REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DE SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

OPTION : ENERGETIQUE

Support de Cours (Ed. 2020)

Méthodes numériques

2ème Année génie mécanique

Sommaire

I.1. Généralités :

Dans ce chapitre, nous abordons quelques méthodes numériques qui permettent d'approcher une racine de F (x) sur un domaine donné (car il n'est pas, tout le temps, possible de trouver exactement la racine de F (x) recherchée). Néanmoins, nous pouvons, par des méthodes algébriques (graphiques) connaitre l'existence et le nombre de racines en les séparant.

Pour les différentes méthodes nous supposerons que F est une fonction continue et qu'il existe un intervalle [b a], où l'équation a une seule racine notée α.

Pour choisir l'intervalle [b a], on peut:

- utiliser la méthode graphique (tracer la courbe) et situer la solution d'où le choix de [b a]
- utiliser la méthode algébrique : la méthode de la séparation des racines en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

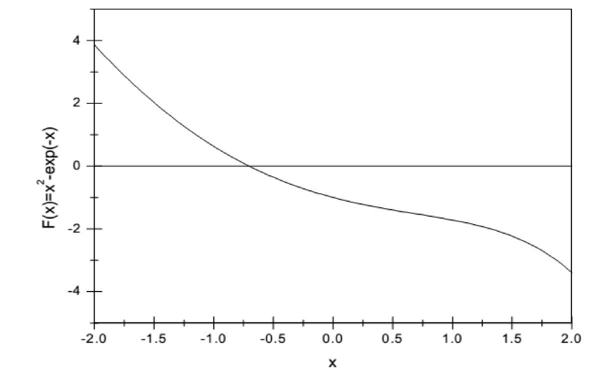
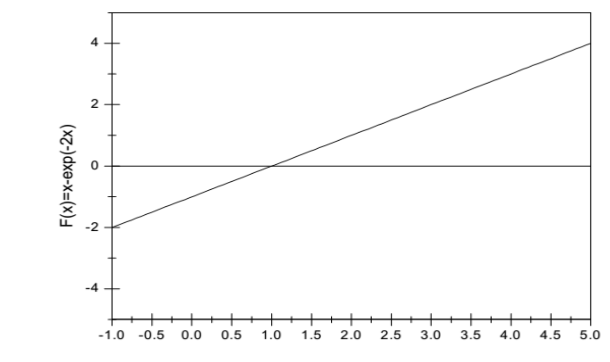
Théorème des valeurs intermédiaires :

Si f est continue dans [b a], et f (a) f (b) <0. Alors ∃ α∈] b a [, tel que F (α) = 0.

Si F (x) est monotone dans [b a], alors α est unique dans [b a]

Monotone c'est-à-dire strictement supérieure où strictement inferieure

Exemples

	
$F(x) = x - \cos(x) = 0$	$F(x) = x^2 - e^x = 0$

Méthode algébrique exemple :

Séparons les racines de l'équation $f(x) = x^3 - 3x + 1$dans l'intervalle [−3 ,3].

F(x) est une fonction polynomiale donc elle est continue dans [−3 ,3]

F(-3)= -17, f(3)=19, donc selon le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine α de l'équation $f(x)$ dans [−3 ,3]

En étudiant la monotonie de l'équation $f(x)$

La dérivée de l'équation est $f(x)' = 3x^2 - 3$ devienne nulle pour X=1 et -1

x	-3		-1		1		3
$f(x)'$		+	0	-	0		+
$f(x)$	-17		3		-1		19

D'après le tableau de variation de la fonction on constate trois racines

Dans l'intervalle [−3,-1] elle existe α1 car $f(-3)f(-1) < 0$

Dans l'intervalle [−1 ,1] elle existe α2 car $f(-1)f(1) < 0$

Dans l'intervalle [1,3] elle existe α3 car $f(1)f(3) < 0$

I.2-Méthode de la Dichotomie (Bissection) :

La méthode de la bissection est basée sur le résultat d'analyse mathématique suivant

(Théorème des Valeurs Intermédiaires).

1- $f(x)$ est continue sur l'intervalle [a,b]
2- $f(a)f(a) < 0$

D'après 1 et2 il existe au moins une valeur de α ∈ [a,b] tel que f(α)=0

Problème : en cherchant la valeur exacte de la racine d'une fonction $f(x)$ par la méthode de dichotomie (bissection)

Principe de la méthode ;

Une fois les racines sont localisées chacune dans un intervalle, pour simplifier l'écriture soit par exemple [a,b]

1. On divise l'intervalle en deux parties égales tel que $x_0 = \frac{a+b}{2}$

2. on obtient deux sous intervalles [a, x_0] et [x_0, b] la racine α doit

Obligatoirement appartient à l'un d'eux. Pour vérifier, on calcule $f(a)f(x_0)$ et $f(x_0)f(b)$ le produit qui est négatif c'est celui qui correspond à l'intervalle qui contient la solution.

