

Modélisation d'un véhicule automobile

I. Introduction

Le véhicule routier proprement dit est un système mécanique très complexe qui présente des caractéristiques fortement non linéaires. Des organes de liaison entre la masse suspendue du véhicule et les essieux, tels que les ressorts ou les amortisseurs, sont à l'origine de ces non linéarités. Son comportement dynamique est en fait une réponse à des excitations de différentes natures (figure 1) parmi lesquelles nous pouvons citer les commandes de l'Entité en Charge de la Conduite (ECC), les effets de l'aérodynamique, des perturbations, l'interaction pneumatique/chaussée et les manœuvres du conducteur qui se traduisent par des actions d'accélération, de freinage ou de braquage des roues. Les efforts générés par ces actions se manifestent autour des trois axes orthogonaux G_x, G_y, G_z (figure 2) du repère du véhicule. Ainsi en fonction de la direction de ces efforts, des déplacements du véhicule sont possibles le long de ces axes. Les moments de ces efforts produisent respectivement autour de ces axes les mouvements de roulis, tangage et lacet. A ces actions peuvent aussi correspondre des mouvements de débattement des suspensions.

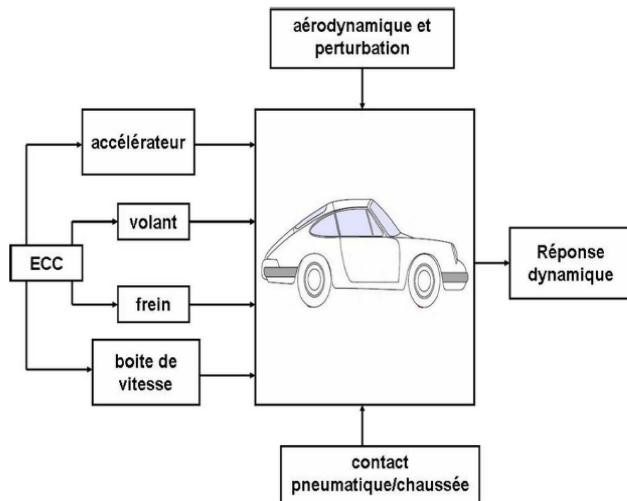


FIG. 1 – Le système véhicule

Dans ce chapitre, nous présentons quelques éléments nécessaires à la modélisation d'un véhicule automobile. Nous commençons tout d'abord par montrer les différents mouvements ainsi que les principaux éléments qui la constitue. Ensuite, un véhicule complet est modélisé sous certaines hypothèses simplificatrices. Le modèle non linéaire d'un demi-véhicule automobile pour l'étude du comportement latéral est présenté.

II. Les différents mouvements du véhicule

Le véhicule automobile représenté sur la figure 2 est un système complexe possédant six degrés de liberté constitués par un ensemble de rotations et de translations de la caisse qui est considérée comme

une masse suspendue. Le système d'axes par rapport auquel sont définis les différents mouvements du véhicule est le repère orthonormé direct $R(G, x, y, z)$ de la figure .2. L'origine de ce repère est pris au centre de gravité du véhicule. La translation sur l'axe G_x caractérise le déplacement longitudinal x du véhicule et le déplacement latéral y se fait selon l'axe G_y . La translation sur l'axe G_z permet le mouvement vertical z de la caisse du véhicule par l'intermédiaire de ses suspensions. Par ailleurs, les mouvements de rotations de la caisse par rapport aux trois axes sont :

- le roulis (ϕ) qui est du à des oscillations autour de l'axe G_x , phénomène en particulier ressenti lorsque le véhicule se déplace dans un virage.
- le tangage (θ) qui est produit par des mouvements angulaires autour de l'axe G_y , phénomène qui intervient lors des phases d'accélération et de freinage.
- le lacet (ψ) qui est le mouvement de rotation autour de l'axe G_z .

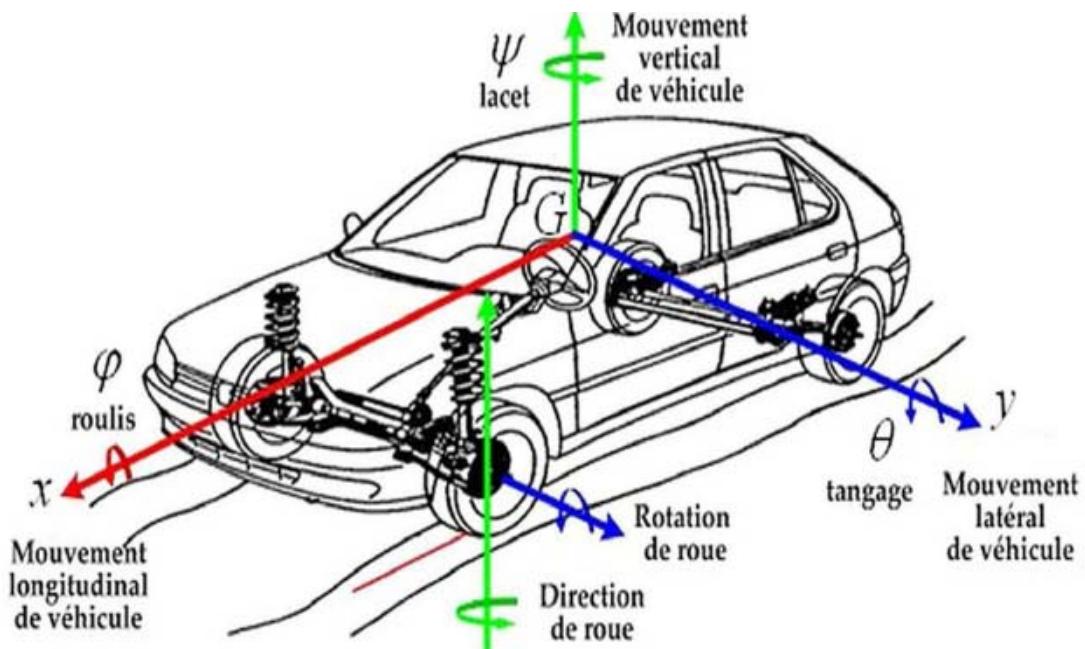


FIG. .2 – Les différents mouvements du véhicule

Les hypothèses simplificatrices sont de nature variées et interviennent entre autres au niveau des moments d'inertie du véhicule. Du fait de la symétrie du véhicule par rapport à un plan vertical-longitudinal, les moments d'inertie croisés (I_{xy}, I_{yx}) sont relativement faibles comparés aux valeurs des moments dans les directions y et z .

III. Les différents éléments du véhicule

Le véhicule est une structure mécanique composée de plusieurs éléments. Chaque dispositif à une fonction bien précise qu'il est nécessaire de bien comprendre pour la modélisation. Le moteur et les transmissions assurent la production des efforts de traction ainsi que leur transmission aux roues. Les trains roulants, la suspension et la direction concourent à guider le véhicule, à transmettre les forces motrices et de freinage tout en assurant le confort des passagers. Le châssis est destiné à accueillir les trains roulants. Il permet de supporter et de transmettre la production des efforts de freinage. Dans cette partie nous décrirons le châssis ainsi que l'ensemble des éléments intervenant dans les deux modes longitudinal et latéral et ceux caractérisant la suspension.

- **Le châssis**

Le châssis (ou la caisse) est le corps principal du véhicule. C'est la structure métallique externe. A la fin du montage elle contient l'habitacle, le groupe moteur et le système de commande du pilote : pédale, volant, levier de vitesse. Cet ensemble constitue la masse suspendue.

Les mouvements du châssis par rapport au sol, dans les trois directions, se caractérisent par trois translations : l'avance suivant l'axe longitudinal x , le ballant suivant l'axe transversal y et le pompage suivant l'axe vertical z , et trois rotations : le roulis ϕ , le tangage θ et le lacet ψ .

