

## Méthode du Plan de Phase

### 2.1 Introduction

La méthode du plan de phase est une méthode graphique qui permet d'étudier de façon qualitative le comportement des systèmes dynamiques de deuxième ordre décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = f_1(x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = f_2(x) \end{cases}$$

où  $x_1$  et  $x_2$  sont les états du système,  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont des fonctions non linéaires quelconques. La méthode du plan de phase a pour but d'analyser le comportement de ce système sans résoudre l'équation différentielle le régissant.

#### 2.1.1 Plan de phase

Le plan de phase c'est le plan qui a  $x_1$  et  $x_2$  comme coordonnées ( $x_1$  selon l'axe horizontal,  $x_2$  selon l'axe vertical).

#### 2.1.2 Trajectoire de phase

Soit  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  la solution du système d'ordre 2 pour des conditions initiales  $x_0 = (x_1(0), x_2(0))$ . Quand  $t$  varie de 0 à l'infini, la solution  $x(t)$  peut être représentée par une courbe dans le plan de phase. Cette courbe est appelée une trajectoire de phase ou une orbite.

#### 2.1.3 Portrait de phase

Le portrait de phase est obtenu en considérant l'ensemble des trajectoires de phase.

#### 2.1.4 Exemple

Considérons le système linéaire :  $\dot{x}_1 = x_2$  et  $\dot{x}_2 = -x_1$ . Pour une condition initiale  $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ , la solution est donnée par :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} \cos(t) + x_{20} \sin(t) \\ x_2(t) = -x_{10} \sin(t) + x_{20} \cos(t) \end{cases} \text{ . Ce qui conduit à une équation}$$

de la trajectoire dans le plan de phase  $x_1^2 + x_2^2 = x_{10}^2 + x_{20}^2$ , qui est l'équation d'un cercle de centre  $(0,0)$  et de rayon  $\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}$ .

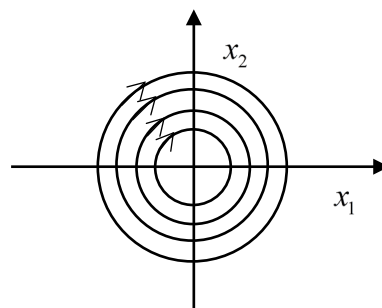


Figure 2.1 : Trajectoires dans le plan de phase

### 2.2 Points singuliers

Les points singuliers sont les points d'équilibre dans le plan de phase. On obtient les points

d'équilibre par la résolution des équations algébriques suivantes :  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$

Les points d'équilibre d'un système du second ordre sont appelés points singuliers car la

pente  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$  n'est pas définie en ces points.

**Exemple :** Soit le système régi par l'équation différentielle :  $\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$ , et qui peut être écrite sous la forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.6x_2 - 3x_1 - x_1^2 \end{cases}$$

Les points d'équilibres sont obtenus par la résolution des équations :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -0.6x_2 - 3x_1 - x_1^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(3+x_1) = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \text{ soit deux points d'équilibre à } (0,0) \text{ et } (-3,0).$$

### 2.3 Construction pratique des trajectoires de phase

Il existe plusieurs méthodes pour la construction et le tracé des trajectoires dans le plan de phase.

Parmi ces méthodes, on trouve :

- Méthode analytique
- Méthode du graphe des pentes
- Méthode des isoclines

#### 2.3.1 Méthode analytique

Il existe deux méthodes pour générer analytiquement les trajectoires de phase.

##### Élimination du temps explicitement

Lorsque le système est relativement simple, on peut déterminer la solution analytique du système  $x_1(t) = g_1(t)$  et  $x_2(t) = g_2(t)$ . Ensuite, par élimination de la variable temps de ces deux équations, on obtient la trajectoire dans le plan de phase  $g(x_1, x_2) = 0$ .

##### Élimination du temps implicitement

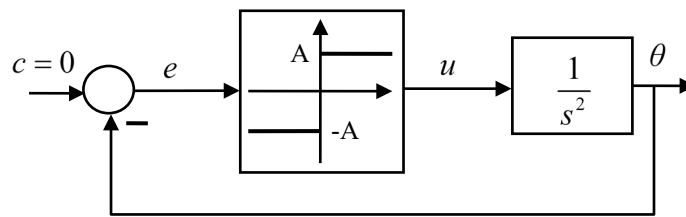
Dans ce cas, on élimine directement le temps en posant :  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$ , puis on cherche la solution à cette équation différentielle pour obtenir la trajectoire dans le plan de phase  $g(x_1, x_2) = 0$ .

**Exemple 1 :** Considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2} \Rightarrow x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0 \Rightarrow \int x_1 dx_1 + \int x_2 dx_2 = C^{te}.$$

Ce qui donne :  $x_1^2 + x_2^2 = 2C^{te} = x_{10}^2 + x_{20}^2$ , qui est l'équation d'un cercle de centre  $(0,0)$  et de rayon  $\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2}$ .

**Exemple 2 :** Considérons l'asservissement non linéaire suivant :



**Figure 2.2 :** Asservissement non linéaire

Ce système asservi peut être décrit par l'équation différentielle suivante :  $\ddot{\theta} = u$  où  $u = A \text{sgn}(e)$  et  $e = -\theta$ . Si on choisit  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = \dot{\theta}$ , on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \text{ avec } u = \begin{cases} +A, & \text{si } x_1 < 0 \\ -A, & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}; \text{ } x_1 = 0 \text{ est appelé droite de commutation.}$$

##### Élimination du temps explicitement :

1<sup>er</sup> cas :  $u = +A$ , c'est-à-dire  $x_1 < 0$ .

