Faculté des Sciences et de Technologie

Département : Génie Mécanique

Option : Master 1 construction Mécanique

Module : DDSA

CHAPITRE 3

Intitulé : Vibrations des systèmes continus

Temps alloué : 3 Semaines (cours + TD)

Responsable : H. BOUNIB

CHAP III : Vibrations des systèmes continus

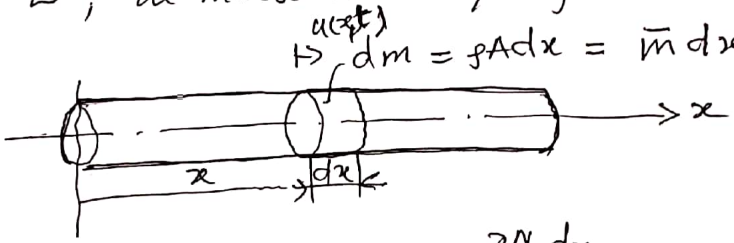
Dans ce chapitre on traite les systèmes (structures) simples à masse et élasticité réparties où une solution analytique est possible après intégration de l'équation de mvt. Ces structures simples sont : les cables, les barres, poutres, plaques, membranes..).

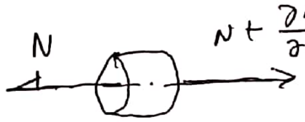
En exple on s'interesse aux cas des barres en vibrations longitudinales, les arbres en vibrations de torsion et les poutres en vibrations transversales.

1. Vibrations longitudinales des barres

Soit une barre prismatique de section constante A, de longueur L, de masse volumique ρ et de module d'Young E

$\mapsto dm = \rho A dx = \bar{m}\, dx$, $\bar{m}$: masse/unité de longueur





Soit $u(x)$ le déplacement de l'élément de masse dm de sa position d'équilibre x sous l'effet de la contrainte $\sigma(x)$ due à l'effort normal $N(x)$. On considère encore que l'élément a subi une déformation $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

à l'équilibre dynamique de l'élément on aura :

$$\Sigma F = dm\, \ddot{u} \longrightarrow x$$

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N = dm \cdot \ddot{u} \quad , \quad dm = \bar{m}\, dx$$

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad N = \sigma(x) \cdot A \ , \quad \sigma(x) = E \varepsilon_x$$

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

pour une barre prismatique $A(x) = A = ct$

d'où : $EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{m} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$(I) \quad \boxed{\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$ on pose $c^2 = \frac{E}{\rho}$

l'équation (I) est l'équation de propagation longitudinale de contrainte dans une barre, c est la vitesse de propagation

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (m/s)$$

- Intégration de l'équation de mvt (vibrations libres)

L'équation I est résolue par méthode des variables séparables

pour cela pose : $u(x,t) = X(x) \cdot f(t)$

d'où : $\ddot{u}(x,t) = \ddot{f}(t)\, X(x) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}\, X(x)$

$u''(x,t) = X''(x)\, f(t) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \cdot f(t)$

En substituant dans (I) on aura :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} X(x) = c^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \cdot f(t)$$

d'où : $\frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = c^2 \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\omega_n^2 = ct$

(Seule solution possible)

d'où : $\ddot{f}(t) + \omega_n^2 f(t) = 0 \quad (a)$

$X''(x) + \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (b)$

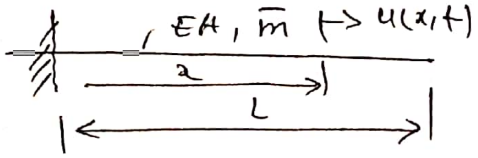
(a) a pour solution $f(t) = A \cos\omega_n t + B \sin\omega_n t$

(b) a " " $X(x) = C \cos\frac{\omega_n}{c}x + D \sin\frac{\omega_n}{c} x$

d'où $u(x,t) = f(t) \cdot X(x) = (A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t)\left(C\cos\frac{\omega_n}{c}x + D\sin\frac{\omega_n}{c}x\right)$

A, B, C et D sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et conditions aux limites.
(A, B) (C, D)

Exple. Déterminer l'équation de mvt d'une barre encastrée d'un coté.