Les paramètres inertIELS de la caisse sont généralement représentés par :

- sa masse M
- la position de son centre de gravité G
- les seconds moments d'inertie par rapport à chaque axe x, y, z : I_x, I_y, I_z
- les produits d'inertie : I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}

Les efforts principaux qui agissent sur la caisse sont les charges verticales, qui se transmettent par l'intermédiaire de la liaison au sol (pneumatique, trains, suspensions...). Elles sont quasiment égales à la charge verticale des pneus. Mais les efforts transversaux et longitudinaux venant du contact pneu/sol sont aussi à considérer. Les efforts aérodynamiques s'appliquent aussi sur la caisse et lorsque la vitesse longitudinale du véhicule dépasse 90 km/h il devient indispensable de les prendre en compte. Ils proviennent du déplacement relatif du véhicule par rapport à l'atmosphère et sont donc principalement appliqués dans la direction longitudinale sauf en cas de vent latéral fort. L'influence de la composante verticale de l'effort aérodynamique est aussi importante pour la stabilité du véhicule roulant à grande vitesse

• Les éléments pour le contrôle longitudinal

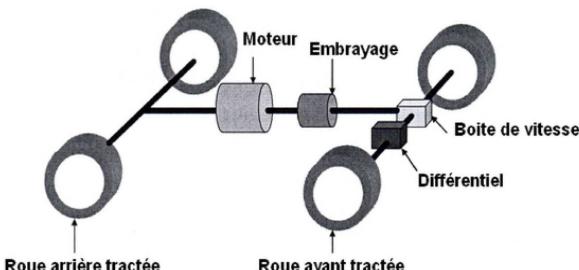


FIG. .3 – Les organes constitutifs du mode longitudinal

La figure ci-dessus présente une schématisation par bloc des organes principaux du contrôle longitudinal du véhicule. Les sous-systèmes intervenant dans la dynamique longitudinale sont constitués du groupe motorisation, du système de freinage, du groupe embrayage ou convertisseur de couple, de la transmission, des roues et du contact pneu/chaussée.

Cette chaîne moteur permet ainsi au véhicule d'entamer des phases d'accélération, de freinage, des arrêts et des redémarrages.

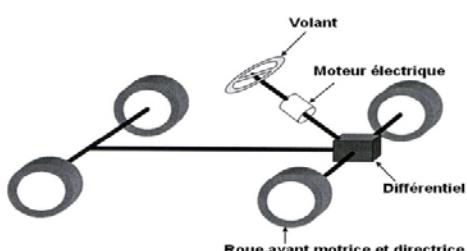


FIG. .4 – Les organes constitutifs du mode latéral

La dynamique latérale du véhicule est régie par quatre sous-ensembles : le volant, la colonne de direction, les roues directrices et le contact pneu/chaussée comme le montre la figure 4. Ces éléments permettent au véhicule de se déplacer latéralement par action du conducteur sur le volant, d'évoluer dans un virage et d'effectuer des changements de voie. Le principe du système directeur est de permettre au conducteur de diriger les roues avec précision sans trop d'efforts. Ceci est basé sur une commande par démultiplication et éventuellement assistée. Le rapport de démultiplication est en relation avec le couple nécessaire pour orienter les roues et le couple désiré à appliquer au volant par le conducteur. Le mécanisme de crémaillère est le système le plus répandu pour réaliser cette démultiplication (voir la figure 5).

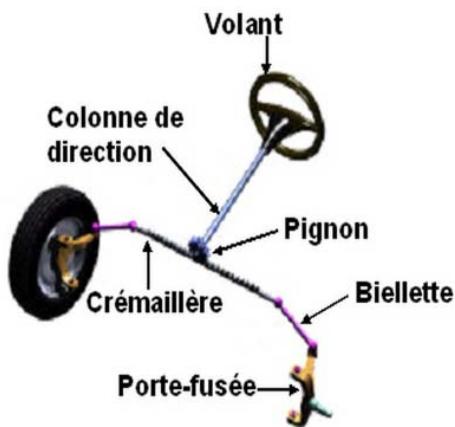


FIG. .5 – Mécanisme de direction à crémaillère

- **La suspension (voir chapitre2)**

Etant donné que l'objectif principal de ce chapitre est de développer un modèle pour les deux dynamiques, latérale et longitudinale, d'un véhicule automobile, l'étude du mouvement vertical n'est pas abordée.

IV. Modèle longitudinal et latéral du véhicule auto-mobile

L'objet de cette section est de présenter un modèle décrivant la dynamique d'un véhicule routier avec couplage des deux mouvement latéral et longitudinal. Pour des raisons de simplicité, nous nous limitons à un aspect global du comportement du véhicule.

IV.1 Paramétrage du modèle

La première étape nécessaire à tout problème de mécanique consiste à mettre en place un paramétrage adapté, c'est-à-dire à introduire des repères liés aux solides et des paramètres à la fois géométriques et cinématiques. Les paramètres géométriques permettent de décrire la géométrie du système en positionnant les uns par rapport aux autres. Les paramètres cinématiques correspondent aux degrés de libertés entre les solides.

Comme le montre la figure 7, nous pouvons distinguer trois repères. Le premier repère qu'il convient de mettre en place est un repère absolu $R_a(O_a, x_a, y_a, z_a)$ associé au mouvement du véhicule par rapport au sol, d'origine O_a qui est la projection du centre d'inertie du châssis sur le sol. Il convient

ensuite d'associer un repère lié au véhicule $R_\theta(G, x, y, z)$, orienté de tel façon que l'axe \vec{x} correspond à l'axe longitudinal du véhicule.

Il est orienté de l'arrière vers l'avant. L'axe \vec{z} correspond à l'axe vertical du véhicule, il est orienté du bas vers le haut. L'axe \vec{y} correspond à l'axe transversal du véhicule, il est orienté de façon à ce que le trièdre $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit direct. L'origine G du repère véhicule est le centre de gravité du véhicule. Le troisième repère est le repère roue $R_r(R, x_r, y_r, z_r)$, il y en a quatre, un par roue ($i = 1$ à 4). Chaque repère lié au pneumatique a pour origine le point de contact sol-roue. L'axe x_{ri} est dans le plan de la roue, y_{ri} est perpendiculaire au plan de la roue et z_{ri} est normal au plan de la route. Le repère roue est utilisé pour déterminer les efforts pneumatiques. Par ailleurs, la caisse (masse suspendue) effectue des mouvements de roulis (φ) et de tangage (θ) par rapport à la masse non suspendue (voir figures 8 et 9).

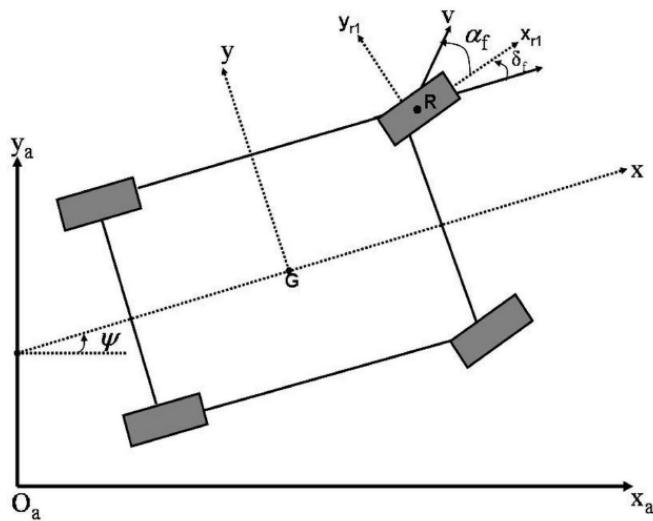


FIG. .7 – Définition des repères

Un autre repère lié à ce mouvement de la caisse est désigné par $R_c(O_c, x_c, y_c, z_c)$. Il est déduit du repère R_θ par deux rotations d'Euler

