

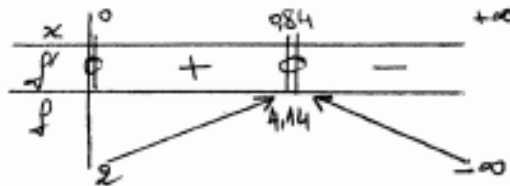
Solution série 1

Ex 1) I) $f(x) = 2x^2 - 3x^2 \ln x^2 + 2$

$\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$ f est continue sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = -2x - 6x \ln x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 0,84$$



on a f est strictement décroissante et change de signe dans l'intervalle

$]0,84, +\infty[\Rightarrow f(x) = 0$ admet une solution unique dans cet intervalle

$c \in [1,5; 2]$?

$$f(1,5) = 1,02 \quad f(2) = -6,63 \Rightarrow f(1,5) \cdot f(2) < 0$$

d'un autre côté $[1,5; 2] \subset]0,84, +\infty[$ donc f reste strictement décroissante dans l'intervalle $[1,5; 2]$

$\Rightarrow$ la solution $c \in]1,5; 2[$

II) $f(x) = \sin x - x + 1$

Pasant $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ tq $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = x - 1$.
graphiquement la racine de cette équation $\in [1,2]$.

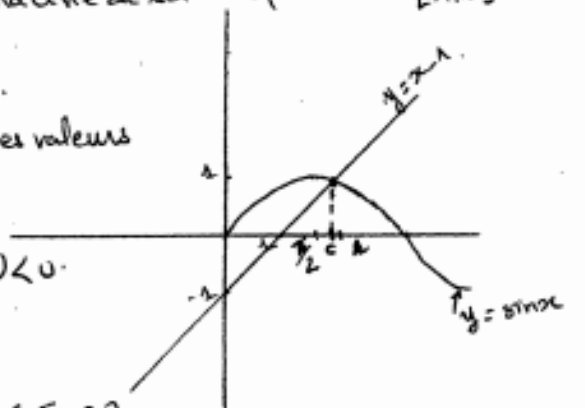
on utilise le théorème des valeurs intermédiaires

$$f(1) \approx 0,17 \quad f(2) \approx -0,96 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$

$\Rightarrow \exists c \in]1,2[\mid f(c) = 0$.

$$f'(x) = \cos x - 1 < 0 \quad \forall x \in [1,2]$$

$\Rightarrow$ la solution est unique dans $]1,2[$



$$f(x) = x^7 - 2x^6 + 1 = 0 \quad f \text{ continue et } f'(x) = 7x^6 - 12x^5 = x^5(7x - 12)$$

$$1) f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$c_1 \in]1,9, 2[\text{ on a } f'(x) > 0 \quad \forall x \in]1,9, 2[\Rightarrow f \nearrow \text{ dans }]1,9, 2[$$

$$f(1,9) = -3,77 < 0 \quad | \quad \exists c_1 \in]1,9, 2[$$

$$f(2) = 1 > 0$$

$$c_2 \in]-0,9, -0,8[\text{ on a } f'(x) < 0 \quad \forall x \in]-0,9, -0,8[\Rightarrow f \searrow \text{ dans }]-0,9, -0,8[$$

$$f(-0,9) = -0,44 < 0$$

$$f(-0,8) = 0,77 > 0 \quad | \quad \exists c_2 \in]-0,9, -0,8[$$

$$2) x_{k+1} = 2 - \frac{1}{x_k^6} \Rightarrow g(x) = 2 - \frac{1}{x^6} = x$$

$$g'(x) = \frac{6}{x^7} \quad \text{Pour } C_1$$

$$\text{d'inclusion: } g'(x) > 0 \quad \forall x \in]1,9, 2[\Rightarrow g \nearrow$$

$$\Rightarrow 1,9 < x < 2 \Rightarrow 1,9787 = g(1,9) < g(x) < g(2) = 1,984 < 2$$

$\Rightarrow$ inclusion est vérifiée

$$\text{La contraction: } \forall x \in]1,9, 2[\quad |g'(x)| \leq K < 1?$$

$$\text{on a: } g'(x) = \frac{6}{x^7}, \quad g' \text{ est décroissante (puisque } g'' = -\frac{42}{x^8} < 0)$$

$$\text{Alors: } 0,04 \approx \frac{2}{64} = g(2) \leq g'(x) \leq g'(1,9) = \frac{6}{89,38} \approx 0,06$$

$$\Rightarrow |g'(x)| \leq \underbrace{0,06}_K < 1$$

$\Rightarrow g$ est contractante

d'où la méthode du point fixe converge.