Supposant que l'intervalle qui contient la solution [a, x_0] on a_1=a et b_1=x_0

En répétant les a même méthode pour l'intervalle [a_1, b_1]

On divise l'intervalle en deux sous intervalle [a_1, x_1] [x_1, b_1] avec $x_1 = \frac{a1+b_1}{2}$

Par la suite on calcul$x_2 = \frac{a2+b_2}{2}$, $x_3 = \frac{a3+b_3}{2}$ …………………$x_n = \frac{an+b_n}{2}$

La suite $\{x_n\}_{n=1\ \infty}$ converge vers la solution α tel que f(α)=0

Le nombre de division *n* dépond de la langueur et la précision, ce nombre est calculé par la relation suivante :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln(2}$$

Exemple : Calculons la première racine de l'équation $\mathbf{l}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} = \mathbf{0}$ qui appartient à [0.1, 0.5] avec une précision de 0.01.

$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln(2} = 4.32$ On prend $n = 5$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}\mathbf{1}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{0.1}) = -\mathbf{0.313}$ et $(\boldsymbol{b}\mathbf{1}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{0.5}) = \mathbf{1.057}$

$x_1 = \frac{a1+b1}{2}$= 0.3, $(\mathbf{0}.3)$= $\mathbf{0.706} > \mathbf{0}$ donc $\boldsymbol{a}\mathbf{2}$= $\boldsymbol{a}1 = \mathbf{0.1}$ et $\boldsymbol{b}\mathbf{2}$= $\mathbf{0.3}$, α ∈ [0.1, 0.3]

$x_2 = \frac{a2+b2}{2}$= 0.2, $(\mathbf{0}.2)$= $\mathbf{0.351} > \mathbf{0}$ donc $\boldsymbol{a}\mathbf{3} = \mathbf{0.1}$ et $\boldsymbol{b}\mathbf{3} = \mathbf{0.2}$, α ∈ [0.1, 0.2]

$x_3 = \frac{a3+b3}{2}$= 0.15, $(\mathbf{0}.15)$= $\mathbf{0.080} > \mathbf{0}$ donc $\boldsymbol{a}\mathbf{4} = \mathbf{0.1}$ et $\boldsymbol{b}\mathbf{4} = \mathbf{0.15}$, α ∈ [0.1, 0.15]

$x_4 = \frac{a4+b4}{2}$= 0.125, $(\mathbf{0}.125)$= $-\mathbf{0.095} < \mathbf{0}$ donc $\boldsymbol{a}\mathbf{5} = \mathbf{0.15}$ et $\boldsymbol{b}5 = \mathbf{0.125}$, α ∈ [0.15, 0.125]

$x_5 = \frac{a5+b5}{2}$= 0.137, $(\mathbf{0}.137)$=-0.003, la solution est α=0.137.

I. 3. Méthode du point fixe :

Soit g une fonction définie sur un intervalle ***[a,b]***, le point $\overline{x}$ qui vérifie $\overline{x} = g(\overline{x})$ avec $\overline{x} \in [a, b]$ est dit point fixe de la fonction g.

Cette méthode est basée sur le principe du point fixe d'une fonction, on écrit l'équation ***f(x)=0*** sous la forme ***x=g(x)***, ensuite on cherche le point fixe $\overline{x}$ de la fonction g. Pour cela on crée la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ **(n=0,1,2....)** avec x_0 donnée par dichotomie par exemple.

On démarre de x_0 pour ***n=0***, on calcule $x_1 = g(x_0)$ ensuite ***n=1***, on calcule $x_2 = g(x_1)$,..., $x_{n+1} = g(x_n)$. Sous certaines conditions, la suite $\{x_n\}_{n=0,\infty}$ converge vers la solution $\overline{x}$ point fixe de g et solution de l'équation ***f(x)=0***.

<u>Exemple</u> : Ecrire l'équation ***f(x)=0*** sous la forme ***x = g(x)*** si $f(x) = x^2 + 3e^x - 12$.

On peut écrire $$x = g_1(x) = x^2 + 3e^x - 12 + x$$

$$x = g_2(x) = \sqrt{12 - 3e^x}$$

$$x = g_3(x) = ln\left(\frac{12-x^2}{3}\right)$$

Pour pouvoir choisir la forme de g adéquate pour le calcul, un critère de convergence de cette méthode doit être vérifié.