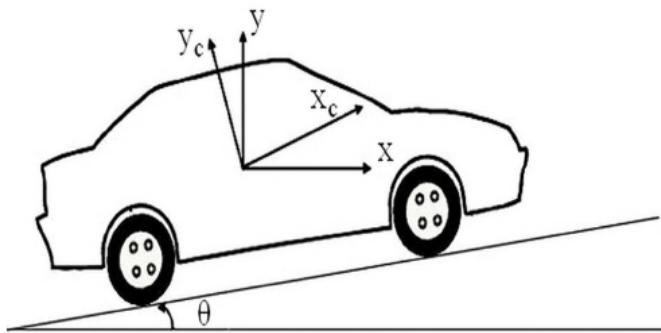


FIG. .8 – Repère lié à la caisse après un mouvement de tangage

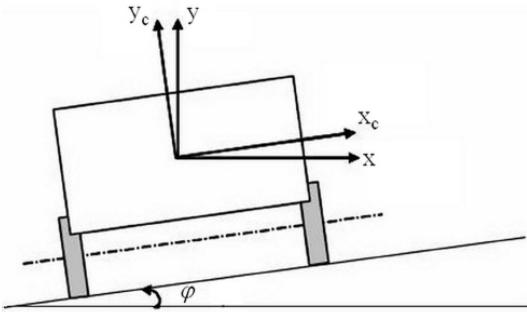


FIG. .9 – Repère lié à la caisse après un mouvement de roulis

IV.2 Modèle du châssis

Un modèle assez complexe de la dynamique du châssis d'un véhicule automobile a huit degrés de liberté peut être considéré. Il englobe les deux dynamiques, latérale et longitudinale. Les degrés de liberté associés à ce modèle sont : les deux vitesses longitudinale et latérale (u, v), la vitesse du lacet (r), la vitesse du roulis (p) et les vitesses de rotation des quatre roues ($w_{f1}, w_{f2}, w_{r1}, w_{r2}$).

Sur le modèle du véhicule de la figure 10, a_f et a_r représentent respectivement la distance entre le centre de gravité et les deux axes avant et arrière. $2P_f$ et $2P_r$ (f pour avant (*front*) et r pour arrière (*rear*)) désignent respectivement la distance entre les roues avant et arrières.

Pour déterminer les équations du mouvement, il suffit d'écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au point (G), considéré comme un point fixe dans le repère véhicule R_g . En négligeant le tangage et la suspension, les équations de la dynamique peuvent

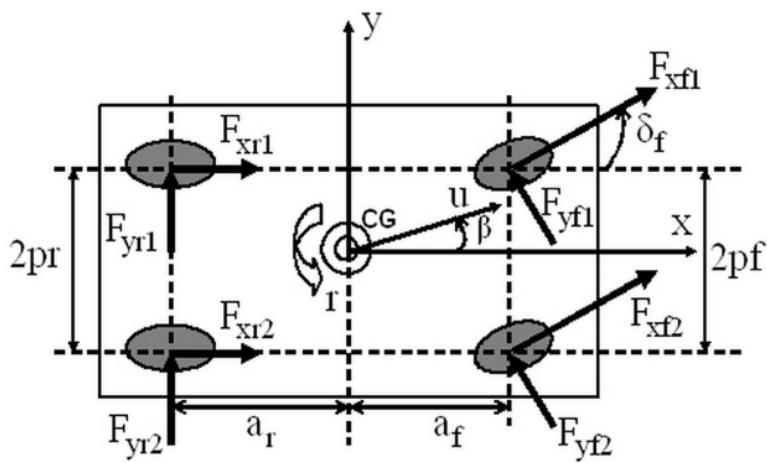


FIG. .10 – dynamique du châssis du véhicule

s'écrire de la manière suivante :

Mouvement longitudinal :

$$m(\dot{u} - vr) = (F_{xf1} + F_{xf2}) \cos(\delta_f) - (F_{yf1} + F_{yf2}) \sin(\delta_f) + (F_{xr1} + F_{xr2}) \quad (1)$$

Mouvement latéral :

$$m(\dot{v} + vr) = (F_{xf1} + F_{xf2}) \sin(\delta_f) + (F_{yf1} + F_{yf2}) \cos(\delta_f) + (F_{yr1} + F_{yr2}) \quad (2)$$

Mouvement du lacet :

$$\begin{aligned} I_z \dot{r} = & a_f (F_{xf1} + F_{xf2}) \sin(\delta_f) + a_f (F_{yf1} + F_{yf2}) \cos(\delta_f) - a_r (F_{yr1} + F_{yr2}) \\ & + p_f (F_{xf2} - F_{xf1}) \cos(\delta_f) + p_r (F_{xr2} - F_{xr1}) \end{aligned} \quad (3)$$

Mouvement du roulis :

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{p} &= -m_s e (\vartheta - ur) + m_s g e \sin \phi + K_\phi \phi - C_\phi p \\ \dot{\phi} &= p \end{aligned} \quad (4)$$

Mouvement des roues :

$$\begin{aligned} I_w \dot{\omega}_{f1} &= -R_w F_{xf1} + T_{f1} \\ I_w \dot{\omega}_{f2} &= -R_w F_{xf2} + T_{f2} \\ I_w \dot{\omega}_{r1} &= -R_w F_{xr1} + T_{r1} \\ I_w \dot{\omega}_{r2} &= -R_w F_{xr2} + T_{r2} \end{aligned} \quad (5)$$

où T_i avec $i = f_1, f_2, r_1, r_2$ est la différence entre le couple d'accélération Td et le couple du freinage Td appliqué sur la roue i

$$T_i = Td_i - Tb_i$$

Ce type de modèle n'est cependant pas simple à utiliser en pratique. Tout d'abord, il est nécessaire de connaître les couples moteurs et freineurs appliqués à chaque roue.

Ensuite, il nécessite la connaissance de la hauteur du centre de gravité et de la position de l'axe de roulis. Ceci n'est pas facile dans la mesure où le cas de charge du véhicule est un problème difficile. En effet, suivant la répartition des masses à l'intérieur du véhicule, toutes les dynamiques seront influencées, notamment celle du roulis.

V. Modèle dérive-lacet (bicyclette)

La dynamique latérale du véhicule est étudiée depuis les années 50. Segel a développé en 1956 un modèle à trois degrés de liberté pour décrire les mouvements latéraux de dérive et du lacet. La plupart des travaux précédents sur la dynamique latérale du véhicule ont utilisé le modèle 'bicyclette' qui ne prend en compte que les vitesses latérale et du lacet. Comme son nom l'indique, le modèle ne comporte que deux roues (figure 11). Le nombre de degrés de liberté considérés peut être différent selon l'application.

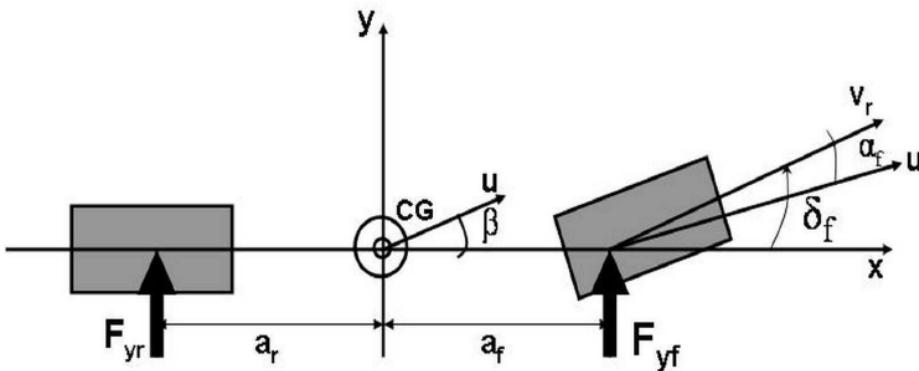


FIG. .11 – Modèle bicyclette

Structure et Hypothèses de modélisation

La modélisation nominale du comportement dynamique du véhicule doit prendre en compte la géométrie, la cinématique et la dynamique des liaisons. Pour cela, nous admettons un certain nombre d'hypothèses pour réduire la complexité tout en garantissant un certain degré de réalisme et d'efficacité de la modélisation.

