

2) Chap 3: Géométrie différentielle. Vecteurs, formes, géodésiques et Courbes.

1) L'espace temps comme variété différentielle:

Un modèle mathématique ^{simple} de l'espace-temps et le produit cartésien de 3 variables spatiales et d'une variable temporelle, et un pt dans cet espace à 4-D est considéré comme un événement $(t, \vec{r})$.

Dans l'espace-temps:
 Relativité Galiléenne $\rightarrow$ Groupe de Galilée

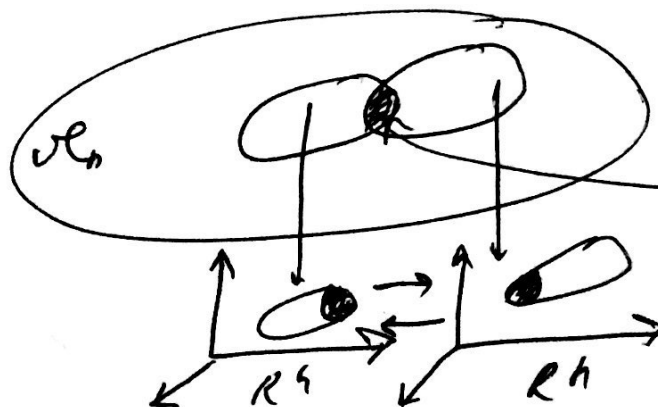
" spéciale $\rightarrow$ Groupe de Lorentz

Relativité Générale $\rightarrow$ Principe de RS

+ Courbes de l'espace-temps



On définit une variété M_n à n -dimensions de courbe arbitraire qui peut être considérée par une série de cartes (système de coordonnées)



Les cartes sont des sous-ensembles ouverts de M_n transposés entre les coords.

①

2) Vecteurs et Champs de vecteurs:

Vecteurs de l'espace Euclidien à 3 dim (flat) $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{V} = V^i \vec{e}_i \quad (1)$$

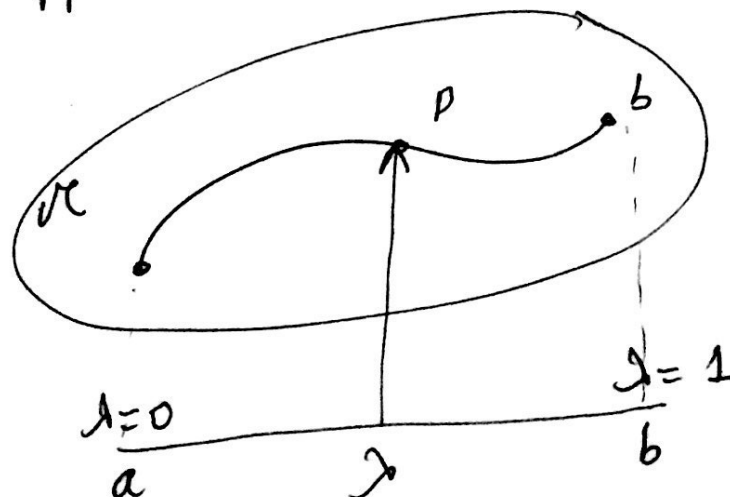
où $\{\vec{e}_i\}$ sont les vecteurs de base et V^i les composantes dans cette base.

Pour généraliser (1) à un espace-temps de dimension quelconque on écrit:

$$\vec{V} = V^\mu e_\mu, \quad \mu = \overline{0,3} \quad (2)$$

(On entoure les flèches)

Maintenant on introduit le concept de courbe dans une variété. Une courbe paramétrée dans une variété $\mathcal{M}$ est une application d'un intervalle dans $\mathbb{R}^1$ dans $\mathcal{M}$, alors qu'une carte locale sur $\mathcal{M}$ est une application dans $\mathbb{R}^n$.