<u>3.1 Critère de convergence et d'arrêt de calculs pour la méthode des approximations successives.</u>

Soit g une fonction dérivable définie de **[a,b]** → **[a,b]** tel que (condition suffisante) :

$$|g'(x)| \leq k < 1 \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

Alors la suite $\{x_n\}_{n=0,\infty}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ **(n=0,1,2....)** converge indépendamment de la valeur de x_0 vers l'unique point fixe $\overline{x}$ de g.

Si plusieurs formes de g vérifient cette condition, on aura plusieurs valeurs de k. On choisit celle avec la valeur minimale de k. En pratique, on calcule $k = max_{x\in[a,b]}|g'(x)|$ qui doit être inférieure à l'unité pour que la méthode converge.

On arrête les calculs pour cette méthode lorsque la différence absolue entre deux itérations successives est inférieure à une certaine précision ε donnée.

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Exemple : Trouver la première racine de l'équation $\ln(x) - x^2 + 2 = 0$ qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision **ε=0.001**. On écrit cette équation sous la forme ***x = g(x)*** et on vérifie les conditions de convergence. On peut écrire :

$x = e^{x^2-2} = g_1(x)$ et

$x = \sqrt{ln(x) + 2} = g_2(x)$

Vérifions la condition de convergence pour cette méthode $k = max_{x\in[a,b]}|g'(x)|$

$k_1 = max_{x\in[0.1,0.5]}|g_1{}'(x)| = max_{x\in[0.1,0.5]}\left|2xe^{x^2-2}\right|$ on a $g_1{}'(x)$ strictement croissante donc $k_1 = max_{x=0.5}\left|2 * 0.5e^{0.5^2-2}\right| = 0.174 < 1$ cette forme converge.

On écrit : $x_{n+1} = g_1(x_n) = e^{x_n^2-2}$ **(n=0,1,2,.....)**

Commençons ***x₀=0.3*** le milieu de l'intervalle initial donné :

$$n = 0, \quad x_1 = g_1(x_0) = e^{x_0^2-2} = 0.148$$

On calcule $|x_1 - x_0| = 0.152 > \varepsilon$;

On continue $n = 1,\ x_2 = g_1(x_1) = e^{x_1^2-2} = 0.138.$

On calcule $|x_2 - x_1| = 0.01 > \varepsilon$

On continue $n = 2,\ x_3 = g_1(x_2) = e^{x_2^2-2} = 0.138.$

On calcule $|x_3 - x_2| = 0.00 < \varepsilon$, **La solution est** $x_2 = 0.138$

I. 4. Méthode de Newton-Raphson

C'est la méthode la plus efficace et la plus utilisée, elle repose sur le développement de Taylor. Si ***f(x)*** est continue et continument dérivable dans le voisinage de $\overline{x}$ solution de ***f(x)=0***, alors le développement en série de Taylor autour d'un estimé x_n proche de $\overline{x}$ s'écrit :

$$f(\overline{x}) = f(x_n) + \frac{(\overline{x}-x_n)}{1!} f'(x_n) + \frac{(\overline{x}-x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \cdots.$$

Si x_n est un estimé proche de $\overline{x}$, alors le carré de l'erreur $\varepsilon_n = \overline{x} - x_n$ et les termes de degrés supérieurs sont négligeable. Sachant que $f(\overline{x}) = 0$ on obtient la relation approximative :

$$f(x_n) + (\overline{x} - x_n) f'(x_n) \approx 0$$

Donc $$\overline{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On peut écrire la $(n+1)^{eme}$ itération approximant $\bar{x}$ est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \textbf{(n=0,1,2,.....)}$$

Cette suite, si elle converge, doit converger vers la solution $\overline{x}$ de ***f(x)=0***. On remarque que ***f'(x)*** doit être non nulle.

4.1 Critère de convergence de la méthode de Newton-Raphson

Soit une fonction ***f*** définie sur ***[a,b]*** telle que :

- **i.** $f(a)f(b) < 0$
- ii. $f'(x)$ ***et*** $f''(x)$ sont non nulles et gardent un signe constant sur l'intervalle donné.

4.2 Critère d'arrêt de calcul pour la méthode de Newton-Raphson

Si la condition de convergence est vérifiée, le procédé itératif doit converger. Cela veut dire que chaque nouvelle itération est meilleure que la précédente, de ce fait on peut dire que si on a une précision ε, on arrête le calcul lorsque la différence absolue entre deux approximations successives est inférieure à la précision donnée. C'est-à-dire :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

Si cette condition est vérifiée on prend x_{n+1} comme solution de ***f(x)=0***.