- La vitesse longitudinale est constante ($\dot{x}(t) = u = cst$).
- Pas de mouvement de roulis, ni de tangage.

- L'angle de braquage (δ_f) est faible.
- L'angle du lacet entre le véhicule et la chaussée est faible.

Les hypothèses ci dessus nous permettent d'effectuer les simplifications suivantes :

$$\cos(\delta_f) = 1, \sin(\delta_f) = 0, \dot{p} = 0, \quad (6)$$

$$F_{xf1} = F_{xf2} = F_{xf}, \quad F_{xr1} = F_{xr2} = F_{xr}, \quad (7)$$

$$F_{yf1} = F_{yf2} = F_{yf}, \quad F_{yr1} = F_{yr2} = F_{yr}, \quad (8)$$

Des deux équations (2) et (3), on déduit les équations simplifiées de la dynamique latérale suivantes :

- Equation du mouvement latéral

$$m(v + ur) = (F_{yf1} + F_{yf2}) + (F_{yr1} + F_{yr2}) \quad (9)$$

$$= 2F_{yf} + 2F_{yr} \quad (10)$$

Le mouvement latéral du véhicule peut aussi être exprimé en fonction de l'angle de glissement latéral (β) en considérant l'approximation $\beta \approx \frac{v}{u}$. L'équation (9) devient :

$$\dot{\beta} = \frac{2F_{yf} + 2F_{yr}}{mu} - r \quad (11)$$

- Equation du mouvement du lacet

$$I_z \ddot{r} = 2a_f F_{yf} - 2a_r F_{yr} \quad (12)$$

Ce modèle est l'un des plus utilisés pour l'étude du comportement de la dynamique latérale des véhicules. Il permet, par exemple, d'étudier la stabilité du véhicule en virage selon le potentiel d'adhérence, l'état dans lequel se trouvent le système et la commande de braquage appliquée à la roue. L'objectif est alors de définir la loi de commande nécessaire à appliquer au véhicule pour rester dans la zone de stabilité. Avec ce modèle, la stratégie d'assistance consiste à ajouter un couple à celui délivré par le conducteur grâce à l'intégration d'un moteur à courant continu sur la colonne de direction.

La suspension automobile

1 Introduction

La plupart des machines mécaniques sont soumises à différents niveaux de vibrations provenant de sources variées. Les automobiles, comme toutes les machines mécaniques, n'échappent pas à ce phénomène et c'est pour cette raison que toutes les automobiles sont munies de suspensions. La suspension automobile a pour but de réduire et ultimement d'éliminer ces vibrations qui sont néfastes pour les passagers et pour le véhicule.

Le choix d'un modèle de suspension de véhicule dépend des mouvements auxquels on s'intéresse. Les principaux mouvements généralement pris en compte sont les déplacements verticaux, latéraux, longitudinaux, le roulis, le lacet et le tangage des différents éléments constituant le système de suspension du véhicule.

Le modèle le plus simple est le modèle dit quart de véhicule, qui ne prend pas en compte que le mouvement vertical de la caisse. Lorsqu'on s'intéresse au confort, on peut ne prendre en compte que le déplacement vertical de la caisse et pas celui de la roue. Ce modèle appelé modèle quart de véhicule à 1ddl. Si on plus, la tenue de route est étudiée, il convient de tenir compte aussi du mouvement vertical de la roue. Ce modèle, appelé modèle quart de véhicule à 2ddl.

Le mécanisme de suspension est composé des éléments suivants: ressort, amortisseur, barre antiroulis ainsi que les différents organes géométriques et structurels assurant la liaison verticale entre la roue et le châssis. Les véhicules automobiles sont équipés de ce dispositif pour isoler la structure principale du véhicule par rapport aux chocs et aux sollicitations générées par les irrégularités de la chaussée. De ce fait la suspension doit agir comme un filtre afin d'éliminer les fréquences de vibrations indésirables pour assurer la bonne tenue de route et le confort des passagers

Objectif de performance

La suspension d'un véhicule a pour rôle principale d'assurer le confort des passagers et la tenue de route du véhicule.

- **Confort**

La notion de confort est associée au bien-être des passagers dans le véhicule. Or le corps humain est sensible à l'accélération. En effet, à vitesse constante (accélération nulle) le corps humain ne ressent aucune force agissant sur lui.

Selon l'accélération à laquelle est soumis le passager, ce dernier peut ressentir des malaises. Par exemple, lorsque l'accélération varie à une certaine fréquence, des malaises, dus aux vibrations de certains organes du corps humain, peuvent être ressentis. Les différents organes ne vibrent pas tous à la même fréquence. De plus, l'allongement de la durée d'exposition aux vibrations augmente la sensibilité du corps humain.

La recherche du confort des passagers passera par la diminution des mouvements verticale et longitudinale.

- **Tenue de route**

La tenue de route caractérise la capacité du véhicule à adhérer à la route et donc à répondre aux sollicitations du conducteur. Effectivement, lorsque les roues adhèrent mal à la route, le conducteur contrôle difficilement son véhicule.

2 Les catégories de suspension

Suivant le type du système de suspension qu'on veut analyser et suivant l'objectif de l'analyse, la modélisation diffère. Dans un premier temps, et principalement lors de cette étude nous utilisons un modèle quart de véhicule à 2ddl. Ce modèle permet de saisir le comportement vertical principal de l'ensemble caisse-roue-pneu quel que soit le système de suspensions en question ou d'étude de performance.

Dans le cadre des suspensions classiques nous distinguons trois types: passif, semi-actif et actif.

- **La suspension passive:** (figure.1.2.a), est constituée par des composants mécaniques de stockage d'énergie (ressort) et de dissipation (amortisseur) invariants dans le temps.
- **La suspension semi-active:** (figure.1.2.b) quant à elle, est constituée par un ressort et un amortisseur contrôlés par un signal exogène. L'amortisseur ne peut

que dissiper de l'énergie dans une plage fréquentielle variant suivant le type d'actionneur semi-actif utilisé.

- **La suspension active:** (figure.1.2.c) est constituée seulement par un amortisseur actif à grande bande passante.

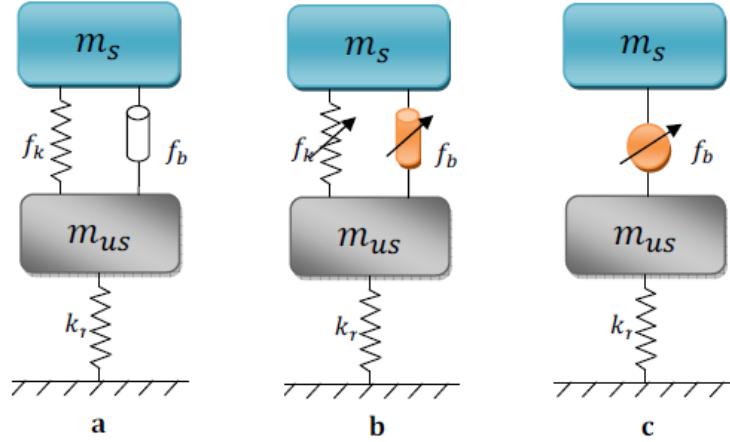


Figure 1.2: Différentes catégories de suspensions.

3 Modèle quart de véhicule

Différents modèles quart de véhicule peuvent être définis, selon le but recherché (confort seul ou confort et tenue de route) et selon le type (passif, semi-actif, actif) de suspension. Le modèle le plus simple est le modèle quart de véhicule à 2ddl. Il ne concerne que le mouvement vertical de la caisse de véhicule et de la roue.