Le système est régi par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2(t) = At + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = At + x_{20} \\ x_2(t) = At + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}At^2 + x_{20}t + x_{10} \\ x_2(t) = At + x_{20} \end{cases}$$

On a  $t = \frac{x_2 - x_{20}}{A}$  ce qui conduit à une équation de la trajectoire dans le plan de phase :

$$x_1 = \frac{1}{2A}x_2^2 + \frac{C_1}{2A} \text{ avec } C_1 = (2Ax_{10} - x_{20}^2) < 0.$$

2<sup>ème</sup> cas :  $u = -A$ , c'est-à-dire  $x_1 > 0$ .

Le système est régi par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2(t) = -At + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -At + x_{20} \\ x_2(t) = -At + x_{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2}At^2 + x_{20}t + x_{10} \\ x_2(t) = -At + x_{20} \end{cases}$$

On a  $t = -\frac{x_2 - x_{20}}{A}$  ce qui conduit à une équation de la trajectoire dans le plan de phase :

$$x_1 = -\frac{1}{2A}x_2^2 + \frac{C_2}{2A} \text{ avec } C_2 = (2Ax_{10} + x_{20}^2) > 0.$$

### ***Elimination du temps implicitement***

1<sup>er</sup> cas :  $u = +A$ , c'est-à-dire  $x_1 < 0$ .

Le système est régi par :  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{A}{x_2} \Rightarrow Adx_1 - x_2dx_2 = 0 \Rightarrow \int Adx_1 - \int x_2dx_2 = C^{te}$

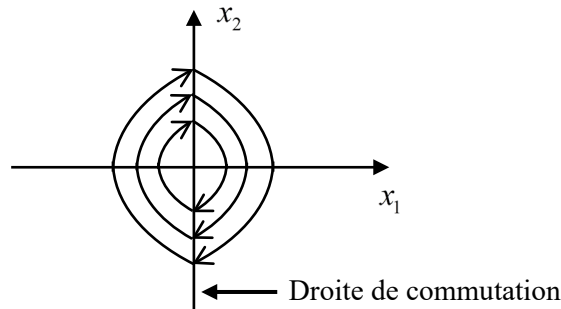
On obtient alors l'équation d'une parabole :  $2Ax_1 - x_2^2 = C_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2A}x_2^2 + \frac{C_1}{2A}$ , où  $C_1$  est une constante négative qui dépend des conditions initiales ( $C_1 = (2Ax_{10} - x_{20}^2) < 0$ ).

2<sup>ème</sup> cas :  $u = -A$ , c'est-à-dire  $x_1 > 0$ .

Il vient alors :  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -A \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-A}{x_2} \Rightarrow Adx_1 + x_2dx_2 = 0 \Rightarrow \int Adx_1 + \int x_2dx_2 = C^{te}$

On obtient alors l'équation d'une parabole :  $x_2^2 + 2Ax_1 = C_2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2A}x_2^2 + \frac{C_2}{2A}$ , où  $C_2$  est une constante positive qui dépend des conditions initiales ( $C_2 = (2Ax_{10} + x_{20}^2) > 0$ ).

Trajectoires de phase : En rassemblant les trajectoires des deux cas précédents (pour les deux approches), on obtient des trajectoires fermées représentées sur la figure suivante. On peut conclure que le système est marginalement stable.



**Figure 2.3** : Trajectoires dans le plan de phase de l'asservissement non linéaire

### 2.3.2 Méthode du graphe des pentes (champ de vecteurs, champ des directions)

Soit un système de deuxième ordre :  $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = f_1(x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = f_2(x) \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = f(x), f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$

Le vecteur  $f(x)$  est tangent au trajectoire de phase au point  $x = (x_1, x_2)$  car :  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ .

Alors, le vecteur  $f(x)$  représente la pente de la trajectoire de phase au point  $x$  et peut être vu et tracé comme un petit segment de droite orienté (vecteur) de  $x$  vers  $x + f(x)$ .

Le graphe des pentes est obtenu en évaluant  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  en certains points du plan de phase, puis en représentant un vecteur de  $x$  vers  $x + f(x)$ . Parfois, il est plus convenable de tracer des vecteurs de même longueur en tous points du plan de phase.

Pour tracer les trajectoires de phase du système, on choisit un point initial donné  $x_0$  et on trace la courbe qui passe au mieux par les différents vecteurs matérialisés sur le plan de phase.

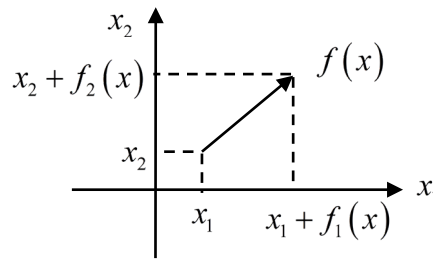


Figure 2.4 : Tracé du champ de vecteur  $f(x)$ .