Exemple : Trouver la première racine de l'équation $f(x) = \ln(x) - x^2$ · qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision **ε=0.0001**. On calcule la (première et seconde de f et on vérifie les conditions de convergence.

On a : $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$ qui est strictement décroissante et positive sur l'intervalle

$f'(x) > 0$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$, $f''(x) < 0$ sur l'intervalle donné**.** La condit convergence est vérifiée. On écrit donc : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n) - x_n{}^2 + 2}{\frac{1}{x_n} - 2x_n}$, (n=0

Commençons $x_0 = 0.3$ le milieu de l'intervalle initial donné :

$$n = 0, \qquad x_1 = x_0 - \frac{\ln(x_0) - x_0{}^2 + 2}{\frac{1}{x_0} - 2x_0} = 0.0417$$

On calcule	$\lvert x_1 - x_0 \rvert > \varepsilon$;
On continue	$n = 1,\ x_2 = 0.0910.$
On calcule	$\lvert x_2 - x_1 \rvert => \varepsilon$
On continue	$n = 2,\ x_3 = 0.1285.$
On calcule	$\lvert x_3 - x_2 \rvert > \varepsilon$;
On continue	$n = 3,\ x_4 = 0.1376.$
On calcule	$\lvert x_4 - x_3 \rvert => \varepsilon$
On continue	$n = 4,\ x_5 = 0.1379.$
On calcule	$\lvert x_5 - x_4 \rvert => \varepsilon$

On continue $n = 5,\ x_6 = 0.1379$. **La solution est** $x_4 = 0.1379$

Chapitre 2 : Interpolation polynomiale

Soit par exemple une expérience où on enregistre la distance parcourue par un objet en fonction du temps, les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t(sec)	0	1	2	3	4
X(m)	0	5	15	0	3

On veut par exemple calculer la position de l'objet au temps ***t=2.5 sec*** ou la vitesse de l'objet à un temps donné. Pour cela, il faut avoir une forme analytique de ***x*** en fonction de ***t, X(t)***. Cette forme doit au moins coïncider avec les points donnés dans le tableau. Ensuite on peut calculer ***X(2.5)***, $\int_0^4 X(t)dt$ où bien $v(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

Dans ce chapitre, on va considérer l'approximation de ***X(t)*** par une forme polynômiale c'est-à-dire :

$$X(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

Avec a_i $(i = 0, n)$ sont des coefficients à déterminer.

Les polynômes que nous allons étudier différent seulement par la façon de déterminer les coefficients a_i $(i = 0, n)$, car pour un tableau de valeurs données le polynôme d'interpolation est unique.

II.1 polynôme d'interpolation de Lagrange

Soient ***(n+1)*** points distincts $x_0, x_1, \dots\dots, x_n$ et f une fonction dont les valeurs sont $f(x_0), f(x_1), \dots\dots, f(x_n)$. Alors, il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui coïncide avec les points d'interpolation, i e :

$$f(x_k) = P_n(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots\dots, n$$

Ce polynôme est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots \dots + f(x_n)L_n(x)$$

Avec $$L_k(x) = \sum_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0)}{(x_k-x_0)} \frac{(x-x_1)}{(x_k-x_1)} \dots \dots \frac{(x-x_{k-1})}{(x_k-x_{k-1})} \frac{(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k+1})} \dots \frac{(x-x_n)}{(x_k-x_n)} \quad \textit{(k=0,..,n)}$$

$L_k(x)$ sont dits coefficients polynômes de Lagrange, ils sont orthogonaux c'est-à-dire $L_k(x_j) = 0$ et $L_k(x_k) = 1$.

$$X(t) \approx P_4(t) = \sum_{i=0}^{4} f(t_i)L_i(t) = f(t_0)L_0(t) + f(t_1)L_1(t) + f(t_2)L_2(t) + f(t_3)L_3(t) + f(t_4)L_4(t)$$

Avec les coefficients $f(t_i)$ sont les valeurs de X(t_i) aux points donnés t_i, on remplace et on écrit donc :

$$X(t) \approx P_4(t) = 0 * L_0(t) + 5 * L_1(t) + 15 * L_2(t) + 0 * L_3(t) + 3 * L_4(t)$$

Ensuite, on calcule les coefficients polynômes de Lagrange :