3.1 Modèle quart de véhicule passif

On utilise un modèle de quart de véhicule avec deux degrés de liberté (ddl) comme illustré à la figure. 1.3. Dans ce cas nous présentons l'hypothèse d'un mouvement vertical du véhicule.

L'entrée du système est le mouvement vertical de la route sous le pneu. Le modèle est composé de deux masses distinctes. La masse non-suspendue m_u représente la masse du pneu, de la jante, du porte-moyeu et la moitié des bras de suspension. La masse suspendue m_s représente la masse du châssis supportée par la roue en question. Le pneu est modélisé par un ressort linéaire de constante K_t situé entre la masse non suspendue et la route. L'amortissement du pneu est considéré comme négligeable. La

suspension proprement dite est composée d'un ressort en parallèle avec un amortisseur linéaire de constantes k_s et b_c .

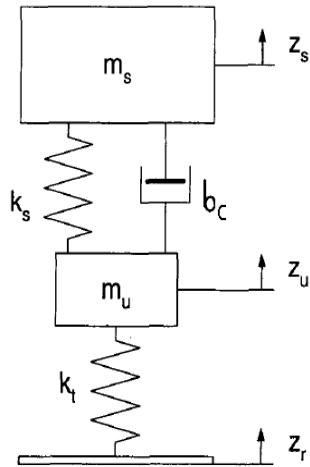


Figure 1.3: Le modèle quart de véhicule passif.

3.2 Modèle quart de véhicule actif

Ce modèle est semblable au modèle passif mais inclut un actionneur tel qu'ilustré à la figure. 1.4). L'actionneur applique une force u entre les masses suspendues et non suspendues.

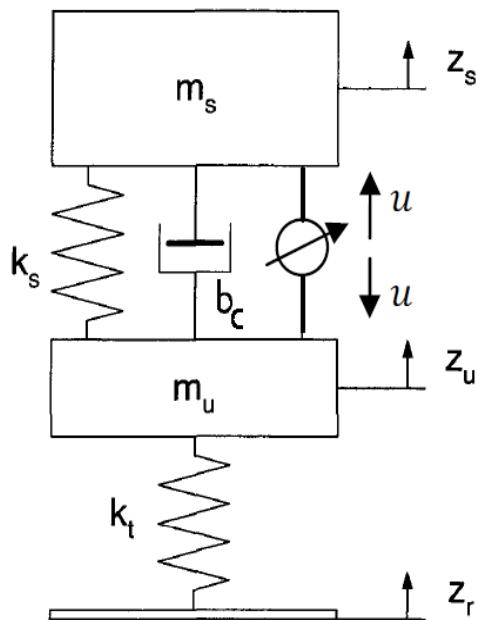


Figure 1.4: Le modèle quart de véhicule actif.

4 Modélisation quart de véhicule

L'application de la 2^{ème} loi de Newton sur le modèle quart de véhicule représenté dans la (figure.1.5), donne les équations du mouvement suivantes:

$$m\ddot{x} = \sum F_i$$

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_s &= -f_k - f_b + u \\ m_u \ddot{z}_u &= f_k + f_b - f_t - u \end{aligned}$$

f_k : Effort exercé par le ressort suspension.

f_b : Effort exercé par l'amortisseur.

f_t : Effort exercé par le pneu.

m_s : La masse suspendue (c.à.d. quart de la masse posée sur les suspensions).

m_u : La masse non suspendue (c.à.d. la masse des pièces mécaniques constituant l'assemblage de la roue).

z_s : Le déplacement vertical de m_s autour de sa position statique.

z_u : Le déplacement vertical de m_u autour de sa position statique.

z_r : Représente le profil vertical du sol.

u : La force générée par l'actionneur.

4.1 Cas linéaire

Si en considérant les ressorts et les amortisseurs sont linéaires, les forces (f_k , f_b , f_t) données par:

$$f_k = k_s (z_s - z_u)$$

$$f_b = b_c (\dot{z}_s - \dot{z}_u)$$

$$f_t = k_t (z_u - z_r)$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_s &= -k_s (z_s - z_u) - b_c (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + u \\ m_u \ddot{z}_u &= k_s (z_s - z_u) + b_c (\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_t (z_u - z_r) - u \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\ddot{z}_s &= \frac{1}{m_s} [-k_s(z_s - z_u) - b_c(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + u] \\ \ddot{z}_u &= \frac{1}{m_u} [k_s(z_s - z_u) + b_c(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_t(z_u - z_r) - u]\end{aligned}$$

Pour obtenir la représentation d'état de ce système on choisit les variables d'état comme suite:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_s \\ z_u \\ \dot{z}_s \\ \dot{z}_u \end{bmatrix}$$

concéderont z_r comme une entrée perturbatrice ($\omega = z_r$) et u comme une entrée de commande, le résultat est un système de quatre équations de la forme:

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u$$

avec les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_c}{m_s} & \frac{b_c}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{(k_s + k_t)}{m_u} & \frac{b_c}{m_u} & -\frac{b_c}{m_u} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}$$

4.2 Cas non linéaire

Considérant la non linéarité du ressort, les équations des forces devient:

$$\begin{aligned}f_k &= k_s(z_s - z_u) + p_s(z_s - z_u)^3 \\ f_b &= b_c(\dot{z}_s - \dot{z}_u)\end{aligned}$$

A partir de cette caractéristique (figure.1.6) on remarque que:

- La force élastique est définie par une raideur k_s , qui la rend directement proportionnelle à $(z_s - z_u)$, Il s'agit donc d'une force conservatrice, sa

représentation dans le diagramme (effort/déplacement) est une droite de pente k_s , passant par l'origine.

- Il existe un intervalle au voisinage du point d'équilibre 0, où le modèle non linéaire se rapproche du modèle linéaire.

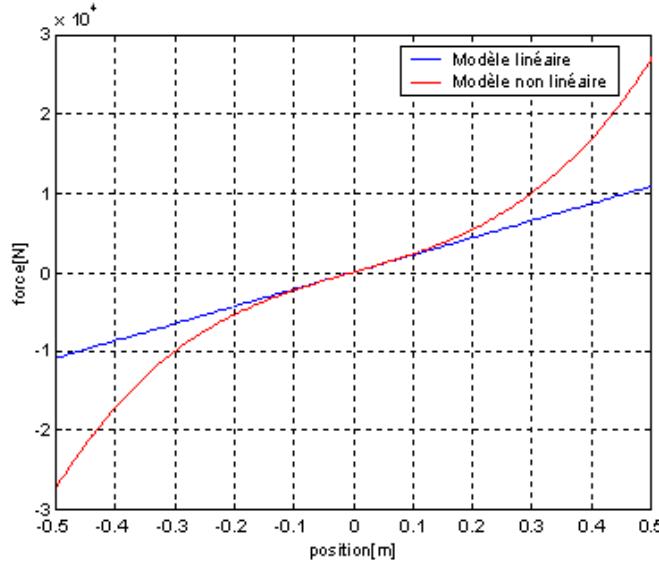


Figure 1.5: Les caractéristiques linéaire et non linéaire d'un ressort.

5 Modèle demi-véhicule

Le modèle demi-véhicule est utilisé pour prendre en compte, en plus des mouvements verticaux, les mouvements de roulis ou du tangage de la caisse. Ce modèle représente une vue de côté d'un véhicule.