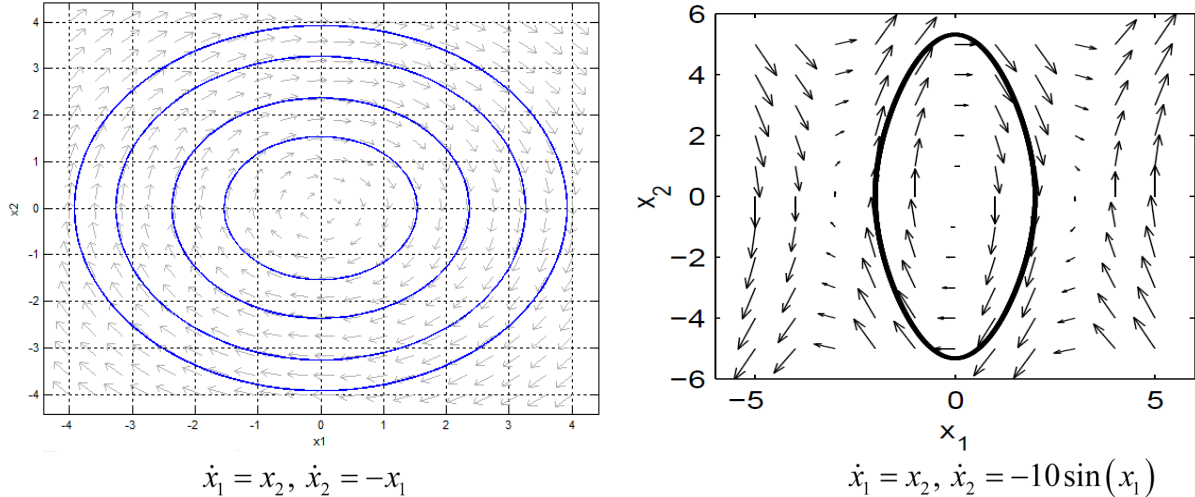


Figure 2.5 : Exemples de graphe des pentes (champ de directions).

### 2.3.3 Méthode des isoclines

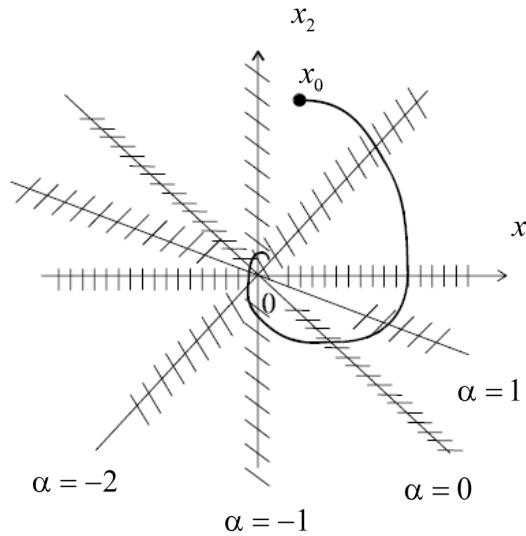
Considérons un système de deuxième ordre :  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ . La tangente à la trajectoire de phase passant par le point  $x = (x_1, x_2)$  a une pente donnée par :  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$ .

Le lieu des points pour lesquels la pente  $\frac{dx_2}{dx_1} = C^{te} = \alpha$  est une courbe appelée isocline.

On trace alors dans le plan de phase plusieurs isoclines correspondant à quelques valeurs de  $\alpha$  et on trace, en plusieurs points de l'isocline, des petits segments matérialisant la valeur de  $\alpha$ . Ainsi, on matérialise les tangentes des trajectoires aux points où elles coupent l'isocline. Pour tracer les trajectoires de phase du système, on choisit un point initial donné  $x_0$  et on trace la courbe qui passe au mieux par les différents segments matérialisés sur les isoclines.

**Exemple :** Considérons le système  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$

Alors :  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 - x_2}{x_2} = \alpha$  d'où il vient les isoclines :  $x_2 = -\frac{x_1}{1+\alpha}$ . Les isoclines de ce système sont donc des droites passant toutes par l'origine. Par exemple, pour  $\alpha = 1$ , on trace la droite d'équation  $x_2 = -0.5x_1$  et on la muni de petits segments de pente 1.



**Figure 2.6 :** Tracé des isoclines.

## 2.4 Plan de phase des systèmes linéaires d'ordre 2

Dans cette section, on étudie de façon qualitative le comportement des trajectoires des systèmes dynamiques linéaires du second ordre décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}, \text{ soit } \dot{x} = Ax, \quad x = (x_1, x_2), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On suppose que le système possède un point d'équilibre unique,  $x = 0$ , à l'origine du plan de phase. Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $A$  (obtenues en résolvant  $\det(\lambda I - A) = 0$ ).

Pour un système linéaire d'ordre 2, les conditions suivantes sont équivalentes :

- Le système possède un point d'équilibre isolé à  $x = 0$ .
- La matrice  $A$  est régulière (invertible), i.e.  $\det(A) \neq 0$ .
- Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $A$  (solutions de  $\det(\lambda I - A) = 0$ ) satisfont  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ .

La solution  $x(t)$  est donnée par :  $x(t) = \Phi(t)x(0)$ , où  $\Phi(t)$  est la matrice de transition qui peut être exprimée selon les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  comme suit :