$L_0(t) = \sum_{i=0, i\neq 0}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_1)}{(t_0-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_0-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_0-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_0-t_4)}$ Noter bien qu'il est inutile de calculer les coefficients polynômes $L_0(t)$ et $L_3(t)$ car ils seront multipliés par zéro dans le remplacement.

$$L_1(t) = \sum_{i=0, i\neq 1}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_1-t_0)}\frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_1-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_1-t_4)} = \frac{(t-0)}{(1-0)}\frac{(t-2)}{(1-2)}\frac{(t-3)}{(1-3)}\frac{(t-4)}{(1-4)} = -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t)$$

$$L_2(t) = \sum_{i=0, i\neq 2}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_2-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)}\frac{(t-t_3)}{(t_2-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_2-t_4)} = \frac{(t-0)}{(2-0)}\frac{(t-1)}{(2-1)}\frac{(t-3)}{(2-3)}\frac{(t-4)}{(2-4)} = \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t)$$

$$L_4(t) = \sum_{i=0, i\neq 4}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_4-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_4-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_4-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_4-t_3)} = \frac{(t-0)}{(4-0)}\frac{(t-1)}{(4-1)}\frac{(t-2)}{(4-2)}\frac{(t-3)}{(4-3)} = \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t)$$

Finalement on remplace les coefficients polynômes et on obtient :

$$X(t) \approx P_4(t) = -25.75t + 50.95833t^2 - 23.25t^3 + 3.04167t^4$$

II.2. polynôme d'interpolation de Newton

On a vu que le polynôme de Lagrange utilise ***(n+1)*** coefficients polynômes qui sont eux aussi des polynômes de degré inférieur ou égal à ***n***. Le calcul de ces coefficients polynômes est aussi une tâche délicate, c'est pourquoi il est intéressant d'utiliser une autre formulation plus souple ; c'est le polynôme de Newton.

Le calcul du polynôme de Newton commence par la construction d'un polynôme de degré ***1***, $\boldsymbol{P_1(x)}$ qui passe par les deux premiers points. Ensuite, ce dernier sera utilisé pour calculer un autre de degré ***2***, $\boldsymbol{P_2(x)}$ qui passe par les trois premiers points et ainsi de suite jusqu'au polynôme final de degré inférieur ou égal à ***n***, $\boldsymbol{P_n(x)}$. On a la relation de récurrence suivante entre deux polynômes successifs $\boldsymbol{P_{i-1}(x)}$ et $\boldsymbol{P_i(x)}$ ***(i=2,3,..,n+1)***:

$$\begin{cases} \boldsymbol{P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)} \\ \boldsymbol{P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)} \\ \boldsymbol{P_3(x) = P_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \boldsymbol{P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})} \end{cases}$$

On remarque que les coefficients $\boldsymbol{a_k}$ ***(k=0,…,n)*** sont les éléments essentiels dans le calcul des polynômes de Newton. Ces coefficients sont les différences divisées d'ordre ***k*** de la fonction ***f***.

Chapitre 3 : Intégration Numérique

Dans ce chapitre, on va étudier quelques méthodes approximatives pour le calcul des intégrales limitées. Aussi ces méthodes permettent le calcul des intégrales qui n'ont pas de solutions directes ou analytiques. On peut aussi calculer l'intégrale d'une fonction donnée sous forme tabulaire ou discrète.

3.1 Formule du trapèze

Cette formule est très simple, elle permet de remplacer la courbe ***f(x)*** de la fonction à intégrer par une ligne droite qui relie les points ***(a,f(a))*** et ***(b,f(b))*** ce qui donne un trapèze (Fig. 3.1).

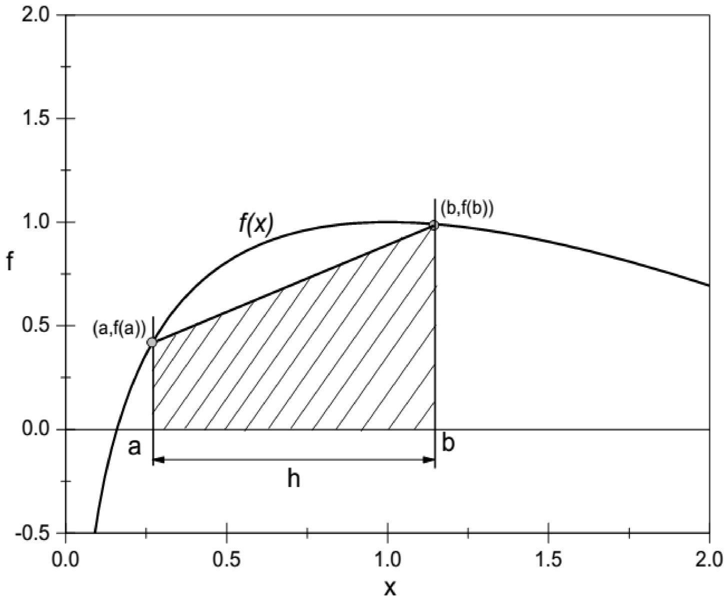


Fig. 3.1 : Méthode du trapèze

L'intégrale est donc remplacée par la surface du trapèze :