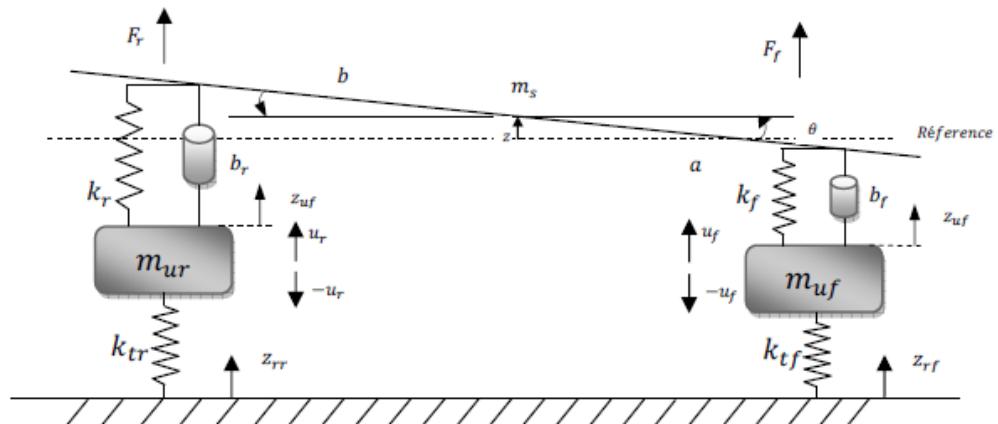


Figure 1.6: Modèle demi-véhicule.

5.1 Modèle linéaire

Le modèle linéaire est obtenu en considérant les caractéristiques linéaires de chaque composante de la suspension avant et arrière du modèle. La (figure 1.6) représente un modèle simplifié du type bicyclette dans lequel le mode tangage est inclus. Pour des petites variations de l'angle θ et par l'application de la 2^{ème} loi de Newton, les équations du mouvement sont données par:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_i \\ J\ddot{\theta} = \sum M_i \end{cases}$$

$$m_s \ddot{Z}_{sf} = m_s \ddot{z} - m_s a \ddot{\theta}$$

$$m_s \ddot{Z}_{sr} = m_s \ddot{z} + m_s b \ddot{\theta}$$

$$m_s \ddot{Z}_{sf} = F_f + F_r - m_s a \ddot{\theta}$$

$$m_s \ddot{Z}_{sr} = F_f + F_r + m_s b \ddot{\theta}$$

$$m_{uf} \ddot{Z}_{uf} = -F_f - f_{tf}$$

$$m_{ur} \ddot{Z}_{ur} = -F_r - f_{tr}$$

$$m_s \ddot{Z} = F_f + F_r$$

$$J\ddot{\theta} = -a \cdot F_f + b \cdot F_r$$

Pour les petites variations de θ

$$z_{sf} = z - a \sin \theta \approx z - a\theta$$

$$z_{sr} = z + b \sin \theta \approx z + b\theta$$

Les formules mathématiques des forces appliquées au masse suspendue sont données par:

$$F_f = -f_{kf} - f_{bf} + u_f$$

$$F_r = -f_{kr} - f_{br} + u_r$$

Si en considérant les ressorts et les amortisseurs sont linéaires, les forces (f_{kf} , f_{bf} , f_{kr} , f_{br} , f_{tf} , f_{tr}) données par:

$$f_{ki} = k_i (z_{si} - z_{ui})$$

$$f_{bi} = b_i (\dot{z}_{si} - \dot{z}_{ui}) \quad i = \{f, r\}$$

$$f_{ui} = k_{ui} (z_{ui} - z_n)$$

On remplace les forces f_{kf} , f_{kr} , f_{bf} , f_{br} , f_{tf} , f_{tr} dans l'équation (I.13), on obtient:

$$\begin{aligned}\ddot{Z}_{sf} &= -\alpha k_f (z_{sf} - z_{uf}) - \alpha b_f (\dot{z}_{sf} - \dot{z}_{uf}) + \beta k_r (z_{sr} - z_{ur}) + \beta b_r (\dot{z}_{sr} - \dot{z}_{ur}) + \alpha u_f - \beta u_r \\ \ddot{Z}_{sr} &= -\beta k_f (z_{sf} - z_{uf}) + \beta b_f (\dot{z}_{sf} - \dot{z}_{uf}) + \gamma k_r (z_{sr} - z_{ur}) - \gamma b_r (\dot{z}_{sr} - \dot{z}_{ur}) - \beta u_f \\ \ddot{Z}_{uf} &= k_f (z_{sf} - z_{uf}) + b_f (\dot{z}_{sf} - \dot{z}_{uf}) - k_{tf} (z_{uf} - z_{tf}) - \frac{1}{m_{uf}} u_f \\ \ddot{Z}_{ur} &= k_r (z_{sr} - z_{ur}) + b_r (\dot{z}_{sr} - \dot{z}_{ur}) - k_{tr} (z_{ur} - z_{rr}) - \frac{1}{m_{ur}} u_{ur} \\ \ddot{\theta} &= \frac{ak_f}{J} (z_{sf} - z_{uf}) + \frac{ab_f}{J} (\dot{z}_{sf} - \dot{z}_{uf}) - \frac{bk_r}{J} (z_{sr} - z_{ur}) - \frac{bb_r}{J} (\dot{z}_{sr} - \dot{z}_{ur}) - au_f + b_r\end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{m_s} + \frac{a^2}{J}, \quad \beta = \frac{1}{m_s} - \frac{ab}{J}, \quad \gamma = \frac{1}{m_s} + \frac{b^2}{J}$$

Pour obtenir la représentation d'état de ce système on choisit les variables d'état comme suite:

$$\begin{aligned}x &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8]^T \\ &= [(z_{sf} - z_{uf}) \quad z_{uf} \quad \dot{z}_{uf} \quad (z_{sr} - z_{ur}) \quad z_{ur} \quad \dot{z}_{ur} \quad \dot{z} \quad \dot{\theta}]^T\end{aligned}$$

avec:

$(z_{sf} - z_{uf})$: Débattement de la suspension côté avant.

z_{uf} : Déplacement de la masse non suspendue côté avant.

\dot{z}_{uf} : Vitesse de la masse non suspendue côté avant.

$(z_{sr} - z_{ur})$: Débattement de la suspension côté arrière.

z_{ur} : Déplacement de la masse non suspendue côté arrière.

\dot{z}_{ur} : Vitesse de la masse non suspendue côté arrière.

\dot{z} : Vitesse verticale de la caisse.

$\dot{\theta}$: Vitesse angulaire (tangage) de la caisse.

Et en concéderont que z_{if} et z_{ir} comme des entrées perturbatrices $(\omega = [\omega_f \quad \omega_r]^T = [z_{if} \quad z_{ir}]^T)$, u_f et u_r comme des entrées de commande $(u = [u_f \quad u_r]^T)$.

Le résultat est un système de huit équations:

$$\dot{x}_1 = -x_3 + x_7 - ax_8$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{k_f}{m_{uf}}x_1 - \frac{k_{if}}{m_{uf}}x_2 - \frac{b_f}{m_{uf}}x_3 + \frac{b_f}{m_{uf}}x_7 - \frac{ab_f}{m_{uf}}x_8 + \frac{k_{if}}{m_{uf}}\omega_f - \frac{1}{m_{uf}}u_f$$

$$\dot{x}_4 = -x_6 + x_7 - bx_8$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = \frac{k_r}{m_{ur}}x_4 - \frac{k_{tr}}{m_{ur}}x_5 - \frac{b_r}{m_{ur}}x_6 + \frac{b_r}{m_{ur}}x_7 + \frac{bb_r}{m_{ur}}x_8 + \frac{k_{tr}}{m_{ur}}\omega_r - \frac{1}{m_{ur}}u_r$$

$$\dot{x}_7 = -\frac{k_f}{m_s}x_1 + \frac{b_f}{m_s}x_3 - \frac{k_r}{m_s}x_4 + \frac{b_r}{m_s}x_6 - \frac{(b_f + b_r)}{m_s}x_7 + \frac{(ab_f - bb_r)}{m_s}x_8 + \frac{1}{m_s}u_f + \frac{1}{m_s}u_r$$

$$\dot{x}_8 = \frac{ak_f}{J}x_1 - \frac{ab_f}{J}x_3 - \frac{bk_r}{J}x_4 + \frac{bb_r}{J}x_6 + \frac{(ab_f - bb_r)}{J}x_7 - \frac{(b_f a^2 + b_r b^2)}{J}x_8 - \frac{a}{J}u_f + \frac{b}{J}u_r$$