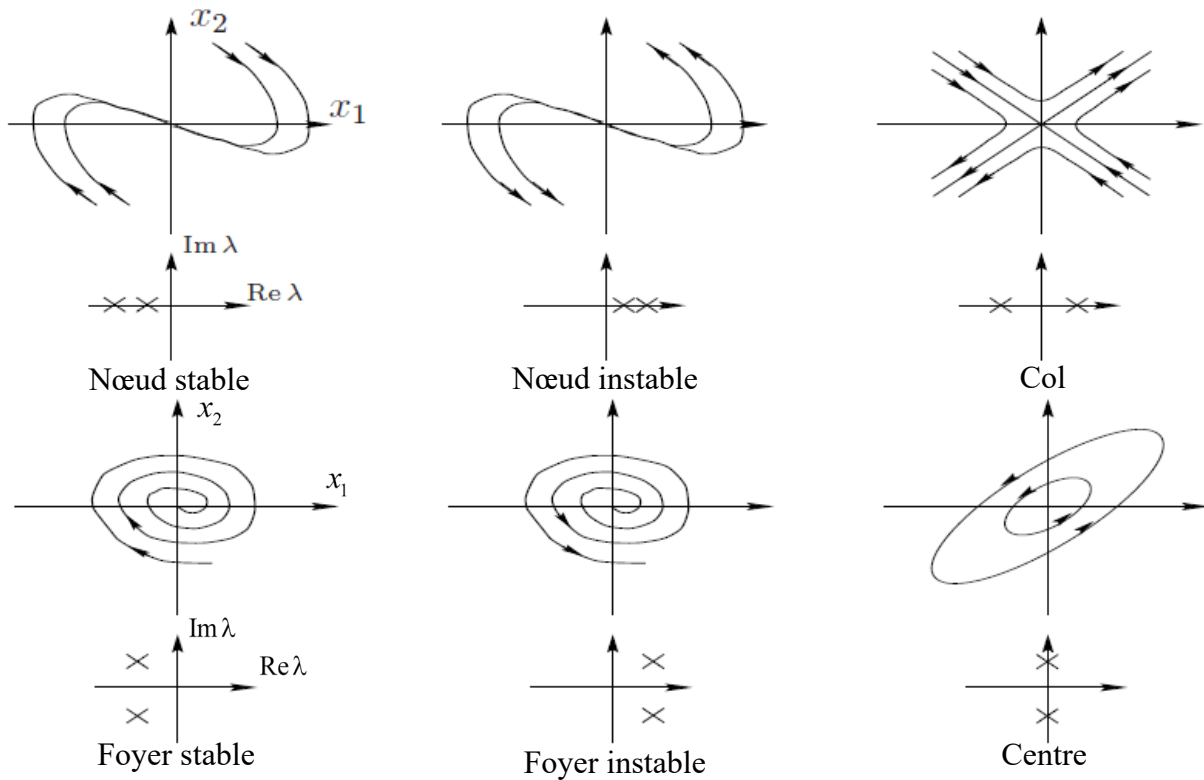
- Valeurs propres réelles distinctes :  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \Phi(t) = e^{\lambda_1 t} I + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I)$
- Valeur propre réelle double :  $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \Phi(t) = e^{\lambda_1 t} I + t e^{\lambda_1 t} (A - \lambda_1 I)$

– Valeurs propres complexes :  $\lambda_{1,2} = a \pm jb, b > 0 \Rightarrow \Phi(t) = e^{at} \left( \cos(bt)I + \frac{\sin(bt)}{b}(A - aI) \right)$

Alors, les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  déterminent les caractéristiques des trajectoires de phase et la nature du point d'équilibre. On distingue six cas :

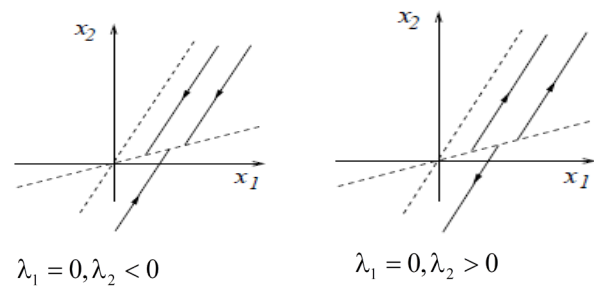
<i>Valeurs propres réelles</i>	Nœud stable	Nœud instable	Col
$\text{Im}(\lambda_i) = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
<i>Valeurs propres complexes</i>	Foyer stable	Foyer instable	Centre
$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$	$\text{Re}(\lambda_i) = 0$

La figure 2.7 présente l'allures des trajectoires de phase en fonction de la nature de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .



**Figure 2.7 :** Trajectoires de phase des systèmes linéaires d'ordre 2.

**Remarque :** Dans le cas où l'une des deux valeurs propres est nulle, l'équilibre n'est pas isolé et on a une droite de points d'équilibre et toutes les trajectoires sont rectilignes et convergent vers ou sont issues d'un point de cette droite d'équilibre.



**Figure 2.8 :** Trajectoires de phase dans le cas d'une valeur propre nulle.

## 2.5 Plan de phase des systèmes non linéaires d'ordre 2 – Comportement local

Les systèmes non linéaires peuvent présenter plusieurs points d'équilibre isolés distincts. Ceci implique que, contrairement au cas des systèmes linéaires, le comportement des trajectoires au voisinage d'un point d'équilibre gardera le plus souvent un caractère local et ne pourra nullement être étendu à l'ensemble du plan de phase. Alors, le comportement qualitatif des trajectoires d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre peut être identifié à celui d'un système linéaire.

Soit le système non linéaire :  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ , où  $f_1(x_1, x_2)$  et  $f_2(x_1, x_2)$  sont des fonctions non linéaires continuellement dérivables, et soit  $x_e = (x_{e1}, x_{e2})$  un point d'équilibre isolé de ce système. Le point d'équilibre  $x_e$  est dit isolé s'il existe un voisinage de  $x_e$  ne contenant aucun autre point d'équilibre.