$$s = \int_a^b f(x) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

Avec ***h=b-a*** est dit pas d'intégration. On peut remarquer qu'il y'a une différence importante entre la courbe de la fonction et la ligne droite, cela veut qu'on commît une erreur de calcul. Pour minimiser cette erreur, on utilise une autre forme plus adaptée de cette formule.

3.1.1 Formule du trapèze généralisée.

On divise l'intervalle ***[a,b]*** en plusieurs sous intervalles égaux et on applique la formule du trapèze à chaque sous intervalle (Fig. 3.2). On a donc les sous intervalles $[\boldsymbol{a = x_0, x_1}] \cup [\boldsymbol{x_1, x_2}] \cup \ldots\ldots \cup [\boldsymbol{x_{n-1}, x_n = b}]$, l'application de la formule du trapèze donne :

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{2}(f(x_2) + f(x_3)) + \cdots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$

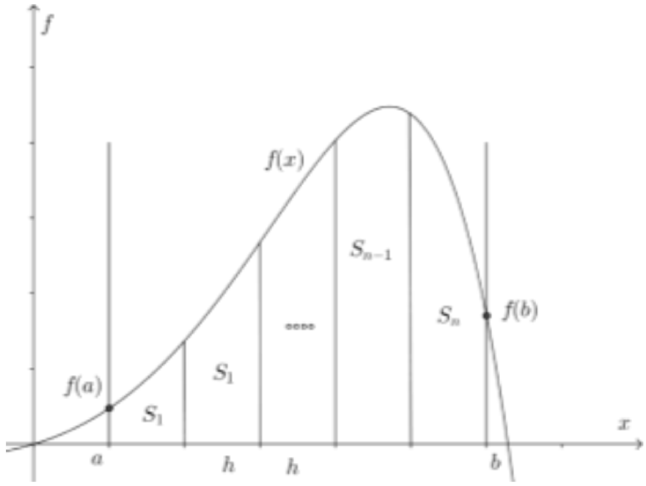


Fig. 3.2. Méthode du trapèze généralisée

3.1.2 Erreur d'intégration

C'est la différence entre l'intégrale exacte de la fonction et celle calculée par la méthode du trapèze, elle est notée par ***R(f)***.

$$\boldsymbol{R(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(z)} \ \ \textbf{avec} \ \ \boldsymbol{z \in [a,b]}$$

Exemple : Soit à calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ avec une précision de 0.001 par la méthode du trapèze. On doit premièrement trouver le nombre de division à faire pour obtenir cette précision. L'erreur d'intégration s'écrit $\boldsymbol{R(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(z)}$ sa valeur absolue doit être inférieure ou égale à la précision donnée (0.001), c.à.d. :

$$|\boldsymbol{R(f)}| = \left|-\frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{12}}\boldsymbol{h^2 f''(z)}\right| \leq \boldsymbol{0.001}$$

La fonction $f(x) = e^{-x^2}$ donc sa dérivée seconde est $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$, cette fonction est strictement croissante dans l'intervalle donné (Fig. 3.3).

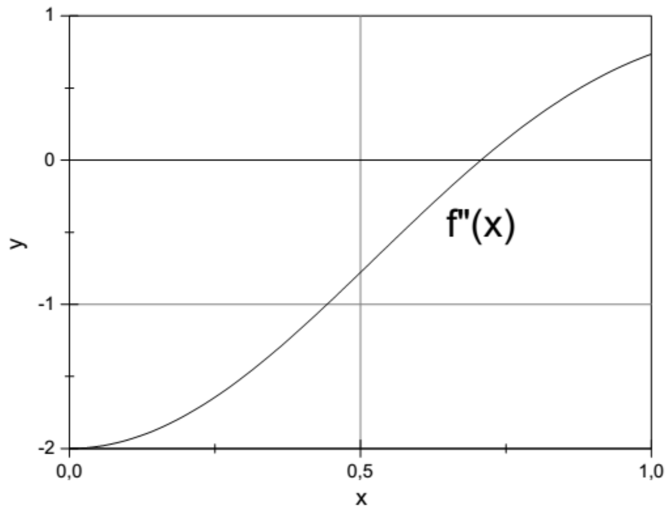


Fig. 3.3. Courbe de la dérivée seconde de e^{-x^2}

On calcule

$$M = max|\boldsymbol{f''(z)}| = \mathbf{2} \text{ à } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