La représentation d'état linéaire du modèle demi-véhicule est de la forme:

$$\dot{x} = Ax + B_1\omega + B_2u \quad (I.19)$$

avec les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_f}{m_{uf}} & -\frac{k_{tf}}{m_{uf}} & -\frac{b_f}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{b_f}{m_{uf}} & -\frac{ab_f}{m_{uf}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_r}{m_{ur}} & -\frac{k_{tr}}{m_{ur}} & -\frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{b_r}{m_{ur}} & \frac{bb_r}{m_{ur}} \\ -\frac{k_f}{m_s} & 0 & \frac{b_f}{m_s} & -\frac{k_r}{m_s} & 0 & \frac{b_r}{m_s} & -\frac{(b_f + b_r)}{m_s} & \frac{(ab_f - bb_r)}{m_s} \\ \frac{ak_f}{J} & 0 & -\frac{ab_f}{J} & -\frac{bk_r}{J} & 0 & \frac{bb_r}{J} & \frac{(ab_f - bb_r)}{J} & -\frac{(b_f a^2 + b_r b^2)}{J} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{tf}}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tr}}{m_{ur}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{m_{uf}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_s} & -\frac{a}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_{ur}} & \frac{1}{m_s} & \frac{b}{J} \end{bmatrix}^T$$

5.2 Modèle non linéaire

Si on considère cette fois ci la non linéarité du ressort, le modèle demi-véhicule peut être représenté par la forme suivante:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) + h(x(t))\omega(t)$$

Les forces verticales qui s'exercent sur les deux côtés avant et arrière, sont déjà données. où

f_k : Représente l'effort exercé par le ressort sur la masse m_s .

f_b : Représente l'effort exercé par l'amortisseur sur la masse m_u .

$$f_{ki} = k_i(z_{si} - z_{ui}) + p_{si}(z_{si} - z_{ui})^3, \quad i = \{f, r\}$$

$$f_{bi} = b_i(\dot{z}_{si} - \dot{z}_{ui})$$

Le système d'équation devient

$$\begin{aligned}
\ddot{Z}_{sf} &= \alpha(-f_{kf} - f_{bf} + u_f) + \beta(-f_{kr} - f_{br} + u_r) \\
\ddot{Z}_{sr} &= \beta(-f_{kf} - f_{bf} + u_f) + \gamma(-f_{kr} - f_{br} + u_r) \\
\ddot{Z}_{uf} &= \frac{1}{m_{uf}}(f_{kf} + f_{bf} - u_f - f_{tf}) \\
\ddot{Z}_{ur} &= \frac{1}{m_{ur}}(f_{kr} + f_{br} - u_r - f_{tr}) \\
\ddot{\theta} &= \frac{1}{J}(a(f_{kf} + f_{bf} - u_f) + b(-f_{kr} - f_{br} + u_r)) \\
\dot{z} &= (-f_{kf} - f_{bf} + u_f) + (-f_{kr} - f_{br} + u_r)
\end{aligned}$$

6 Modèle de véhicule complet

6.1 Introduction

Différents modèles peuvent être développés pour simuler le comportement de l'ensemble des suspensions du véhicule selon la complexité et le réalisme souhaités. Généralement, pour simplifier l'étude des suspensions, seuls les débattements verticaux des suspensions sont pris en compte et pas les débattements latéraux. Le modèle complet à 7ddl, présenté au paragraphe suivant, est le plus simple. Seuls le mouvement vertical, le roulis et le tangage sont pris en compte car ils engendrent directement un débattement vertical des suspensions.

Nous considérons dans notre cas ces trois mouvements de la caisse ainsi que le déplacement vertical de chacune des quatre roues.

Ce modèle peut être complété en tenant compte des 3 déplacements (vertical, latéral et longitudinal) et des 3 rotations (roulis, tangage et lacet) possible pour chaque élément. De nouvelles entrées sont alors à considérer notamment l'angle du volant, position de la pédale d'accélération et la pression sur la pédale de frein.

Il existe aussi des modèles plus réalistes des suspensions qui représentent les différents bras d'attache d'une suspension et l'inclinaison des amortisseurs et des ressorts qui diffèrents selon l'avant ou l'arrière du véhicule. De plus, on peut aussi compléter un modèle par l'ajout de la suspension du moteur et de celle des sièges des passagers. Cependant ces modèles deviennent rapidement très complexes à utiliser, à

cause des non linéarités, des couplages entre les différents mouvements et de la taille des systèmes étudiés.

6.2 Modèle linéaire

Nous considérons dans notre étude un modèle développé par Park et Kim (1998, 1999). Ce modèle complet de véhicule comprend trois mouvements (vertical (z_c), roulis (θ), tangage (ϕ) de la caisse et les déplacements verticaux (z_{ui}) de chacune des quatre roues indépendantes. Le châssis est supposé rigide. Chaque suspension relie une des quatre roues indépendantes à l'un des quatre coins du châssis. Une suspension est constituée d'un ressort, d'un amortisseur et d'un actionneur (figure 1.7).

Deux barres antiroulis, placées à l'avant et à l'arrière, servent à réduire l'angle de roulis de la caisse.

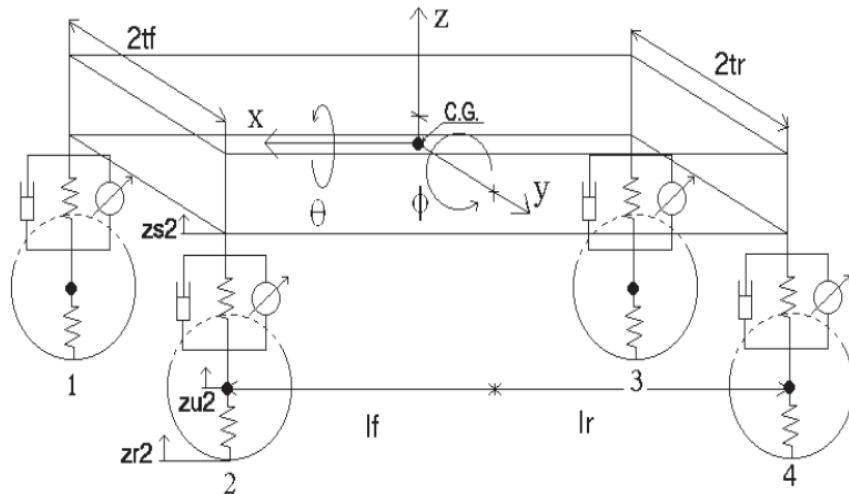


Figure 1.7: Modèle de véhicule complet (Park et Kim).

Sous les hypothèses suivantes:

- Un châssis rigide.
- Des petits déplacements autour du point d'équilibre.

Le modèle proposé par Park et Kim est donné par:

$$\begin{cases} M_s \ddot{q} = TF_r + Tu \\ M_u \ddot{z}_u = -F_s - F_t - u \end{cases}$$

avec: $F_r = -F_{kr} - F_b$, $F_s = -F_{ks} - F_b$

On remplace dans:

$$\begin{cases} M_s \ddot{q} = T(-F_{kr} - F_b + u) \\ M_u \ddot{z}_u = F_{ks} + F_b - F_t - u \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

Dans le cas linéaire des ressorts et des amortisseur les forces (F_{kr} , F_{ks} , F_b , F_t) sont données par:

$$\begin{aligned} F_{kr} &= k_{sr}(z_s - z_u), \quad F_{ks} = k_{ss}(z_s - z_u) \\ F_b &= b_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u), \quad F_t = k_t(z_u - z_r) \\ \begin{cases} M_s \ddot{q} = T(k_{sr}(z_u - z_s) + b_s(\dot{z}_u - \dot{z}_s) + u) \\ M_u \ddot{z}_u = k_{ss}(z_s - z_u) + b_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_t(z_r - z_u) - u \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

avec:

$q = [z_c, \theta, \varphi]^T$: Le déplacement vertical, le roulis et le tangage du châssis.