(2)

L'intervalle $\mathbb{R}^1$, et par conséquent la courbe dans laquelle il est mappé, et paramétrisée par λ variant de 0 à 1. Un pt P est muni d'un système local de coordonnées $x^N(\lambda)$. Soit $f(x^N) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4)$, alors:

$$f(x^N(\lambda)) = g(\lambda)$$

La différentielle le long de la courbe est:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dg}{d\lambda} = \frac{dx^N}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^N}$$

qu'on met sous forme d'un opérateur:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^N}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^N} \quad (3)$$

En comparant avec (2) on peut identifier $(dx^N/d\lambda)$ avec les composantes des vecteurs tangent à la courbe, $\frac{\partial}{\partial x^N}$ comme les vecteurs de base, et $\frac{d}{d\lambda}$ comme le vecteur tangent à la courbe au pt P . Réellement ce sont des champs de vecteurs puisqu'ils varient avec P .
Donc, $\frac{d}{d\lambda}$ est un champ de vecteurs tangent qui change avec λ . On vient de créer une correspondance entre deux langages,

vecteurs $\longleftrightarrow$ tangente à la courbe (3)

Où en :

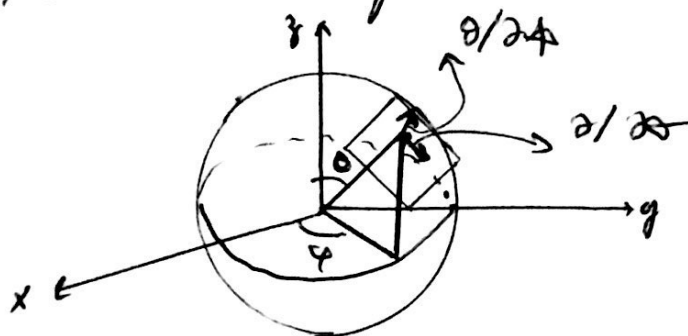
vecteur $\longleftrightarrow$ dérivée
(géométrie) (Analyse)

Les vecteurs définis en $\mathbb{R}^3$ appartiennent à l'espace tangent à $\mathcal{M}_n$ en P : T_P . On peut le visualiser comme étant le plan de vecteurs tangent à une surface courbe. addition ?

• Exemple, Vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en coords sphériques

$$\vec{r}' = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i}' + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j}' + r \cos \theta \vec{k}'$$

qui est le vecteur position au pt P .



on définit les vecteurs :

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{i}' + \sin \theta \sin \varphi \vec{j}' + \cos \theta \vec{k}'$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \vec{i}' + r \cos \theta \sin \varphi \vec{j}' - r \sin \theta \vec{k}'$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \vec{i}' + r \sin \theta \cos \varphi \vec{j}'$$

En utilisant la fig, on a les directions $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ qui sont respectivement perpendiculaires à la surface.

(4)

Car on a la normalisation de $\vec{r}', \vec{j}'$ et $\vec{k}'$ on a :

$$\begin{cases} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1, \quad \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2, \quad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Avec $\vec{e}'$; tentons de calculer :

$$\vec{r}' = \partial/\partial x, \quad \vec{j}' = \partial/\partial y, \quad \vec{k}' = \partial/\partial z$$

on a :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \quad (5)$$

D'après (4), ce système n'est pas orthonormé. Mais on peut définir un autre ensemble de vecteurs orthonormés :

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \vec{e}_r, \quad \hat{e}_\theta = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

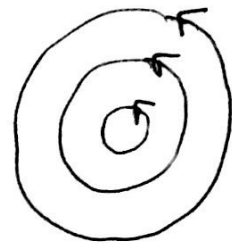
Nous allons généraliser la notion de vecteur défini en un pt P à celle d'un vecteur défini en tout pt de $\mathcal{E}$. En langage mathématique, ceci revient à trouver les solutions de l'éq : (5)

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^m).$$

Pour v^i connu, on peut trouver $x^i(t)$ qui s'appelle la courbe intégrale du Champ de vecteurs. Une variété remplie par ces courbes s'appelle une "Congruence".

Exemples de Champ de vecteurs (courbes intégrales)

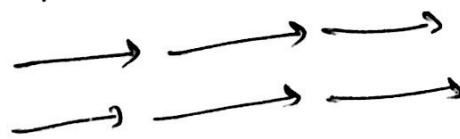
$$* \quad \frac{\partial}{\partial z} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$



$$* \quad r \frac{\partial}{\partial r} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$



$$* \quad y \frac{\partial}{\partial y}$$



$$* \quad \frac{\partial}{\partial x}$$

On peut remplir $\mathbb{R}^2$ avec des Congruences de ces Champs de vecteurs.

