

l'état 0:

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} d(0) = \text{pgcd}(3, 3) \\ = 3 < \infty \end{array} \right.$$

donc: l'état 0 est toute la classe est périodique de période 3.

IV - Distribution initiale et Comportement transitoire:

IV-1. Distribution initiale:

• la distribution des états d'une C.M. après n transitions est notée $\pi^{(n)}$. Cette distribution est un vecteur de probabilité contenant la loi de la variable aléatoire X_n .

$$\pi_i^{(n)} = P(X_n = i), \quad \forall i \in E.$$

donc: $\pi^{(n)} = (\pi_{i_1}^{(n)}, \pi_{i_2}^{(n)}, \dots)$ tq: $i_1, i_2, \dots \in E$.

la distribution initiale est $\pi^{(0)}$.

Rq:

Si l'état initial est connu avec certitude et est égal à i , on a simplement $\pi_i^{(0)} = 1$ et $\pi_j^{(0)} = 0, \forall i \neq j$.

IV-2. Comportement transitoire:

Théorème:

Soit P la matrice de transition d'une C.M. et $\pi^{(0)}$ la distribution de son état initial. Pour tout $n \geq 1$ on a: $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P$ et $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$.

Preuve: on a: $\forall j \in E$.

$$\pi_j^{(1)} = P(X_1 = j) = \sum_{i \in E} P(X_1 = j \mid X_0 = i).$$

$$= \sum_{i \in E} p_{ij} \pi_i^{(0)}.$$

$$= \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} p_{ij} \text{ et } \pi^{(1)} = \pi^{(0)} P.$$

Pour démontrer le second il suffit de résoudre l'équation de récurrence précédente par substitution.

Exemple:

Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une C.M à espace d'état $E = \{0, 1, 2\}$ à distribution initiale $\pi = (\pi_0^{(0)}; \pi_1^{(0)}; \pi_2^{(0)})$ et la matrice de transition est:

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$$

1) calculer $P(X_1=2) = ?$.

$$\pi_2^{(1)} = P(X_1=2) = P(X_1=2 \cap \pi)$$

$$= P(X_1=2 \cap [\bigcup_{i \in E} \{X_0=i\}])$$

$$= P(\bigcup_{i \in E} \{X_1=2\} \cap \{X_0=i\})$$

$$= \sum_{i \in E} P(\{X_1=2\} \cap \{X_0=i\})$$

$$= \sum_{i \in E} P(\{X_1=2; X_0=i\})$$

$$= \sum_{i \in E} P(X_0=i) \cdot P(X_1=2 / X_0=i)$$

$$= \sum_{i \in E} P_{i2} \cdot \pi_i^{(0)}$$

$$= P_{02} \pi_0^{(0)} + P_{12} \pi_1^{(0)} + P_{22} \pi_2^{(0)}$$

$$= (0,6)(0,2) + (0,2)(0,5) + (0,2)(0,3) = 0,28$$

2) calculons $P(X_2=2)$:

$$P(X_2=2) = \sum_{i \in E} P(X_2=2 / X_0=i) \cdot P(X_0=i)$$

$$= \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} \cdot p_{i2}^{(2)}$$

où $p_{i2}^{(2)}$ sont les éléments de la 3^{ème} colonne de la matrice à 2 étapes $p^{(2)}$.

$$p^{(2)} = P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,19 & 0,49 & 0,32 \\ 0,3 & 0,34 & 0,36 \\ 0,33 & 0,43 & 0,24 \end{pmatrix}$$

d'où: $P(X_2=2) = (0,2)(0,3) + (0,5)(0,36) + (0,3)(0,24) \approx 0,33$

3) a) $P(X_3=2 / X_0=0) = ?$

on a: $P(X_3=2 / X_0=0) = p_{02}^{(3)}$

$$p^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,19 & 0,49 & 0,32 \\ 0,3 & 0,34 & 0,36 \\ 0,33 & 0,43 & 0,24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,285 & 0,439 & 0,276 \\ 0,262 & 0,448 & 0,321 \\ 0,235 & 0,373 & 0,332 \end{pmatrix} \quad \text{donc: } p_{02}^{(3)} = 0,276$$

2^{ème} méthode: on peut calculer $P_{02}^{(3)}$.

en utilisant l'équation de C.M.