Les conditions aux limites dans ce cas sont données par :

- à $x = 0$, $u(x,t) = 0$ (Encastrement)
- à $x = L$, $N = EA\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ (Extrémité libre non chargée)

$$u(0,t) = 0 = (A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t)\,C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 = (A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t)\, D\,\frac{\omega_n}{c}\cos\frac{\omega_n L}{c} = 0 \qquad (c)$$

L'équation (c) est justifiée si $\boxed{\cos\dfrac{\omega_n L}{c} = 0}$ (d)

L'équation (d) est appelée équation aux fréquences naturelles.

$$\cos\frac{\omega_n L}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n L}{c} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

d'où les pulsations naturelles :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{n\pi c}{2L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$\omega_{n_1} = \dfrac{\pi}{2L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ première pulsation naturelle (mode Fondamental)

$\omega_{n_2} = \dfrac{3\pi}{2L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ deuxième " , (Second mode)

$\omega_{n_3} = \dfrac{5\pi}{2L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ 3^{eme} mode

⋮

Les fonctions $X_n(x)$ associées à les pulsations naturelles sont appelées fonctions modales.

$$X_1(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}, \quad X_2(x) = \frac{3\pi x}{2L}, \quad X_3(x) = \frac{5\pi x}{2L}, \ldots$$

le déplacement $u_n(x,t)$ associé à un mode naturel ou propre est donné par :

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{2L}(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)$$

le déplacement $u(x,t)$ est donné par la combinaison de tous les modes

d'où : $$u(x,t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{2L}(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t).$$

Scanned with CamScanner

A_n et B_n sont déterminées en considérant les conditions initiales

$u_0 = u(x,0)$, $\dot{u}_0 = \dot{u}(x,0)$

$$u_0 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{2L} A_n$$

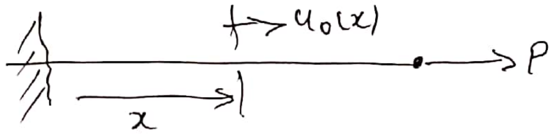
$$\dot{u}_0 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{2L} \omega_n B_n$$

En utilisant les séries de Fourier A_n et B_n sont données par:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}\,dx \quad , \quad B_n = \frac{2}{\omega_n L}\int_0^L \dot{u}_0(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}\,dx$$

$$B_n = \frac{2}{\frac{n\pi c}{2L}\cdot L}\int_0^L \dot{u}_0(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}\,dx = \frac{4}{n\pi c}\int_0^L \dot{u}_0(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}\,dx$$

- Supposant que l'extrémité libre est tirée par une force P à l'état initial puis la force est retirée, dans ce cas



$$u_0(x) = \varepsilon x = \frac{Px}{AE} = \frac{\sigma}{E}x \quad , \quad \dot{u}_0(x) = 0$$

alors ; $B_n = 0$, $A_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \varepsilon x \sin\frac{n\pi x}{2L}\,dx$ après

intégration par partie on aura :

$$A_n = \frac{8\varepsilon l}{n^2\pi^2}(-1)^{(n-1)/2}$$

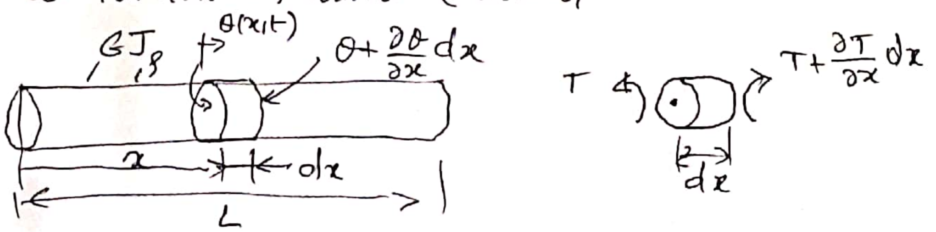
et le déplacement $u(x,t)$ est donné par :

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{2L}\cos\omega_n t$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{2L}\cos\frac{n\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,t}$$

$$\varepsilon = \frac{P}{AE}$$

2. Vibrations de Torsion des arbres (barres)



T : moment de torsion

Scanned with CamScanner

L'équation de propagation des contraintes de cisaillement dans barre longitudinale est obtenue à la manière de l'obtention de l'équation de propagation des contraintes longitudinales.

En considérant l'équilibre de l'élément dx on aura :

$$\Sigma M_t = \rho J\, dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \rho J\, dx . \ddot{\theta}$$

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T = \rho J\, dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad , \quad T = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

alors $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(GJ \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \rho J \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ pour une barre uniforme J est constant

d'où $GJ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho J \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$, $G \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$

alors :

$$\boxed{\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}} \quad \boxed{II} \qquad c^2 = \frac{G}{\rho}$$

c : vitesse de propagation des contraintes de cisaillement

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad , \quad G : \text{module de cisaillement}$$

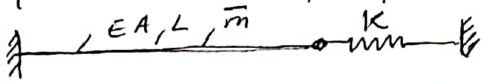
L'équation (II) est l'équation de propagation des contraintes de cisaillement dans une barre longitudinale.