En effectuant une linéarisation du système autour du point d'équilibre  $x_e$ , on obtient :

$$\dot{z} = Az \quad \text{où} \quad z = x - x_e \quad \text{et} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{x=x_e}.$$

Si les deux valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle non nulle, alors, le système non linéaire a le même type de point d'équilibre que le système linéaire  $\dot{z} = Az$ . On a alors les cas suivants :

<i>Valeurs propres réelles</i>	Nœud stable	Nœud instable	Col
$\text{Im}(\lambda_i) = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
<i>Valeurs propres complexes</i>	Foyer stable	Foyer instable	<b>Pas de conclusion</b>
$\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$	$\text{Re}(\lambda_i) = 0$

**Exemple 1 :** Soit le système non linéaire  $\dot{x}_1 = x_2$  et  $\dot{x}_2 = -\sin(x_1) - 0.5x_2$ , qui possède les points d'équilibre  $x_e = (n\pi, 0)$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

La matrice Jacobienne est :  $A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -0.5 \end{pmatrix} \Big|_{x=x_e}$ .

– Pour  $x_e = (2k\pi, 0)$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$  avec les valeurs propres  $\lambda_{1,2} = -1/4 \pm j\sqrt{15}/4$ . Alors le point d'équilibre  $x_e = (2k\pi, 0)$  est un foyer stable.

– Pour  $x_e = ((2k+1)\pi, 0)$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$  avec les valeurs propres  $\lambda_1 = 0.78$  et  $\lambda_2 = -1.28$ .

Alors le point d'équilibre  $x_e = ((2k+1)\pi, 0)$  est un col.

**Exemple 2 :** Soit le système donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{cases}, \quad \mu \neq 0, \text{ qui a un point d'équilibre à } x = 0.$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} -\mu(3x_1^2 + x_2^2) & -(1 + 2\mu x_1 x_2) \\ (1 - 2\mu x_1 x_2) & -\mu(x_1^2 + 3x_2^2) \end{pmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec les valeurs propres } \lambda_{1,2} = \pm j.$$

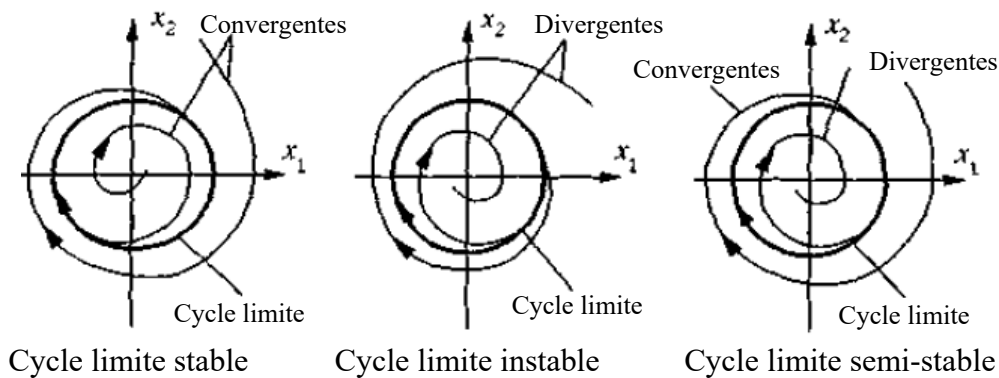
Dans ce cas, on ne peut pas conclure sur la nature du point d'équilibre  $x = 0$  du système non linéaire.

Si on présente le système en coordonnées polaires :  $x_1 = r \cos(\theta)$  et  $x_2 = r \sin(\theta)$ , on obtient la forme :  $\dot{r} = -\mu r^3$  et  $\dot{\theta} = 1$ . Alors, le point d'équilibre sera un foyer stable pour  $\mu > 0$ , et un foyer instable pour  $\mu < 0$ .

## 2.6 Cycles limites

Dans le plan de phase, un cycle limite est défini comme une trajectoire fermée et isolée. La trajectoire doit être fermée, indiquant la périodicité du mouvement, et isolée, indiquant la nature limite du cycle (les trajectoires dans un voisinage du cycle convergent ou divergent de lui). Il existe trois types de cycles limites :

- **Cycle limite stable** : Toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle convergent vers lui.
- **Cycle limite instable** : Toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle divergent de lui.
- **Cycle limite semi-stable** : Certaines trajectoires dans un voisinage du cycle convergent vers lui et les autres divergent de lui.



**Figure 2.8** : Cycles limites stable, instable et semi-stable.

### 2.6.1 Existence de cycles limites

**Théorème de Poincaré** : Soit  $N$  le nombre de nœuds, centres et de foyers encerclés par un cycle limite, et soit  $S$  le nombre de cols encerclés par un cycle limite. Si un cycle limite existe, les points d'équilibre que le cycle limite encercle sont tels que :  $N = S + 1$ .

**Remarque** : Un cycle limite encercle toujours aux moins un point d'équilibre. S'il y a un seul point d'équilibre encerclé, ce point d'équilibre ne peut pas être un col.

**Théorème de Bendixon** : Pour le système plan :  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ , aucun cycle limite ne peut exister dans une région  $\Omega$  du plan de phase dans laquelle  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  n'est pas

nul dans aucune sous région de  $\Omega$  et ne change pas de signe dans  $\Omega$ .

**Théorème de Poincaré-Bendixon** : Si une trajectoire demeure dans une région finie  $\Omega$  alors une des trois propositions suivantes est vraie :

- La trajectoire tend vers un point d'équilibre.
- La trajectoire tend asymptotiquement vers un cycle limite.
- La trajectoire est elle même un cycle limite.