Commutateurs de 2 Champs de vecteurs:

$$\vec{V} = V^i \partial_i, \quad \vec{U} = U^m \partial_m$$

$$\begin{aligned}
 [\vec{v}, \vec{u}]f &= v^i \partial_i (u^m \partial_m f) - u^m \partial_m (v^i \partial_i f) \\
 &= \left(v^i \frac{\partial u^m}{\partial x^i} - u^m \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right) \partial_m f \\
 &= W^m \partial_m f
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{[\vec{v}, \vec{u}] = \vec{W}}$$

Donc: le crochet de Lie (commutateur) de deux champs de vecteurs est un champ de vecteurs.

Bases holonomes et non-holonomes:

$$\text{si } [\vec{e}_i, \vec{e}_k] = 0$$

on dit que la base $\{\vec{e}_i\}$ est holonome.

$$\text{si } [\vec{e}_i, \vec{e}_k] \neq 0$$

on dit que la base $\{\vec{e}_i\}$ est non-holonome.

Exercice: Déterminer la nature des bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$ et $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$.

En général le crochet de Lie des vecteurs d'une base s'écrit:

$$\textcircled{7}$$

$$[\vec{e}_i, \vec{e}_k] = C^m_{ik} \vec{e}_m$$

où C^m_{ik} sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie.

Exercice: Donner les constantes de structure dans le cas de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$.

On passe maintenant un langage avec lequel on se sent le mieux. Il s'agit à montrer qu'il est indépendant du système de coordonnées.

Soit la transf: $x^N \longrightarrow x'^N$

$$V^N \longrightarrow V'^N = V^\lambda \frac{\partial x'^N}{\partial x^\lambda}$$

et :

$$\vec{e}_N = \frac{\partial}{\partial x^N} \longrightarrow \vec{e}'_N = \frac{\partial}{\partial x'^N} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^N} \vec{e}_\lambda$$

et alors:

$$\begin{aligned} \vec{V} = V^N \vec{e}_N &\longrightarrow \vec{V}' = V'^N \vec{e}'_N = \frac{\partial x'^N}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^N} V^\lambda \vec{e}_\mu \\ &= \delta^\mu_\lambda V^\lambda \vec{e}_\mu \\ &= V^\lambda \vec{e}_\lambda \\ &= \vec{V} \end{aligned}$$

(P)

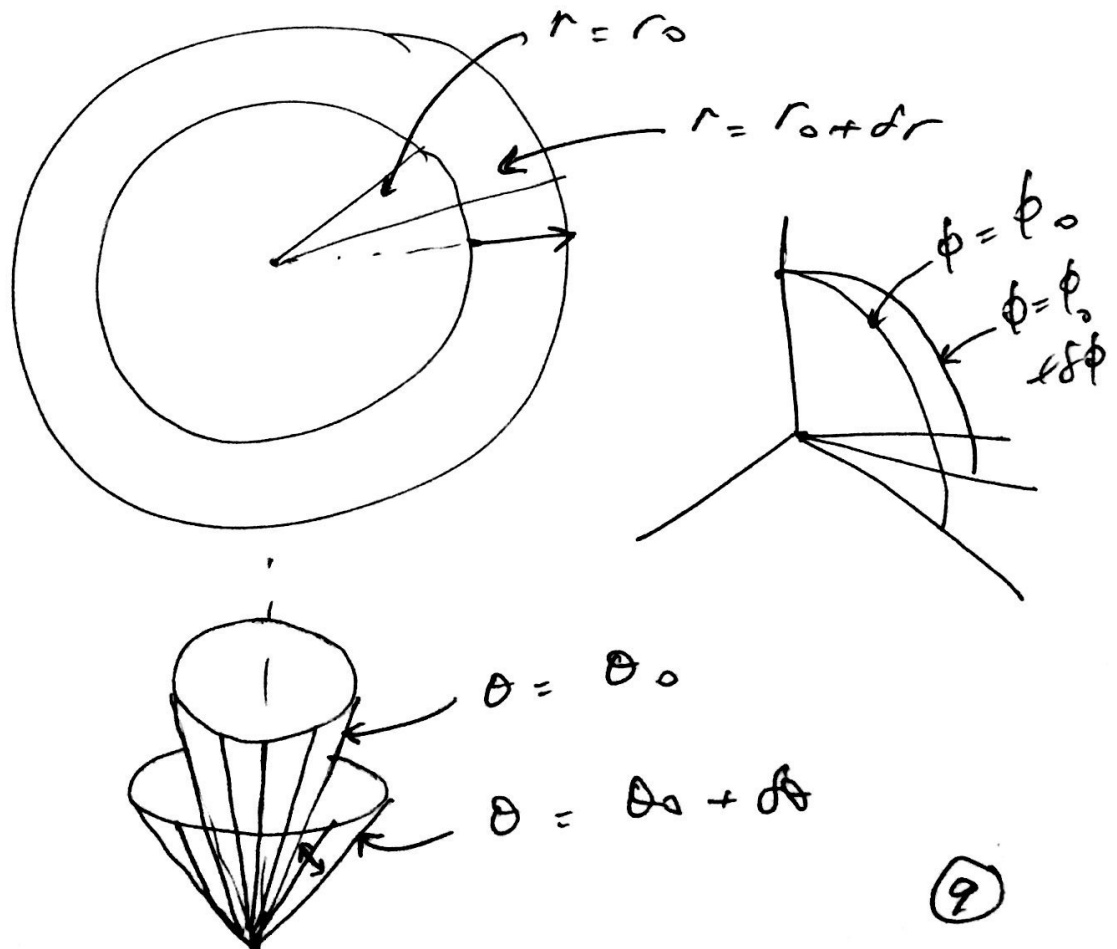
3) Les 1-formes: Nous allons introduire d'abord le gradient d'une fonction scalaire:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_3$$