$$P_{02}^{(3)} = \sum_{i=0}^2 P(X_3=2; X_2=i / X_0=0)$$

$$= \sum_{i=0}^2 P(X_2=i / X_0=0) \cdot P(X_3=2 / X_2=i)$$

$$= \sum_{i=0}^2 P_{i2}^{(2)} \cdot P_{0i}^{(2)}$$

$$= P_{02}^{(2)} P_{00}^{(2)} + P_{12}^{(2)} P_{01}^{(2)} + P_{22}^{(2)} P_{02}^{(2)}$$

$$= (0,6)(0,19) + (0,2)(0,49) + (0,2)(0,24) = 0,26$$

b) $P(X_0=1 / X_1=2) = ?$

$$\text{on a: } P(X_0=1 / X_1=2) = \frac{P(X_0=1; X_1=2)}{P(X_1=2)}$$

$$= \frac{P(X_0=1) \cdot P(X_1=2 / X_0=1)}{P(X_1=2)}$$

$$= \pi_1^{(0)} \cdot \frac{P_{12}}{0,28} = \frac{(0,5)(0,2)}{0,28} = 0,357$$

c) $P(X_1=1; X_3=1) = ?$

$$\text{on a: } P(X_1=1; X_3=1) = P(X_1=1) \cdot P(X_3=1 / X_1=1)$$

$$\pi_1^{(1)} \cdot P_{11}^{(2)} = \left(\sum_{i=0}^2 \pi_i^{(0)} P_{i1} \right) \cdot P_{11}^{(2)}$$

$$\stackrel{*}{=} (0,2)(0,1) + (0,5)(0,4) + (0,3)(0,7) = 0,146.$$

$$\begin{aligned} e) \quad P(X_1=1 / X_2=2; X_3=0) &= \frac{P(X_1=1; X_2=2; X_3=0)}{P(X_2=2; X_3=0)} \\ &= \frac{P(X_1=1) \cdot P(X_2=2 / X_1=1) \cdot P(X_3=0 / X_2=2)}{P(X_2=2) \cdot P(X_3=0 / X_2=2)} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=0}^2 \pi_i^{(0)} \cdot P_{i1} \right) P_{12}}{0,33 \cdot (0,43)(0,2)} \\ &= \frac{0,33}{0,33} \\ &= 0,26 \end{aligned}$$

V - Comportement asymptotique des C.M. irréductible:

L'étude du comportement à long terme d'une C.M.

- cherche à répondre à des questions aussi diverses que:

* la distribution $\pi^{(n)}$ converge lorsque $n \rightarrow +\infty$

quelle est la limite π^* ? et cette limite est-elle indépendante de la distribution initiale $\pi^{(0)}$?

- si l'état i est récurrent quelle est la proportion du temps passé dans cet état et que le nbre moyen

de transitions entre deux visites successives de cet état ?

- Si l'état i est transient qu'elle est le nombre moyen de visites de cet état ?

II-1: Distribution invariante:

Déf 5.1: Une distribution π est invariante ou stationnaire si: $\pi = \pi \cdot P$.

Prop 5.1: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)}$ existe, alors la limite est une distribution invariante.

Prop 5.2: Une C.M possède toujours une ou plusieurs distributions invariante.

Théorème 5.1: Une C.M possède autant de distributions invariantes que la multiplicité de la valeur propre de la matrice de transition.

Théorème 5.2: La distribution $\pi^{(n)}$ des états d'une C.M converge vers une distribution (invariante) π^* indep de la distribution initiale $\pi^{(0)}$.

SSI: la suite des puissances de la matrice de transition P de la chaîne converge vers une matrice P^* dont les lignes sont égales entre elles.

Preuve: $\exists \pi^* \perp \pi^{(0)} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^*$

la condition nécessaire car: si indépendamment de $\pi^{(0)}$

la limite $\pi^{(n)} = \pi^*$ il suffit de considérer successivement

les distributions initiales:

$$\pi_1^{(0)} = (1, 0, \dots, 0); \quad \pi_2^{(0)} = (0, 1, 0, \dots, 0) \dots \quad \pi_p^{(0)} = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Pour obtenir $\pi^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^n)_i = (P^*)_i$.

Ainsi P^* existe et toutes les lignes sont égales à π^* .

* la condition est suffisante si P^* existe et $P_{ij}^* = P_j^*, \forall i \in E$

on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(0)} P^n = \pi^{(0)} P^*$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n = \pi^{(0)} P^*$ et la limite π^* existe.