Autrement dit, un système d'ordre 2 ne peut pas pour admettre comme solutions des trajectoires chaotiques.

**Remarque** : Pour étudier l'existence et la stabilité des cycles limites, il est souvent préférable de réécrire le système dynamique dans les coordonnées polaires :  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  et



$\tan(\theta) = x_2/x_1$ . Les relations inverses sont :  $x_1 = r \cos(\theta)$  et  $x_2 = r \sin(\theta)$ .

**Exemple 1 :** Soit le système donné par :  $\dot{x}_1 = -x_2 + 4x_1x_2^2$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 + 4x_1^2x_2$ .

$\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = 4(x_1^2 + x_2^2) > 0, \forall x \neq 0$ , Alors, il n'y a pas de cycle limite. ( $x = 0$  n'est pas une sous-région)

**Exemple 2 :** Soit le système donné par :  $\dot{x}_1 = -x_2$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 + x_1^2x_2$ .

$\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = 4 + x_1^2 > 0, \forall x$ , Alors, il n'y a pas de cycle limite.

**Exemple 3 :** Soit le système donné par :  $\dot{x}_1 = x_2 \cos(x_1)$ ,  $\dot{x}_2 = \sin(x_1)$ . Points d'équilibre à  $x_e = (n\pi, 0), n \in \mathbb{Z}$ . La linéarisation autour du point d'équilibre donne :

$A = \left( \begin{array}{cc} -x_2 \sin(x_1) & \cos(x_1) \\ \cos(x_1) & 0 \end{array} \right) \Big|_{x=x_e}$ . Pour  $n$  pair :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  avec les valeurs propres  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ .

Pour  $n$  impair :  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  avec les valeurs propres  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Les points d'équilibres sont donc des cols. Alors, il n'y a pas de cycle limite (théorème de Poincaré).

**Exemple 4 :** Soit le système donné par :

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

En coordonnées polaires, le système s'écrit :  $\dot{r} = r(1 - r^2)$  et

$\dot{\theta} = -1$ . Comme points d'équilibre, on obtient :  $r = 0$

(c'est un point) et  $r = 1$  (c'est un cercle).  $\dot{\theta} = -1$  indique

que les trajectoires sont orientés dans le sens des aiguilles d'une montre. Alors, on a une solution périodique fermée.

Notons que pour  $r > 1$ ,  $\dot{r} < 0$  ( $r$  diminue) et pour  $r < 1$ ,  $\dot{r} > 0$  ( $r$  augmente).

Alors, toutes les trajectoires convergent vers une solution périodique, d'où l'existence d'un cycle limite stable (cercle de rayon 1 et de centre à l'origine). Dans ce cas, l'origine est un point d'équilibre instable.

**Exemple 5 :** Soit le système donné par :

$$\dot{r} = r(1+r)(r-1) \text{ et } \dot{\theta} = 1.$$

Comme points d'équilibre, on obtient :  $r = 0$  (c'est un point) et  $r = 1$  (c'est un cercle).

Alors, on a une solution périodique fermée. Notons que

pour  $r > 1$ ,  $\dot{r} > 0$  ( $r$  augmente) et pour  $r < 1$ ,  $\dot{r} < 0$  ( $r$  diminue).

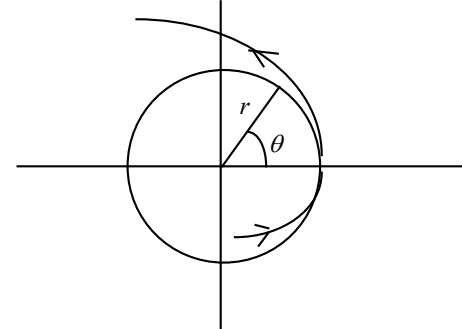
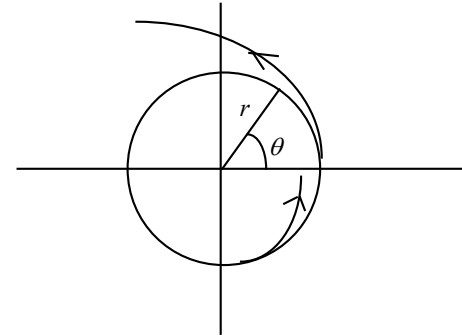
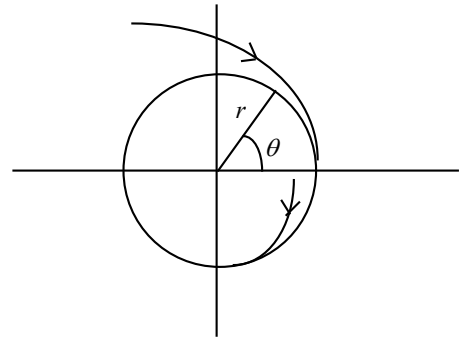
Alors, toutes les trajectoires divergent de la solution périodique, d'où l'existence d'un cycle limite instable (cercle de rayon 1 et de centre à l'origine). Dans ce cas, l'origine est un point d'équilibre stable.

**Exemple 6 :** Soit le système donné par :  $\dot{r} = r(1-r)^2$  et

$\dot{\theta} = 1$ . Points d'équilibre :  $r = 0$  et  $r = 1$ . Alors, on a une

solution périodique fermée. Notons que pour  $r > 1$ ,  $\dot{r} > 0$  ( $r$  augmente) et pour  $r < 1$ ,  $\dot{r} > 0$  ( $r$  augmente).