donc $\quad |\boldsymbol{R(f)}| = \left|-\frac{b-a}{12}\boldsymbol{h^2 f''(z)}\right| \leq \mathbf{0.001}$

d'où $\quad \boldsymbol{h} \leq \sqrt{\frac{12*0.001}{(1-0)*2}} = \mathbf{0.0774}$ donc $n = \frac{1}{0.0774} = \mathbf{12.91}$ on prend 13 divisions.

Le pas d'intégration $h = \frac{1}{13}$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2*13}\left(e^{-0^2} + 2\sum_{i=1}^{12} e^{-(\frac{i}{13})^2} + e^{-1^2}\right) = 0.74646$$

3.2 Formules de Simpson

Dans cette formule on ne remplace pas la fonction par une droite mais par une parabole de degré $\boldsymbol{n}$ inférieure ou égale à deux. Cette dernière doit passer par trois points $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ **et** (x_2, y_2) ce qui fait que cette méthode n'est applicable que pour un nombre pair de tranches (une tranche c'est l'intervalle entre deux points) (Fig. 3.4.). La formule de Simpson s'écrit :

$$\int_a^b f(x) \cong \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

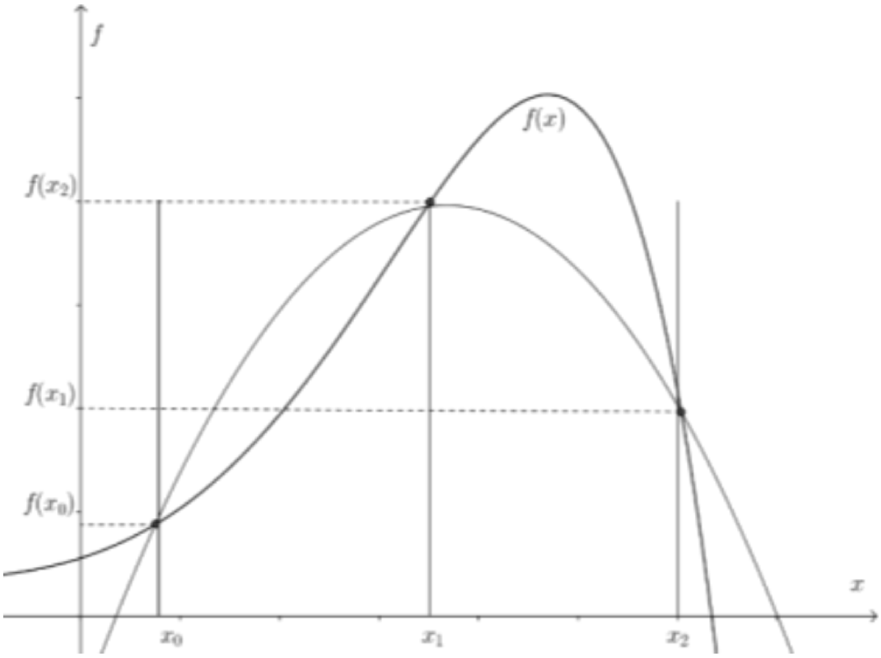


Fig. 3.4. Méthode de Simpson

Si on généralise la formule de Simpson pour $\boldsymbol{2n}$ sous intervalles avec un pas d'intégration $h = \frac{b-a}{2n}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots .... < x_{2n} = b$ et $x_k = a + hk$ pour ***k=0,1,2,……,2n***.

La formule de Simpson généralisée s'écrit :

$$\int_a^b f(x) \cong \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum\nolimits_{i\ pair} f(x_i) + 4\sum\nolimits_{i\ impair} f(x_i) + f(x_{2n})\right)$$

L'erreur d'interpolation de la formule de Simpson s'écrit :

$$R(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(z) \quad \text{avec} \quad z \in [a, b]$$

Exemple : Soit à calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ avec une précision de 0.001 par la méthode de Simpson. On doit premièrement trouver le nombre de division à faire pour obtenir cette précision.
L'erreur d'intégration s'écrit :

$$\boldsymbol{R(f) = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(z)}$$

sa valeur absolue doit être inférieure ou égale à la précision donnée (0.001), c.à.d. :

$$|\boldsymbol{R(f)}| = \left|-\frac{\boldsymbol{(b-a)}}{\boldsymbol{180}}\boldsymbol{h^4 f^{(4)}(z)}\right| \leq \boldsymbol{0.001}$$

