}$$

Dans la pratique la méthode est la suivante :

1- Choisir une matrice Q arbitraire symétrique définie positive (la matrice I conviendra le plus souvent)
2- Déterminer ensuite P à partir de (I.25), cela revient à résoudre n(n+1)/2 équations.
3- Le système est asymptotiquement stable si P est définie positive.

Exemple :

Prenons l'exemple précédent :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Vérification de la stabilité selon lyapunov :**

On a

$-Q = A^T P + PA$ **avec** $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **et** $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p_1} & \boldsymbol{p_2} \\ \boldsymbol{p_2} & \boldsymbol{p_3} \end{bmatrix}$

- **Calcul de A^TP :**

$$A^T P = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5p_1 + 6p_2 & -5p_2 + 6p_3 \\ -p_1 & p_2 \end{bmatrix}$$

- **Calcul de AP :**

$$PA = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5p_1 + 6p_2 & -p_1 \\ -5p_2 + 6p_3 & -p_2 \end{bmatrix}$$

- **Calcul de :** $-Q = A^T P + PA$ **:**

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10p_1 + 12p_2 & -p_1 - 5p_2 + 6p_3 \\ -p_1 - 5p_2 + 6p_3 & -2p_2 \end{bmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{cases} -10p_1 + 12p_2 = -1 \\ -p_1 - 5p_2 + 6p_3 = 0 \\ -2p_2 = -1 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations nous donne :

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{7}{10} \\ p_2 = \dfrac{1}{2} \\ p_3 = \dfrac{8}{15} \end{cases}$$

- **Vérification de P :**

$$\begin{cases} \Delta_1 = p_1 = \dfrac{7}{10} > 0 \\ \Delta_2 = \det(P) = 0.123 > 0 \end{cases}$$

$P > 0$, **la matrice P est définie positive le système est donc stable.**