Alors, il existe un cycle limite semi-stable. Dans ce cas, l'origine est un point d'équilibre instable.



**TD1 # Méthode du plan de phase**

**Exercice 1 :** Pour les deux systèmes non linéaires suivants : 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1^2 + 3x_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2^2 + 3x_2 - x_1x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2x_1 - 2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1^2 \end{cases}$$

Trouver les points d'équilibres et déterminer le type (la nature) de chaque point d'équilibre.

**Exercice 2 :** Considérons un système donné par l'équation différentielle suivante :  $\ddot{y} + \dot{y} + y - \frac{y^3}{6} = 0$

- 1) Donner la forme d'état de ce système (on choisit  $x_1 = y$  et  $x_2 = \dot{y}$ ).
- 2) Trouver les points d'équilibre de ce système et déterminer la nature de chaque point d'équilibre.

**Exercice 3 :** Soit le système non linéaire : 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = e^{x_1} - x_2^2 \end{cases}$$

- 1) Trouver les points d'équilibre de ce système et déterminer la nature de chaque point d'équilibre.
- 2) Ce système possède-t-il de cycles limites ? Justifier votre réponse.

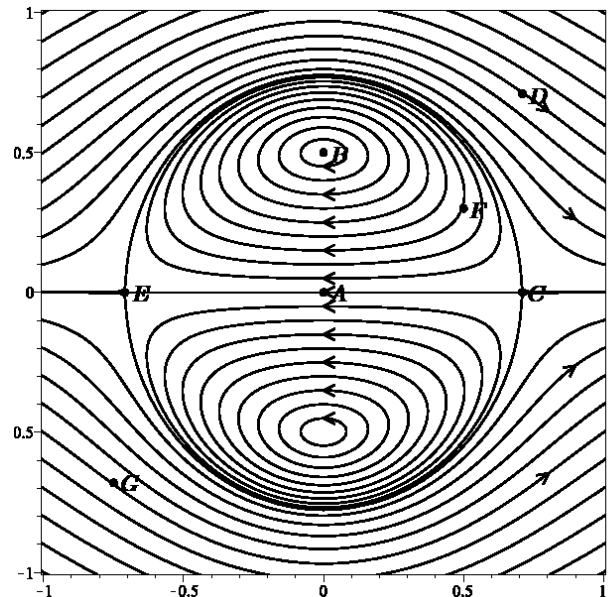
**Exercice 4 :** Déterminer les points d'équilibres et tracer le portrait de phase des systèmes suivants en utilisant la méthode analytique (méthode d'élimination du temps implicitement).

- 1)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{cases}$ ,      2)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$ ,      3)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$

**Exercice 5 :**

Soit le portrait de phase ci-contre. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer s'il est vrai ou faux (justifier).

- Le point  $A$  est un point d'équilibre.
- Le point  $B$  est un col.
- Si une solution  $(x_1, x_2) = C$  à  $t = 0$ , alors on aura  $(x_1, x_2) = E$  pour un temps  $t > 0$ .
- Au point  $D$ , on a  $\dot{x}_1 > 0$  et  $\dot{x}_2 > 0$ .
- Au point  $E$ , on a  $\dot{x}_1 = 0$  et  $\dot{x}_2 = 0$ .
- Si une solution  $(x_1, x_2) = F$  à  $t = 0$ , alors on aura  $(x_1, x_2) = F$  pour un temps  $t > 0$ .
- Si une solution  $(x_1, x_2) = G$  à  $t = 0$ , alors on aura  $(x_1, x_2) = G$  pour un temps  $t > 0$ .



**Exercice 6 :**

Montrer que ces systèmes n'ont pas de cycles limites

- 1)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = g(x_1) + ax_2 \end{cases}; a \neq 1$
- 2)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1e^{-x_1} \\ \dot{x}_2 = 1 + x_1 + x_2^2 \end{cases}$

**Exercice 7 :**

En utilisant les coordonnées polaires, étudier l'existence de cycles limites pour les systèmes :

- 1)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$

**Exercice 8 :**

Déterminer la nature des cycles limites (et des points d'équilibre) des systèmes non linéaires suivants donnés en coordonnées polaires :

- 1)  $\dot{r} = r(r-1)^2(3-r), \quad \dot{\theta} = -1$
- 2)  $\dot{r} = r(1-r)(r-2), \quad \dot{\theta} = 1$

## Partie 1 : Résolution des équations différentielles par ODE45

On cherche à résoudre un système d'équations différentielles ordinaires de la forme (modèle d'état d'un système) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \text{ avec les conditions initiales : } x_1(0) = x_{10}, \dots, x_n(0) = x_{n0}.$$

Rappelons que tout système ou équation différentielle d'ordre supérieur peut s'écrire sous cette forme (forme d'état).

Ces fonctions devront être programmées dans une fonction MATLAB (fichier fun.m dans notre cas) de la forme suivante :

```
function xp = fun(t, x)
xp = zeros(n,1)
xp(1) = une expression de x1, ..., xn et t
:
xp(n) = une expression de x1, ..., xn et t
```

Ensuite, pour résoudre cette équation différentielle, il faut appeler le solveur ODE45 et lui transmettre au minimum : le nom de la fonction, les bornes d'intégration ( $t_0$  et  $t_f$ ), et les conditions initiales  $x_0 = [x_{10} \dots x_{n0}]$ . La syntaxe de cette fonction Matlab ODE45 est donnée par :

$$[T, X] = \text{ode45}(@\text{fun}, [t_0, t_f], x_0)$$

$T$  : Vecteur contenant les instants auxquels la solution a été calculée

$X$  : Matrice de  $n$  colonnes où  $x_1 = X(:,1), \dots, x_n = X(:,n)$ .