Nota : - J : moment d'inertie polaire de la section A

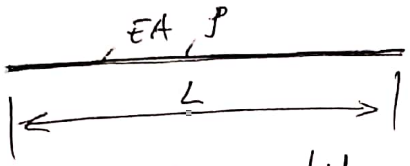
$$J = \frac{\pi d^4}{64} \quad , \quad I = \rho J : \text{moment d'inertie massique de l'élément } dx.$$

- Les problèmes de propagation des contraintes de cisaillement dans une barre longitudinale se traitent comme les problèmes de propagation des contraintes longitudinales (axiales) dans la barre longitudinale.

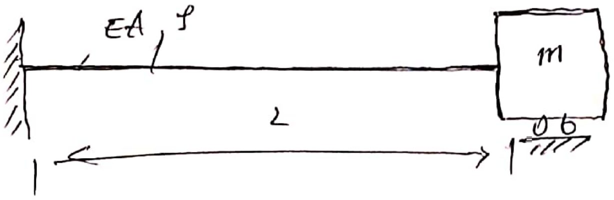
Exercices :

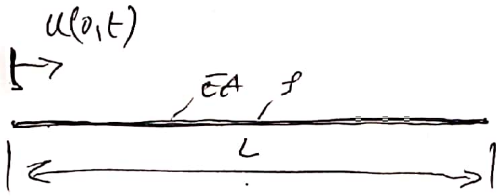
① Trouver les équations aux fréquences naturelles des barres suivantes : 

, $K = \frac{EA}{10L}$



Barre libre



② 

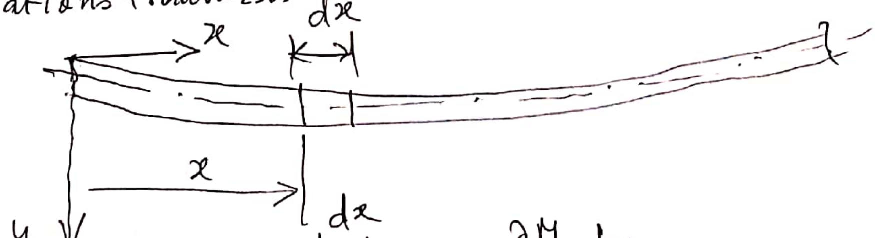
$u(0,t) = \lambda \sin \omega t$

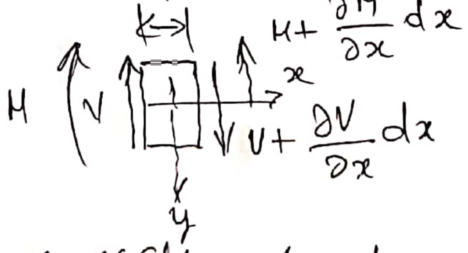
Trouver l'équation de déplacement.

3- Vibrations transversales des poutres

Dans ce point on considère les poutres suffisamment élancées, qui obéissent au modèle de BERNOULLI, par suite on néglige l'effet de cisaillement et l'inertie due à la rotation de la section.

Soit une poutre de section constante A de longueur L et de masse volumique ρ et de rigidité à la flexion EI en vibrations transversales.





à l'équilibre de l'élément dx on a :

$$\sum M = 0 \iff -V dx - M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx = 0 \implies V dx = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

ou :

$$\boxed{V = \frac{\partial M}{\partial x}}$$

$$\sum F_y = A\rho\, dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \iff N + \frac{\partial V}{\partial x} dx - V = A\rho\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

d'où :
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

d'après BERNOULLI :
$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

alors :
$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

I = et moment d'inertie de la Section A / $\vec{z}$

donc
$$\boxed{-EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \quad (III)$$

(III) Equation de vibrations transversales d'une poutre uniforme. libres.

- Solution de l'équation.

L'équation (III) et résolue par la méthode des variables séparables

pour cela on pose : $y(x,t) = Y(x) \cdot f(t)$

d'où :
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} Y(x)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} \cdot f(t)$$

En remplaçant dans l'équation (III) on aura :
$$\frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{EI}{\rho Y(x)} \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = -\omega_n^2$$

d'où :
$$\ddot{f}(t) + \omega_n^2 f(t) = 0 \quad (a)$$

$$Y''''(x) - \frac{A\rho\omega_n^2}{EI} Y(x) = 0 \quad (b) \qquad \text{on pose } \beta^4 = \frac{A\rho\,\omega_n^2}{EI} = \frac{\bar{m}\,\omega_n^2}{EI}$$

(a) $\rightarrow$ $f(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$

(b) $\rightarrow$ $Y(x) = c_1 \cosh\beta x + c_2 \sinh\beta x + c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x$

