Université Med Seddik Benyahia, Jijel – Faculté des Sciences et de la Technologie – Département d'Automatique
MASTER AS – E/S.LABIOD

TD1 # Méthode du plan de phase

Exercice 1 : Pour les deux systèmes non linéaires suivants : $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1^2 + 3x_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2^2 + 3x_2 - x_1x_2 \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2x_1 - 2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1^2 \end{cases}$

Trouver les points d'équilibres et déterminer le type (la nature) de chaque point d'équilibre.

Exercice 2 : Considérons un système donné par l'équation différentielle suivante : $\ddot{y} + \dot{y} + y - \dfrac{y^3}{6} = 0$

1) Donner la forme d'état de ce système (on choisit $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$).
2) Trouver les points d'équilibre de ce système et déterminer la nature de chaque point d'équilibre.

Exercice 3 : Soit le système non linéaire : $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = e^{x_1} - x_2^2 \end{cases}$

1) Trouver les points d'équilibre de ce système et déterminer la nature de chaque point d'équilibre.
2) Ce système possède-t-il de cycles limites ? Justifier votre réponse.

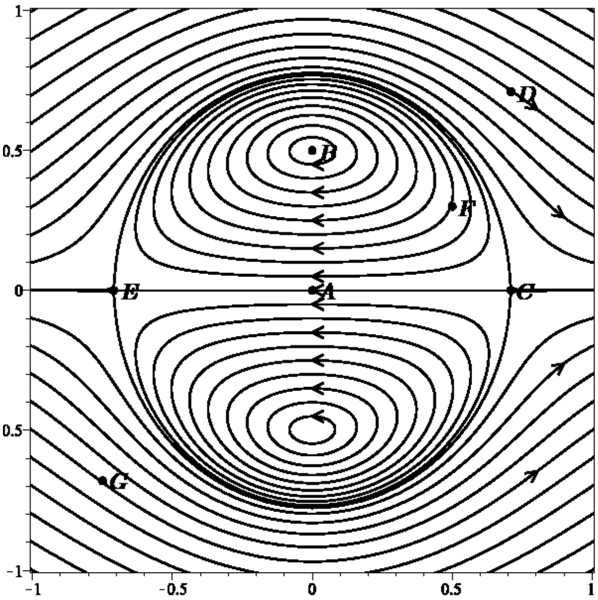
Exercice 4 : Déterminer les points d'équilibres et tracer le portrait de phase des systèmes suivants en utilisant la méthode analytique (méthode d'élimination du temps implicitement).

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$

Exercice 5 :

Soit le portrait de phase ci-contre. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer s'il est vari ou faux (justifier).

- Le point A est un point d'équilibre.
- Le point B est un col.
- Si une solution $(x_1, x_2) = C$ à $t = 0$, alors on aura $(x_1, x_2) = E$ pour un temps $t > 0$.
- Au point D, on a $\dot{x}_1 > 0$ et $\dot{x}_2 > 0$.
- Au point E, on a $\dot{x}_1 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$.
- Si une solution $(x_1, x_2) = F$ à $t = 0$, alors on aura $(x_1, x_2) = F$ pour un temps $t > 0$.
- Si une solution $(x_1, x_2) = G$ à $t = 0$, alors on aura $(x_1, x_2) = G$ pour un temps $t > 0$.



Exercice 6 :

Montrer que ces systèmes n'ont pas de cycles limites

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = g(x_1) + a\,x_2 \end{cases}$; $a \neq 1$ 2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1e^{-x_1} \\ \dot{x}_2 = 1 + x_1 + x_2^2 \end{cases}$

Exercice 7 :

En utilisant les coordonnées polaires, étudier l'existence de cycles limites pour les systèmes :

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \\ \dot{x}_2 = -x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{cases}$

Exercice 8 :

Déterminer la nature des cycles limites (et des points d'équilibre) des systèmes non linéaires suivants donnés en coordonnées polaires :

1) $\dot{r} = r(r-1)^2(3-r)$, $\dot{\theta} = -1$ 2) $\dot{r} = r(1-r)(r-2)$, $\dot{\theta} = 1$