- Pour tracer  $x_1(t)$  par exemple, utiliser :  $\text{plot}(T, X(:,1))$
- Pour tracer une trajectoire dans le plan de phase  $x_2 = g(x_1)$ , utiliser :  $\text{plot}(X(:,1), X(:,2))$

*Remarque : Les noms des programmes et des fonctions MATLAB peuvent être changés.*

Intégrer les équations différentielles suivantes en utilisant ode45 :

- 1).  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 2x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - 3x_2 \end{cases}$ ,  $x_1(0) = 2$ ,  $x_2(0) = 3$ , Tracer  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  en fonction du temps ( $t \in [0, 25]$ )  
 ). Tracer  $x_2(t)$  en fonction de  $x_1(t)$ .
- 2).  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + (1 + 0.5 \cos(x_1))u \end{cases}$ ,  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 1$ , Tracer  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  en fonction du temps ( $t \in [0, 25]$ ). Refaire la simulation pour  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0$ . On donne :

$$u = \frac{1}{1 + 0.5 \cos(x_1)} (x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) - \sin(t) + 10(\cos(t) - x_2) + 25(\sin(t) - x_1))$$

## Partie 2 : Résolution des équations différentielles dans SIMULIK

Utiliser SIMULIK pour simuler les deux équations différentielles précédentes.

### Partie 1 : L'oscillateur de Van der Pol et intégration temporelle

L'oscillateur de Van der Pol est un système non-linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre décrit par l'équation :

$$\ddot{x} + m(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

Donner la forme d'état de cet oscillateur en utilisant :  $x_1 = x$  et  $x_2 = \dot{x}$ .

- Trouver les points d'équilibres et déterminer le type (la nature) de chaque point d'équilibre.
- Intégrer l'équation différentielle obtenue à l'aide de la fonction `ode45()` de Matlab ( $t \in [0, 25]$ ).
- Pour chaque valeur de  $m \in \{-0.5, 0, 0.5\}$ , tracer l'évolution du système dans le plan de phase pour les conditions initiales  $x(0) = (0.5, 0)$  et  $x(0) = (3, 3)$ .

### Partie 2 : Méthode des isoclines

L'obtention du plan de phase d'un système peut aussi se faire à partir de la méthode des isoclines. Les isoclines sont l'ensemble des courbes où la pente des trajectoires est constante. On choisit alors

une pente constante  $a = \frac{dx_2}{dx_1}$  pour former avec l'équation de la dynamique  $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, m) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, m) \end{cases}$ , un

système d'équations que l'on résout pour  $x_2$ . L'expression obtenue :  $x_2 = h(x_1, a, m)$ , donne l'isocline de pente  $a$ .

- Calculez l'expression analytique  $x_2 = h(x_1, a, m)$ , prendre  $m = 0.5$ .
- On choisit pour  $a$  les valeurs  $a = [-4, -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 4]$ .
- Utiliser  $x_1 = \text{linspace}(-2.5, 2.5, 30)$  pour obtenir un vecteur de 30 valeurs entre -2.5 et 2.5.
- Pour chaque valeur  $a$  et pour chaque valeur de  $x_1$ , calculer  $x_2 = h(x_1, a, m)$ ,  $c = \cos(\text{atan}(a))$ ,  $s = \sin(\text{atan}(a))$ . Puis tracer le segment de droite de pente  $a$  entre les points  $(x_1 - d \times c, x_2 - d \times s)$  et  $(x_1 + d \times c, x_2 + d \times s)$  en utilisant l'instruction : `plot([x1-d*c x1+d*c], [x2-d*s x2+d*s])`,  $d = 0.1$  (segment de droite de centre  $(x_1, x_2)$ , de pente  $a$  et de longueur  $2d$ ). N'oublier pas d'utiliser l'instruction `hold on, axis([-2.5 2.5 -2.5 2.5])`.
- Pour chaque valeur de  $a$ , tracer sur la même figure l'isocline correspondante. Pour cela utiliser la commande de Matlab `fplot` (limiter l'axe x entre -2.5 et 2.5).
- Tracer sur la même figure la trajectoire de phase du système pour  $m = 0.5$  et  $x(0) = (0.5, 0)$ .

### Partie 3 : Méthode du graphe des pentes (champs des directions)

- Choisir  $m = 0.5$ .
- Utiliser  $x_1 = \text{linspace}(-2.5, 2.5, 20)$  pour obtenir un vecteur de 20 valeurs entre -2.5 et 2.5.
- Utiliser  $x_2 = \text{linspace}(-2.5, 2.5, 20)$  pour obtenir un vecteur de 20 valeurs entre -2.5 et 2.5.
- Pour chaque valeur de  $x_1$  et  $x_2$  calculer :  $f_1$ ,  $f_2$  et le facteur  $b = \frac{d}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$  (le facteur  $b$  est introduit pour avoir des segments de droite (des pentes) de même longueur  $d$ ). Puis, tracer le vecteur défini par les points  $(x_1, x_2)$  et  $(x_1 + f_1 \times b, x_2 + f_2 \times b)$  avec  $d = 0.2$ .  
 Utiliser: `quiver(x1, x2, f1*b, f2*b, 'MaxHeadSize', 1)`
- Tracer sur la même figure la trajectoire de phase du système pour  $m = 0.5$  et  $x(0) = (0.5, 0)$ .