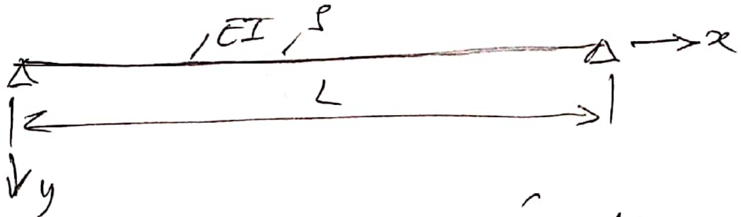
Le déplacement $y(x,t)$ est donné par :

$$y(x,t) = (A\cos\omega_n t + B_0 \sin\omega_n t)(c_1\cosh\beta x + c_2\sinh\beta x + c_3\cos\beta x + c_4\sin\beta x)$$

A et B dépendent des conditions initials

c_1, c_2, c_3 et c_4 dépendent des conditions aux limites.

Exemple : Déterminer l'equation aux fréquences naturelles de la poutre simplement appuyée



Le déplacement $y(x,t)$ est donné par l'équation ci-dessus.

Les conditions aux limites sont données par :

$$y(0,t) = 0 \ , \quad M(0,t) = -EI \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0$$

$$y(L,t) = 0 \ , \quad M(L,t) = -EI \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=L} = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} y(0,t) = 0 & \Rightarrow & c_1 + c_3 = 0 \\ M(0,t) = 0 & \Rightarrow & c_1 - c_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_3 = 0$$

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow c_2 \sinh\beta L + c_4 \sin\beta L = 0$$

$$M(L,t) = 0 \Rightarrow c_2 \sinh\beta L - c_4 \sin\beta L = 0$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} \sinh\beta L & \sin\beta L \\ \sinh\beta L & -\sin\beta L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_4 \end{Bmatrix} = 0$$

pour une solution non triviale ($c_2 = c_4 = 0$) le déterminant doit égal à zéro d'où :

$$\boxed{2\sinh\beta L \sin\beta L = 0}$$ Equation aux fréquences naturelles.

Puisque pour $\beta L \neq 0$, $\sinh\beta L > 0$ donc $\sin\beta L = 0 \Rightarrow$

$\beta L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots n\pi$ | $\beta^4 L^4 = n^4\pi^4 = \frac{\rho\omega_n^2}{EI} L^4 = n^4\pi^4$

Scanned with CamScanner

d'où $\omega_n^2 = n^4 \pi^4 \dfrac{EI}{\bar{m} L^4} \Rightarrow \omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\dfrac{EI}{\bar{m} L^4}}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

← pulsation naturelle.

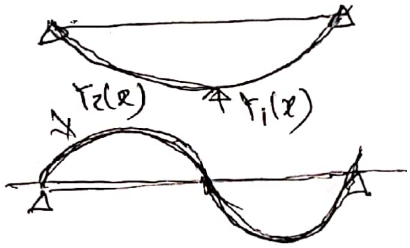
les fonctions modales (normales) associées sont déterminées après détermination des constantes c_2 et c_4.

pour $\beta L = n\pi$, $\sinh n\pi \neq 0$, $\sin n\pi = 0$, En remplaçant le système d'équation on aura $c_2 = 0$, $c_4 \neq 0$ $(c_4 = 1)$

d'où les fonctions modales : $Y_n(x) = \sin \dfrac{n\pi x}{L}$

1er mode : $\omega_{n_1} = \pi^2 \sqrt{\dfrac{EI}{\bar{m} L^4}}$, $Y_1(x) = \sin \dfrac{\pi x}{L}$

2e " : $\omega_{n_2} = 4\pi^2 \sqrt{\dfrac{EI}{\bar{m} L^4}}$, $Y_2(x) = \sin \dfrac{2\pi x}{L}$



⋮

En fin le déplacement $y(x,t)$ qui est la combinaison de toutes les contributions modales est donné par :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right)$$

constantes

A_n et B_n sont à déterminer des conditions initiales

$y_0(x) = y(x,0)$, $\dot{y}(x,0) = \dot{y}_0(x)$. Comme nous avons déjà vu dans le cas des barres.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad , \quad B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \dot{y}_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Exemple : Pour un état inial impulsif donné par :

$y_0(x) = 0$, $\dot{y}_0(x) = v_0$ on aura : $A_n = 0$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L v_0 \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} \dfrac{4 v_0}{\pi^3 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}\, n^3} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