Pour C_2 :

$$\text{on a: } |g'(-0,8)| = \frac{6}{(-0,8)^7} \approx 28,61 > 1 \text{ donc } g \text{ n'est pas contractant}$$

alors cette itération ne permet pas de calculer $c_2 \in]-0,9, -0,8[$

Ex 21) $f(x) = x^2 + 3e^x - 12$ $[1, 2]$

1) f est continue sur $[1, 2]$

2) $f(1) = 3e - 11 = -2,845154515$

$f(2) = 3e^2 - 8 = 14,1641683$

$f(1) \cdot f(2) < 0$

3) $f'(x) = 2x + 3e^x > 0 \quad \forall x \in [1, 2]$

$\Rightarrow f$ est croissante sur $[1, 2]$

1) 2) 3) $\Rightarrow$ il existe une racine unique pour cette équation

IV) La méthode de dichotomie :

a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$]a_{n+1}, b_{n+1}[$
1	2	1,5	3,69	$]1; 1,5[$
1	1,5	1,25	0,033	$]1; 1,25[$
1	1,25	1,125	-1,493	$]1,125; 1,25[$
1,125	1,25	1,1875	-0,75	$]1,1875; 1,25[$
1,1875	1,25	1,21875	-0,36	$]1,21875; 1,25[$

$C \approx 1,2$

III) On a $\varepsilon = 0,001$, $a = 0$, $b = 2$.

$n \gg \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2} - 1 = \frac{\ln(\frac{2-0}{0,001})}{\ln 2} - 1 = 9,96$

$\Rightarrow n = 10$

$\therefore$ le nombre des itérations nécessaires est 10.

Ex 3) $f(x) = xe^{-x} - x + 1$

1) f est continue sur $[1, 2]$.

2) $f(1) \approx 0,368$

$f(2) \approx -0,429 \quad | \quad f(1) \cdot f(2) < 0$

3) $f'(x) = (1-x)e^{-x} - 1 < 0 \quad \forall x \in [1, 2] \Rightarrow f$ $\searrow$ sur $[1, 2]$

1) 2) 3) $\Rightarrow$ il existe une racine unique pour cette équation

3/5 supp 1

$$2) g(x) = 1 + xe^{-x}$$

cette méthode itérative est convergente ssi

$$1) \text{ l'inclusion : } g([1,2]) \subset [1,2] \quad ??$$

$$2) \text{ la contraction : } \forall x \in [1,2] \quad \exists K : 0 \leq K < 1 \text{ et } |g'(x)| \leq K < 1 \quad ??$$

* l'inclusion

$$\text{on a } 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x \leq -1 \Rightarrow e^{-2} \leq e^{-x} \leq e^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{-x} \leq xe^{-2} \leq xe^{-x} \leq xe^{-1} \leq 2e^{-1} \Rightarrow$$

$$1 < 1,1353 \leq 1 + e^{-2} \leq 1 + xe^{-x} \leq 1 + 2e^{-1} \leq 1,7358 < 2$$

$$\text{d'où } \forall x \in [1,2] : g(x) \in [1,2]$$

$$2^{\text{ème}} \text{ méthode : } g(1) = 1 + e^{-1} = 1,36 \in [1,2], g(2) = 1 + 2e^{-2} = 1,27 \in [1,2]$$

$$g'(x) = (1-x)e^{-x} < 0 \quad \forall x \in [1,2] \Rightarrow g(x) \searrow \text{ dans } [1,2]$$

$$\Rightarrow \forall x \in [1,2] : g(x) \in [1,2]$$

* La contraction

$$\text{on a } g'(x) = (1-x)e^{-x} \text{ alors pour } 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x \leq -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq 1-x \leq 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{d'un autre côté on a } -2 \leq -x \leq -1 \Rightarrow \underbrace{e^{-2}}_{0,135} \leq e^{-x} \leq \underbrace{e^{-1}}_{0,36} \quad (2)$$

multiplions les deux inégalités (1) et (2)

$$-0,36 \leq e^{-x}(1-x) \leq 0 \quad \text{d'où } |g'(x)| \leq \underbrace{0,36}_K < 1$$

$\Rightarrow g$ est contractante

$$2^{\text{ème}} \text{ méthode : on a } g''(x) = (x-2)e^{-x} \leq 0 \quad \forall x \in [1,2]$$