La fonction $f(x) = e^{-x^2}$ sa dérivée quatrième est $f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}$ cette fonction est non monotone dans l'intervalle donné. On calcule son maximum par le traceur Origin (Fig. 3.3.).

$$M = max\left|\boldsymbol{f^{(4)}(z)}\right| = \boldsymbol{12} \text{ à } \boldsymbol{x = 0}.$$

D'ou $\boldsymbol{h \leq \sqrt[4]{\frac{180*0.001}{(1-0)*12}} = 0.35}$

donc $\boldsymbol{2n} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{0.35}} = \boldsymbol{2.85}$ on prend **4** divisions, le pas d'intégration $h = \frac{1}{4} = 0.25$.

On trouve : $\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{0.25}{3}\left(e^{-0^2} + 4(e^{-0.25^2} + e^{-0.75^2}) + 2e^{-0.5^2} + e^{-1^2}\right) = 0.7469$

3.3 Méthode de quadrature

Cette méthode permet l'élaboration de formules d'intégration numériques en se basant sur le polynôme de Lagrange. On peut par exemple retrouver les formules du trapèze et de Simpson par cette méthode ou bien de construire d'autres formules d'intégration plus performantes. Dans cette méthode on remplace la fonction par un polynôme de Lagrange puis on intègre le polynôme trouvé, on écrit donc :

$$f(x) \cong P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

On intègre : $\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f_i \int_a^b L_i(x)dx$

Si on pose : $A_i = \int_a^b L_i(x)dx$ pour ***i=0,1,…,n***

On obtient la formule de quadrature : $\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n} f_i A_i$

On doit maintenant choisir la forme de la fonction ***f(x)***, dans notre cas on prend :

$$f(x) = x^k \quad \text{avec } k=0,1,2,\dots,n$$

On remplace dans l'intégrale : $\int_a^b x^k dx \cong \sum_{i=0}^{n} f_i A_i = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$ ***k=0,1,2,….,n***

En variant ***i*** de ***0*** à ***n*** pour chaque valeur de ***k,*** on aura:

pour ***k=0 :*** $x_0^0 A_0 + x_1^0 A_1 + \cdots \dots + x_n^0 A_0 = \frac{b^1-a^1}{1}$

pour ***k=1 :*** $x_0^1 A_0 + x_1^1 A_1 + \cdots \dots + x_n^1 A_0 = \frac{b^2-a^2}{2}$

pour ***k=2 :*** $x_0^2 A_0 + x_1^2 A_1 + \cdots \dots + x_n^2 A_0 = \frac{b^3-a^3}{3}$

…………………………………………………………………………………

pour ***k=n :*** $x_0^n A_0 + x_1^n A_1 + \cdots \dots + x_n^n A_0 = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$

D'où on obtient pour toutes les valeurs de ***i*** et ***k*** le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots\dots x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots. x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots. x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ . \\ I_n \end{bmatrix} \quad \text{avec } I_k = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

Le déterminant de la matrice du système trouvé est dit de "Von-Dermonde" il est non nul d'où la solution de ce système existe et unique $(A_0, A_1, \dots.., A_n)$.

Exemple : Soit à calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ avec une formule qui a la forme suivante : $\int_0^1 e^{-x^2}dx = \boldsymbol{A_0 f(0) + A_1 f(0.25) + A_2 f(0.5) + A_3 f(0.75) + A_2 f(1.00)}$**.** Dans ce cas on cherche premièrement les constantes A_i puis on calcule l'intégrale. Ces constantes sont données par le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.0625 & 0.25 & 0.5626 & 1 \\ 0 & 0.015625 & 0.125 & 0.421875 & 1 \\ 0 & 0.00390625 & 0.0625 & 0.31640625 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_0} \\ \boldsymbol{A_1} \\ \boldsymbol{A_2} \\ \boldsymbol{A_3} \\ \boldsymbol{A_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0.333} \\ \mathbf{0.250} \\ \mathbf{0.200} \end{bmatrix}$$

La solution du système est (0.0691, 0.3812, 0.1052, 0.3694, 0.0751) donc :

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.0691\boldsymbol{e^0} + 0.3812\boldsymbol{e^{-0.25^2}} + 0.1052\boldsymbol{e^{-0.5^2}} + 0.3694\boldsymbol{e^{-0.75^2}} + 0.0751\boldsymbol{e^{-1^2}} = \mathbf{0.7472}$$