$z_u = [z_{u1}, z_{u2}, z_{u3}, z_{u4}]^T$: Le déplacement vertical de chaque roue (ou masse non suspendue).

$z_s = [z_{s1}, z_{s2}, z_{s3}, z_{s4}]^T$: Déplacement vertical de chaque coin du châssis (ou masse suspendue).

$z_r = [z_{r1}, z_{r2}, z_{r3}, z_{r4}]^T$: Le profil de la route sous chaque roue.

$u = [u_{f1}, u_{f2}, u_{r3}, u_{r4}]^T$: Les forces produites par chaque actionneur.

Les matrices utilisées dans les équations (I.28) et (I.29) sont les suivantes:

$$M_s = \text{diag} [m_s, J_\theta, J_\varphi]^T, \quad M_u = d \text{ag} [m_f, m_f, m_r, m_r]^T;$$

$$B_s = d \text{ag} [b_f, b_f, b_r, b_r]^T;$$

$$k_{ss} = d \text{ag} [k_f, k_f, k_r, k_r]^T, \quad k_t = d \text{ag} [k_{tf}, k_{sf}, k_{tr}, k_{rr}]^T;$$

$$K_{sr} = \begin{pmatrix} k_f + r_f/2 & -r_f/2 & 0 & 0 \\ -r_f/2 & k_f + r_f/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_r + r_r/2 & -r_r/2 \\ 0 & 0 & -r_r/2 & k_r + r_r/2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -t_f & t_f & -t_r & t_r \\ -l_f & -l_f & l_r & l_r \end{pmatrix}$$

où les notations suivantes sont employées:

m_s : Masse suspendue.

m_f, m_r : Masse non suspendue avant et arrière.

J_θ, J_φ : Moment d'inertie de roulis et de tangage de la masse suspendue.

l_f, l_r : Distance de l'essieu avant et arrière au CdG (centre de gravité) du véhicule.

t_f, t_r : Demi voie avant et arrière à chaque quart du véhicule.

k_f, k_r : Raideur du ressort des suspensions avant et arrière.

r_f, r_r : Raideur de la barre anti roulis avant et arrière.

b_f, b_r : Coefficient d'amortissement des suspensions avant et arrière.

k_{tf}, k_{tr} : Raideur des pneus avant et arrière.

Les déplacements des quatre coins de la masse suspendue nécessaires pour calculer le débattement de chacune des quatre suspensions. Le vecteur q représente la position verticale du centre de gravité et les inclinaisons du châssis, le vecteur z_s représente la position de chaque coin de châssis. Le châssis étant supposé rigide, les vecteurs q et z_s sont reliés par l'équation suivante:

$$\begin{cases} z_{sf1} = z_c - t_f \sin(\theta) - l_f \sin(\varphi) \\ z_{sf2} = z_c + t_f \sin(\theta) - l_f \sin(\varphi) \\ z_{sr1} = z_c - t_r \sin(\theta) + l_r \sin(\varphi) \\ z_{sr2} = z_c + t_r \sin(\theta) + l_r \sin(\varphi) \end{cases}$$

Pour les petites déplacements des angles (θ, φ) , le système est linéarisée à l'ordre 1:

$$\begin{cases} z_{sf1} = z_c - t_f \theta - l_f \varphi \\ z_{sf2} = z_c + t_f \theta - l_f \varphi \\ z_{sr1} = z_c - t_r \theta + l_r \varphi \\ z_{sr2} = z_c + t_r \theta + l_r \varphi \end{cases} \Rightarrow z_s = \begin{pmatrix} z_{sf1} \\ z_{sf2} \\ z_{sr1} \\ z_{sr2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t_f & -l_f \\ 1 & t_f & -l_f \\ 1 & -t_r & l_r \\ 1 & t_r & l_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_c \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z_s = T^T q \quad (\text{I.31})$$

En remplaçant l'équation (I.31) dans l'équation (I.29), on obtient:

$$\begin{cases} M_s \ddot{q} = -TB_s T^T \dot{q} + TB_s \dot{z}_u - Tk_{sr} T^T q + Tk_{sr} z_u + Tu \\ M_u \ddot{z}_u = B_s T^T \dot{q} - B_s \dot{z}_u + k_{ss} T^T q - (k_{ss} + k_t) z_u + k_t z_r - u \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

La forme matricielle de ce système représente comme suite:

$$\begin{pmatrix} M_s & 0_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & M_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -TB_s T^T & TB_s \\ B_s T^T & -B_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{z}_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Tk_{sr} T^T & Tk_{sr} \\ k_{ss} T^T & -(k_{ss} + k_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ z_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 4} \\ k_t \end{pmatrix} z_r + \begin{pmatrix} T \\ -I_{4 \times 4} \end{pmatrix} u \quad (\text{I.33})$$

En notant $z = [q, z_u]^T$ et en remplaçant dans l'équation (I.33), on obtient:

$$M_z \ddot{z} = B_z \dot{z} + k_z z + k_r z_r + k_u u$$

avec:

$$M_z = \begin{pmatrix} M_s & 0_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & M_u \end{pmatrix}, \quad B_z = \begin{pmatrix} TB_s T^T & -TB_s \\ -B_s T^T & B_s \end{pmatrix};$$

$$K_z = \begin{pmatrix} Tk_{sr} T^T & -Tk_{sr} \\ -k_{ss} T^T & k_t + k_{ss} \end{pmatrix}, \quad K_r = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 4} \\ k_t \end{pmatrix}, \quad T_a = \begin{pmatrix} T \\ 0_{4 \times 4} \end{pmatrix};$$

Les équations peuvent être mises sous forme de la représentation d'état suivante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 \omega(t) + B_2 u(t)$$

avec: le vecteur d'état $x = [z \quad \dot{z}]^T$

où $x = (z_c \quad \theta \quad \varphi \quad z_{uf1} \quad z_{uf2} \quad z_{ur1} \quad z_{ur2} \quad \dot{z}_c \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi} \quad \dot{z}_{uf1} \quad \dot{z}_{uf2} \quad \dot{z}_{ur1} \quad \dot{z}_{ur2})^T$

et les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{7 \times 7} & I_{7 \times 7} \\ -M_z^{-1} k_z & -M_z^{-1} B_z \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0_{7 \times 4} \\ M_z^{-1} k_r \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0_{7 \times 4} \\ M_z^{-1} T_a \end{pmatrix}$$

6.3 Modèle non linéaire

La non linéarité du modèle de véhicule complet est due à la non linéarité du ressort et de l'amortisseur proposée par Ando et Suzuki. Dans le cas non linéaire du ressort les forces (F_{kr} , F_{ks} , F_b , F_t) sont données par:

$$F_{kr} = k_{sr} (z_s - z_u) \left(1 + 0.1 (z_s - z_u)^2 \right)$$

$$F_{ks} = k_{ss} (z_s - z_u) \left(1 + 0.1 (z_s - z_u)^2 \right)$$

$$F_b = b_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u)$$

$$F_t = k_s (z_u - z_r)$$

Le modèle proposé par Park et Kim qui représenté dans l'équation est donné par:

$$\begin{cases} M_s \ddot{q} = T (-F_{kr} - F_b + u) \\ M_u \ddot{z}_u = F_{ks} + F_b - F_t - u \end{cases}$$