$\Rightarrow g$ est décroissante, d'où :

$$-0,135 \approx g'(2) \leq g'(x) \leq g'(1) = 0$$

$$\Rightarrow |g'(x)| \leq \underbrace{0,135}_K < 1$$

$\Rightarrow g$ est contractante

* Les 3 premières itérations, on prend $x_0 = 1,5$

$$x_1 = 1 + x_0 e^{-x_0} = 1 + 1,5 e^{-1,5} \approx 1,3348972402$$

$$x_2 = 1 + x_1 e^{-x_1} \approx 1,3513430231 \quad | \quad x_3 = 1 + x_2 e^{-x_2} \approx 1,3498523421$$

4/5 supp 1

Ex 4) 1) on a $\forall x = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \arctan x - \frac{1}{x} = 0$.

$f(x)$ est une fct définie et continue dans $[1, 2]$

$$\begin{array}{l|l} f(1) = -0,21 & f(1) \cdot f(2) < 0 \\ f(2) = 0,60 & \end{array}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (1, 2] \Rightarrow f \text{ p}$$

d'où $\exists ! c \in]1, 2[\mid f(c) = 0$

2) La méthode de Newton :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in [1, 2]$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{x^4} = -2x \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^4} \right) < 0$$

d'où f' et f'' sont non nuls et gardent des signes constants $\forall x \in [1, 2]$

Le choix de x_0 :

On prend $x_0 = 1$

$$f(1) = -0,21$$

f'' est toujours $< 0 \Rightarrow f''(1) < 0$

$$\Rightarrow f(1) \cdot f''(1) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1,142067891$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,162069761$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,1621339779$$

$$\Rightarrow \underline{r \approx 1,1621}$$

supp
sp

SERIE N°2

Exercice n°1 Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1/ Mettre ce système sous forme matricielle.

2/ Démontrer que ce système admet une solution unique.

3/ Résoudre ce système par la méthode de **Gauss**, en déduire la valeur du déterminant de A

Exercice n°2 Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 8 \\ -2x_1 + 26x_2 - 10x_3 = -14 \\ -10x_2 + 13x_3 = 13 \end{cases}$$

1/ Mettre ce système sous forme matricielle.

2/ Démontrer que ce système est régulier.

3/ Trouver la solution avec la méthode de **Cholesky**, en déduire le déterminant de A

Exercice n° 3 Soit le système

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,8x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

1/ Mettre ce système sous forme matricielle.

2/ Démontrer que la matrice A est régulière.

3/ Pour $X^{(0)} = C$, résoudre ce système par la méthode de **Jacobi** avec deux décimaux exactes.

Exercice n° 4 Soit le système

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

1/ Mettre ce système sous forme matricielle.

2/ Démontrer que ce système admet une solution unique.

Série n°2.

15/04/2016

Ex 1) 1) Forme matricielle

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Le système admet une solution unique $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$$\det A = 6 \neq 0$$

3) Méthode de Gauss: $[A^{(1)}; b^{(1)}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L_2 \\ \rightarrow L_3 \\ \rightarrow L_4 \end{matrix}$

$$a_{11}^{(1)} = -1 \neq 0 \quad p_{21} = -\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -1 \quad p_{31} = -\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 2$$

$$L'_2 = L_2 + p_{21} \cdot L_1 = (-1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 2) - (-1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1) = (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)$$

$$L'_3 = L_3 + p_{31} \cdot L_1 = (2 \ -1 \ 2 \ 0 \ 3) + 2(-1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1) = (0 \ -3 \ 2 \ 0 \ 5)$$

$$\Rightarrow [A^{(2)}; b^{(2)}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L'_2 \\ \rightarrow L'_3 \\ \rightarrow L'_4 = L_4 \end{matrix}$$