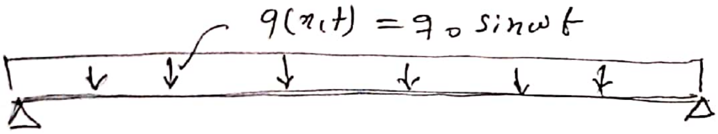
d'où $$y(x,t) = \frac{4 v_0}{\pi^3 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \left(n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}} \right) t$$

- Contrainte de flexion dans la poutre. Pour une poutre à section symétrique $\sigma(x,t) = \frac{M_f(x,t)\, h}{I}$ h : Demi hauteur de la section de la poutre

$$M_f(x) = -EI \frac{d^2 y(x,t)}{dx^2}, \quad \text{d'où : } \sigma(x,t) = -Eh \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

d'où : $$\sigma(x,t) = \frac{4\pi E h V_0}{\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}} \cdot L^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\left(n\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} L^4}}\right) t$$

- Vibrations forcées d'une poutre soumise à chargement réparti harmonique $q(x,t) = q_0 \sin\omega t$: Poutre simplement appuyée.



Dans ce cas l'équation d'équilibre dynamique est donnée par :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx = -\bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q_0 \sin\omega t \, dx$$

ou $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{q_0}{\bar{m}} \sin\omega t, \quad b^2 = \frac{EI}{\bar{m}}$$

la solution particulière dans ce cas est donnée par :

$y(x,t) = Y(x) \sin\omega t$. Par substitution dans l'éq d'équilibre on aura : $$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \frac{\omega^2}{b^2} Y = \frac{q_0}{\bar{m} b^2}$$ d'où :

$$Y(x) = c_1 \cosh\sqrt{\frac{\omega}{b}}\, x + c_2 \sinh\sqrt{\frac{\omega}{b}}\, x + c_3 \cos\sqrt{\frac{\omega}{b}}\, x + c_4 \sin\sqrt{\frac{\omega}{b}}\, x - \frac{q_0}{\bar{m}\omega^2}$$

En introduisant les conditions aux limites

$x = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$, $x = L$, $Y(L)$

$\left.\frac{d^2 Y}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{d^2 Y}{dx^2}\right|_{x=L} = 0$ on trouve

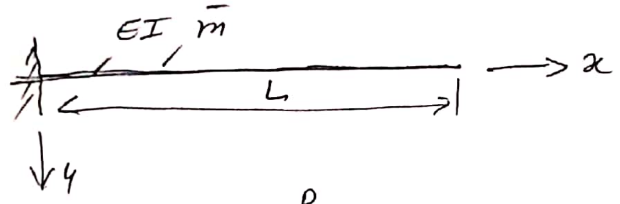
$$c_1 = c_3 = \frac{q_0}{2\bar{m}\omega^2}, \quad c_2 = -\frac{q_0}{2\bar{m}\omega^2} \tanh\sqrt{\frac{\omega}{b}} \frac{L}{2}, \quad c_4 = \frac{q_0}{2\bar{m}\omega^2} \tan\sqrt{\frac{\omega}{b}} \frac{L}{2}$$

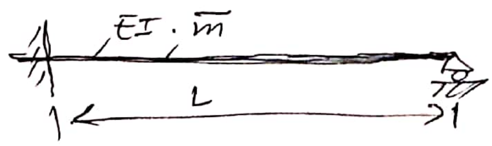
En régime établi $y(x,t)$ est donné par :

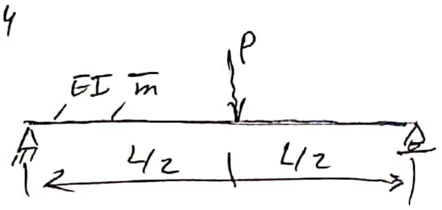
$$y(x,t) = \frac{q_0}{\bar{m}\omega^2}\left(\frac{\cos\sqrt{\frac{\omega}{b}}\left(\frac{L}{2} - x\right)}{2\cos\sqrt{\frac{\omega}{b}} \frac{L}{2}} + \frac{\cosh\sqrt{\frac{\omega}{b}}\,(L/2 - x)}{2\cosh\sqrt{\frac{\omega}{b}} \frac{L}{2}} - 1\right) \sin\omega t$$

On remarque que la résonance aura lieu quand $\sqrt{\frac{\omega}{b}}\,\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ..$
c'est à dire quand $\omega = n^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} = \omega_n \Leftarrow$ pulsation naturelle.

<u>Exercices :</u> Déterminer les équations aux fréquences naturelles des poutres suivantes:

- 

,


- 

Déterminer l'expression de la contrainte $\sigma(x,t)$ dans la poutre due à l'enlèvement soudain de la charge P.