Pour une surface S^2 dans $\mathbb{R}^3$ ($r = r_0$) on a:

$$\vec{\nabla} r = \vec{e}_r, \quad \vec{\nabla} \theta = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta, \quad \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \vec{e}_\phi$$

On remarque que les gradients sont proportionnels aux vecteurs de l'espace tangent à S^2 .
 → Conceptuellement les gradients et les vecteurs de base sont différents: Les vecteurs de base sont associés au choix de coordonnées, alors que les gradients sont associés au choix "de plus grande pente":



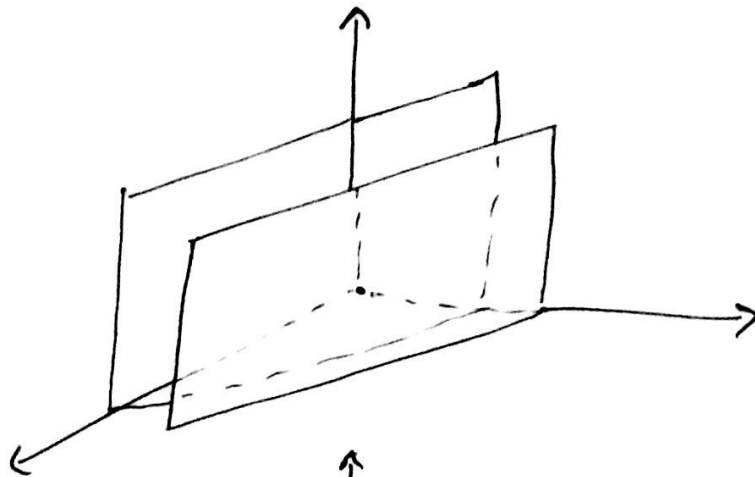
(9)

Pour voir cette différence on utilise un syst de coords non orthogonales dans $\mathbb{R}^3$:

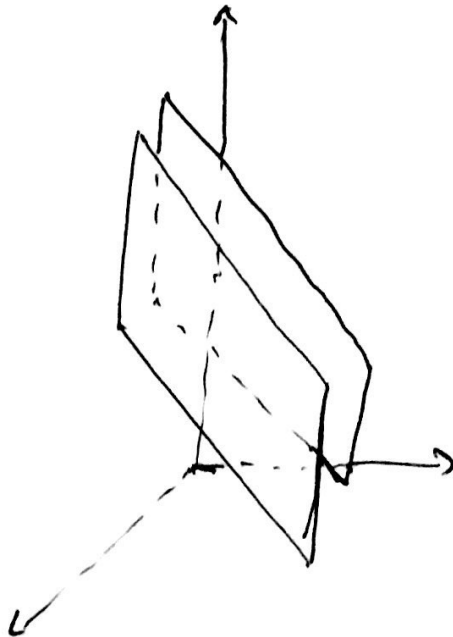
$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = 2uv + w$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}(x+y), \quad v = \frac{1}{2}(x-y), \quad w = z - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

On voit que $u = \text{cte}$ et $v = \text{cte}$ sont des surfaces planes, alors que $w = \text{cte}$ est une hyperboloïde :