$a_{22}^{(2)} = 0$, on permute les lignes L'_2 et L'_3 , $\Rightarrow$

$$[A^{(3)}; b^{(3)}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L''_2 = L'_3 \\ \rightarrow L''_3 = L'_2 \\ \rightarrow L''_4 = L'_4 \end{matrix}$$

$$a_{22}^{(3)} = -3 \neq 0 \quad p_{42} = -\frac{a_{42}^{(3)}}{a_{22}^{(3)}} = \frac{1}{3}$$

$$L''_4 = L''_4 + p_{42} \cdot L''_2 = (0 \ 1 \ -1 \ 2 \ 0) + \frac{1}{3}(0 \ -3 \ 2 \ 0 \ 5) = (0 \ 0 \ -\frac{1}{3} \ 2 \ \frac{5}{3})$$

$$[A^{(4)}; b^{(4)}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow L_1 \\ \rightarrow L''_2 \\ \rightarrow L''_3 \\ \rightarrow L''_4 \end{matrix}$$

$$a_{33}^{(4)} = -1 \neq 0 \quad p_{43} = -\frac{a_{43}^{(4)}}{a_{33}^{(4)}} = \frac{1}{3}$$

$$L''_4 = L''_4 + p_{43} \cdot L''_3 = (0 \ 0 \ -\frac{1}{3} \ 2 \ \frac{5}{3}) - \frac{1}{3}(0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1) = (0 \ 0 \ 0 \ 2 \ \frac{4}{3})$$

15

$$[A^{(4)}; b^{(4)}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 & (1) \\ -3x_2 + 2x_3 = 5 & (2) \\ -x_3 = 1 & (3) \\ 2x_4 = \frac{4}{3} & (4) \end{cases}$$

$$(4) \Rightarrow \boxed{x_4 = \frac{2}{3}} \quad (3) \Rightarrow \boxed{x_3 = -1} \quad (2) \Rightarrow -3x_2 - 2 = 5 \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{7}{3}}$$

$$(1) \Rightarrow -x_1 + \frac{7}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{4}{3}}$$

La solution est $X = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -7/3 \\ -1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$$\det A = (-1)^p \det A' \quad p: \text{nombre des permutations } (p=1)$$

$$\det A = (-1)^4 \prod_{k=1}^4 a'_{kk} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-1) (2) = 6$$

Ex 2] 1) Forme matricielle $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 26 & -10 \\ 0 & -10 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 13 \end{pmatrix}$

2) Le système est régulier $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
 $\det A = 300 \neq 0$

3) Méthode de Cholesky.

a) On a A est symétrique $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 3$

b) A définie positive? $\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^3, X \neq 0_{\mathbb{R}^3} : \langle AX, X \rangle > 0?$

$$AX = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 26x_2 - 10x_3 \\ -10x_2 - 13x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \vec{z}$$

$$\langle AX, X \rangle = \langle \vec{z}, X \rangle = \sum_{i=1}^3 z_i x_i = z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3$$

$$= (4x_1 - 2x_2)x_1 + (-2x_1 + 26x_2 - 10x_3)x_2 + (-10x_2 - 13x_3)x_3$$

$$= 4x_1^2 + 26x_2^2 + 13x_3^2 - 4x_1x_2 - 20x_2x_3$$

$$= 2(x_1 - x_2)^2 + 10(x_2 - x_3)^2 + 2x_1^2 + 14x_2^2 + 3x_3^2 > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^3, X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

d'où A est définie positive.

c) Trouver la matrice L tq $A = L \cdot L^T$ et $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$
 $= L^T \cdot L$

$$L \cdot LT = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11} \cdot l_{21} & l_{11} \cdot l_{31} \\ l_{11} \cdot l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} \\ l_{11} \cdot l_{31} & l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 26 & -10 \\ 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow l_{11}^2 = 4 \Rightarrow \boxed{l_{11} = 2}$$

$$l_{11} \cdot l_{21} = -2 \Rightarrow \boxed{l_{21} = -1}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 26 \Rightarrow l_{22}^2 = 25 \Rightarrow \boxed{l_{22} = 5}$$

$$l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} = -10 \Rightarrow 5l_{32} = -10 \Rightarrow \boxed{l_{32} = -2}$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 13 \Rightarrow l_{33}^2 = 9 \Rightarrow \boxed{l_{33} = 3}$$

$$\downarrow \text{on } L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d) A X = b \Leftrightarrow L \cdot \underbrace{LT X}_Y = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ LT X = Y \end{cases}$$

$$\text{Résoudre } LY = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 = 8 & (1) \\ -y_1 + 5y_2 = -14 & (2) \\ -2y_2 + 3y_3 = 13 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{y_1 = 4} \quad (2) -y_1 + 5y_2 = -14 \Rightarrow \boxed{y_2 = -2}$$

$$(3) \Rightarrow 4 + 3y_3 = 13 \Rightarrow \boxed{y_3 = 3} \quad Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Résoudre } LT X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4 & (1) \\ 5x_2 - 2x_3 = -2 & (2) \\ 3x_3 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{x_3 = 1} \quad (2) \Rightarrow 5x_2 - 2 = -2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$$

$$(1) \Rightarrow 2x_1 = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

$$\text{La solution est: } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det(L \cdot LT) = \det L \cdot \det LT = (\det L)^2 = \prod_{i=1}^n [l_{i,i}]^2 \\ = (2)^2 \cdot (5)^2 \cdot (3)^2 = 4 \cdot 25 \cdot 9 = 900$$