De plus:

$$\begin{aligned} \pi_j^* &= \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} P_{ij}^* = \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} P_j^* \\ &= P_j^* \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} = P_j^*. \end{aligned}$$

Ainsi: π^* est indépendante de la distribution initiale $\pi^{(0)}$ est égale à n'importe quelle ligne de P^* .

Req: Si: $\pi^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(n)}$, on parlera de la distribution asymptotique stationnaire ou invariante.

V.2: Comportement asymptotique des chaînes irréductibles à périodiques:

Théorème 5.3: Soit P la matrice de transition d'une chaîne irréductible et à périodique les propriétés suivantes sont vérifiées:

- 1) La matrice $P^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P^*$
- 2) Les lignes de P^* sont toutes égales entre elles.
- 3) $P_{ij}^* > 0, \forall i, j \in E$.

- 4) Pour toute distribution initiale $\pi^{(0)}$:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^{(0)} \cdot P^{(n)} = \pi^*$$

- 5) π^* est la solution unique du système
$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

- 6) π^* est la même quelle que soit la ligne de la matrice P^* .

- 7) $\forall i \in E: \pi_i^* = \frac{1}{N_i}$

où: N_i est l'espérance de nombre de transition entre deux visites successives de l'état i .

Req: Pour n suffisamment grand on a: $\pi^{(n)} \approx \pi^*$
 et π_i^* est la probabilité que la chaîne se trouve dans l'état i à un instant quelconque.

cette valeur représente aussi la proportion du temps passé dans l'état i .

Exemple: Soit la c.m. irréductible et a périodique définie par la matrice de transition:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$E = \{1, 2, 3\}.$$

trouvons $\pi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)}$, $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*)$

c'est l'unique solution du système.

on a: $\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi \cdot 1 = 1 \end{cases}$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$$

* 25% du temps dans l'état 1.

* 30% du temps dans l'état 2.

* 45% du temps dans l'état 3.

et aussi, il faut $(\pi_j^* = \frac{1}{N_j})$ en moyenne 4 étapes entre deux visites successives pour l'état 1.

5.3: Les chaînes ergodiques:

Déf: Une C.M est ergodique si elle admet une distribution asymptotique c.à.d si $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^{(n)}$ existe, unique et indépendante de la distribution initiale.

Prop 5.5: Les chaînes irréductibles et a périodiques sont ergodiques

Théorème 5.4: (Théorème ergodique).

Soit $\{X_n; n=0,1,\dots\}$ une C.M ergodique de distribution stationnaire π^* et f une fct réelle définie sur l'espace d'état E alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(X_k) = \sum_{i \in E} \pi_i^* f(i) \text{ p.s.}$$

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \frac{1}{4} \pi_1 + \frac{1}{4} \pi_2 + \frac{1}{4} \pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{4} \pi_2 + \frac{1}{2} \pi_3 = \pi_2 \\ \frac{3}{4} \pi_1 + \frac{1}{2} \pi_2 + \frac{1}{4} \pi_3 = \pi_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4} \pi_1 + \frac{1}{4} \pi_2 + \frac{1}{4} \pi_3 = 0 \dots (1) \\ -\frac{3}{4} \pi_2 + \frac{1}{2} \pi_3 = 0 \dots (2) \\ \frac{3}{4} \pi_1 + \frac{1}{2} \pi_2 - \frac{3}{4} \pi_3 = 0 \dots (3) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \dots (4) \end{cases}$$

de (2) on a : $\boxed{\pi_3 = \frac{3}{2} \pi_2}$

$$-\frac{3}{4} \pi_1 + \frac{\pi_2}{4} + \frac{3}{8} \pi_2 = 0 \Rightarrow -\frac{3}{4} \pi_1 = -\frac{5}{8} \pi_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{5}{6} \pi_2}$$

remplaçons π_1 et π_3 dans (4) on aura :

$$\frac{5}{6} \pi_2 + \pi_2 + \frac{3}{2} \pi_2 = 1 \Rightarrow \frac{20}{6} \pi_2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_2 = \frac{3}{10}}$$

$$\text{donc : } \pi_1 = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{10} \right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\text{et : } \pi_3 = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{10} \right) = \boxed{\frac{9}{20}}$$

$$\text{alors : } \pi^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{9}{20} \right) = \left(\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^* \right)$$

donc le processus passe en moyenne :