Ex3 1) Forme matricielle: $AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0,24 & -0,08 \\ 0,09 & 3 & -0,15 \\ 0,04 & -0,8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}$

2) La matrice A est régulière $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$$\det A = 47,448 \neq 0$$

3) Méthode de Jacobi avec 2 décimales exactes

$$\text{on a } \begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,2x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = C + TX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(k+1)} = C + TX^{(k)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = 2 - 0,06x_2^{(k)} + 0,02x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - 0,03x_1^{(k)} + 0,05x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 5 - 0,01x_1^{(k)} + 0,2x_2^{(k)} \end{cases}$$

$$\text{on a } X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = 2 - 0,06x_2^{(0)} + 0,02x_3^{(0)} = 1,92 \\ x_2^{(1)} = 3 - 0,03x_1^{(0)} + 0,05x_3^{(0)} = 3,19 \\ x_3^{(1)} = 5 - 0,01x_1^{(0)} + 0,2x_2^{(0)} = 5,58 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = \begin{cases} x_1^{(2)} = 2 - 0,06x_2^{(1)} + 0,02x_3^{(1)} = 1,9202 \\ x_2^{(2)} = 3 - 0,03x_1^{(1)} + 0,05x_3^{(1)} = 3,2214 \\ x_3^{(2)} = 5 - 0,01x_1^{(1)} + 0,2x_2^{(1)} = 5,6188 \end{cases}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,91902 \\ 3,223334 \\ 5,625078 \end{pmatrix} \quad X^{(4)} = \begin{pmatrix} 1,91910152 \\ 3,22368114 \\ 5,62547588 \end{pmatrix}$$

La solution est $X = \begin{pmatrix} 1,91 \\ 3,22 \\ 5,62 \end{pmatrix}$

Ex 4) 1) Forme matricielle $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

2) $\det A = 180 \neq 0 \Leftrightarrow$ la solution est unique.

3) Méthode de Gauss-Seidel avec une précision de 10^{-3} .

$$\text{on a } \begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3 \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3 \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3,25 - 0,125x_2^{(k)} - 0,125x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1,4 - 0,2x_1^{(k+1)} + 0,2x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 1,4 - 0,2x_1^{(k+1)} + 0,2x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

$$\text{On a } X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = 3,25 - 0,125x_2^{(0)} - 0,125x_3^{(0)} = 3,25 \\ x_2^{(1)} = 1,4 - 0,2x_1^{(1)} + 0,2x_3^{(0)} = 0,75 \\ x_3^{(1)} = 1,4 - 0,2x_1^{(1)} + 0,2x_2^{(1)} = 0,9 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = \begin{cases} x_1^{(2)} = 3,25 - 0,125x_2^{(1)} - 0,125x_3^{(1)} = 3,04375 \\ x_2^{(2)} = 1,4 - 0,2x_1^{(2)} + 0,2x_3^{(1)} = 0,97125 \\ x_3^{(2)} = 1,4 - 0,2x_1^{(2)} + 0,2x_2^{(2)} = 0,9855 \end{cases}$$

$$X^{(3)} = \begin{cases} x_1^{(3)} = 3,25 - 0,125x_2^{(2)} - 0,125x_3^{(2)} = 3,00740625 \\ x_2^{(3)} = 1,4 - 0,2x_1^{(3)} + 0,2x_3^{(2)} = 0,99601875 \\ x_3^{(3)} = 1,4 - 0,2x_1^{(3)} + 0,2x_2^{(3)} = 0,9981225 \end{cases}$$

La solution est: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,0 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{pmatrix}$

SERIE N°3

Exercice n° 1 On considère la fonction $f(x) = \log x$ définie par le tableau suivant

x_i	20	25	30
f_i	1.30	1.39	1.47

1/ Montrer que le polynôme d'interpolation existe et unique.

2/ Construire le polynôme d'interpolation de **Lagrange** passant par ces points.

3/ Construire le polynôme d'interpolation de **Newton** passant par ces points.

4/ Trouver une approximation de $f(10)$.

Exercice n° 2 On considère la fonction f définie par le tableau des valeurs suivant :

x_i	-2	1	2
f_i	25	-8	-15

1/ Montrer que le polynôme d'interpolation existe et unique

2/ Construire ce polynôme par la méthode de **Newton**.

3/ Trouver une approximation de $f(-10)$

Solution série 3

Ex 1b) Le polynôme existe et unique $\Leftrightarrow \det \Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 625 & 25 & 1 \\ 900 & 30 & 1 \end{vmatrix} = -250 \neq 0.$$

2) Les polynômes de Lagrange $L_i(x_j) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-25)(x-30)}{(20-25)(20-30)} = \frac{1}{50}(x^2 - 55x + 750)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-20)(x-30)}{(25-20)(25-30)} = -\frac{1}{25}(x^2 - 50x + 600)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-20)(x-25)}{(30-20)(30-25)} = \frac{1}{50}(x^2 - 45x + 500)$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot L_i(x) = 1,3 L_0(x) + 1,39 L_1(x) + 1,47 L_2(x)$$

$$= \frac{1,3}{50}(x^2 - 55x + 750) - \frac{1,39}{25}(x^2 - 50x + 600) + \frac{1,47}{50}(x^2 - 45x + 500)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{50}(-0,002x^2 + 0,027x + 0,84)$$

3) On utilise les différences progressives :

x_i	f_i	$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$	$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$
20	1,30		
25	1,39	$\Delta f_0 = f_1 - f_0 = 1,39 - 1,30 = 0,09$	
30	1,47	$\Delta f_1 = f_2 - f_1 = 1,47 - 1,39 = 0,08$	$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = 0,08 - 0,09 = -0,01$

$$h = x_{i+1} - x_i \\ h = 5 \quad i=0, n-1$$

$$P(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$= 1,30 + \frac{0,09}{1 \cdot 5}(x-20) + \frac{-0,01}{2 \cdot (5)^2}(x-20)(x-25)$$

$$= -0,0002x^2 + 0,027x + 0,84$$

4) $f(10) \approx P(10) = -0,0002(10)^2 + 0,027(10) + 0,84 = 1,09$.

Remarque Pour les points $x_0, x_1, \dots, x_n$ $\Delta = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$

$$\text{Ex 2) } \Delta = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

p212

2) On utilise les différences divisées puisque le pas h n'est pas constant

i	f_i	$1^{\text{ère}} \text{ DD}$	$2^{\text{ème}} \text{ DD}$
2	25	$[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{-8 - 25}{1 + 2} = -11$	$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-7 + 11}{2 + 2} = 1$
1	-8	$[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{-15 + 8}{2 - 1} = -7$	
2	-15		

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] + \dots$$

$$\dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]$$

$$= 25 + (x + 2) \cdot (-11) + (x + 2)(x - 1) \cdot (1)$$

$$P_2(x) = x^2 - 10x + 1$$

b) $f(-10) \approx P(-10) = (-10)^2 - 10(-10) + 1 = 201$

Série $n \leq L_1$

1) Méthode des trapèzes:

Formule des trapèzes: $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1)$ $h = x_1 - x_0$

Formule des trapèzes généralisée: $\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$ $h = x_i - x_{i-1}$

Pour $h = 9$

x_i	0	9
f_i	0	81,5

$$\int_{x_0}^{x_1} x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) = \frac{9}{2} (0 + 81,5) = 366,75$$

Pour $h = 3$

x_i	0	3	6	9
f_i	0	9,5	36,5	81,5

$$\int_{x_0}^{x_3} x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) = \frac{3}{2} (0 + 2(9,5) + 2(36,5) + 81,5) = 260,25$$

2) Méthode de Simpson:

Formule de Simpson: $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$ $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$

Formule de Simpson généralisée: $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n})$

Pour $h = 4,5$

x_i	0	4,5	9
f_i	0	20,74	81,5

$$\int_{x_0}^{x_2} x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{4,5}{3} (0 + 4(20,74) + 81,5) = 246,69$$

Pour $h = 2,25$

x_i	0	2,25	4,5	6,75	9
f_i	0	6,06	20,74	46,06	81,5

$$\int_{x_0}^{x_4} x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) = \frac{2,25}{3} (0 + 4(6,06) + 2(20,74) + 4(46,06) + 81,5) = 248,99$$