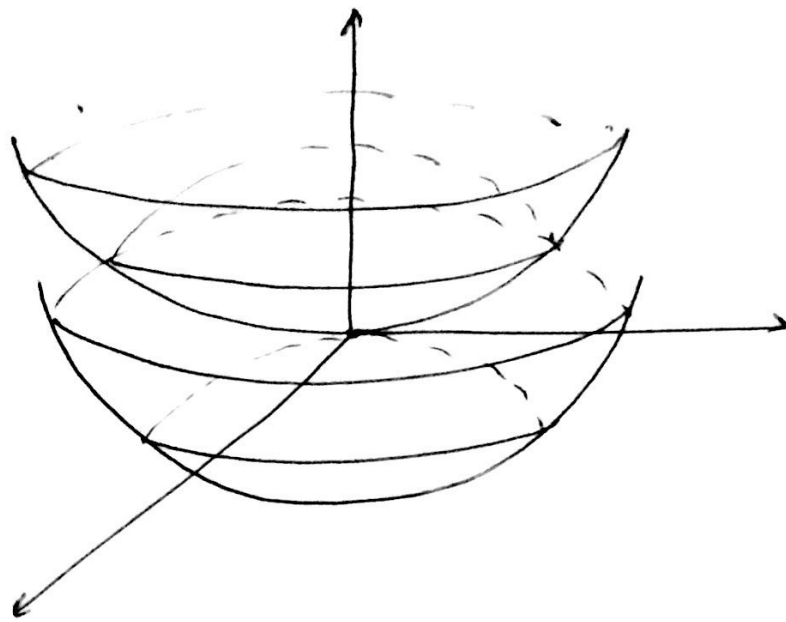


$$u = \text{cte}$$



$$v = \text{cte}$$

17



on a : $\vec{r} = (u+v)\vec{i}' + (u-v)\vec{j}' + (2uv+w)\vec{k}'$

$$\vec{e}'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{i}' + \vec{j}' + 2v\vec{k}'$$

$$\vec{e}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{i}' - \vec{j}' + 2u\vec{k}'$$

$$\vec{e}'_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \vec{k}'$$

Ce ne sont pas 4 vecteurs unitaires, et en plus :

$$\vec{e}'_u \cdot \vec{e}'_v = 4uv$$

$$\vec{e}'_u \cdot \vec{e}'_w = 2v$$

$$\vec{e}'_v \cdot \vec{e}'_w = 2u$$

et donc ne sont pas orthogonaux.

Colonne de gauche de ces vecteurs : $\vec{e}'_u, \vec{e}'_v, \vec{e}'_w$

$$\vec{p}'_u = \vec{e}'_u = \frac{1}{2}(\vec{i}' + \vec{j}')$$

$$\vec{p}'_v = \vec{e}'_v = \frac{1}{2}(\vec{i}' - \vec{j}')$$

$$\vec{p}'_w = \vec{e}'_w = - (u+v)\vec{i}' + (u-v)\vec{j}' + \vec{k}'$$

(11)

tels que :

$$\vec{e}^N \cdot \vec{e}_u = \vec{e}^v \cdot \vec{e}_v = \vec{e}^w \cdot \vec{e}_w = 1$$

$$\vec{e}^u \cdot \vec{e}_v = \vec{e}^v \cdot \vec{e}_w = \vec{e}^w \cdot \vec{e}_u = 0$$

On voit que le gradient est le "dual" du vecteur de base. Ils sont l'analogue des vecteurs de la matrice réciproque en physique du solide. On les appelle les 1-formes.

— 0 —

Nous allons généraliser les notions de vecteurs et duals en adoptant les indices grecs $\mu, \nu, \dots$:

- vecteurs sur la base $\{\vec{e}_\mu\}$:

$$\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$$

(autres
grecs)

- duals ou 1-forme ω sur la base $\{\vec{\theta}^\mu\}$:

$$\vec{\omega} = \omega_\mu \vec{\theta}^\mu$$

La dualité entre les 2 bases s'exprime par :

$$\langle \vec{\theta}^\mu, \vec{e}_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$$

On peut écrire alors :

$$\langle \vec{\omega}, \vec{V} \rangle = \omega_\mu V^\mu \langle \vec{\theta}^\mu, \vec{e}_\mu \rangle = \omega_\mu V^\mu$$

De la fig (9) on peut schématiser les 1- formes
Comme des surfaces parallèles percées par 4 verveux.

Hisser-Thorn-Wheeler (1973) → bangs of the bell
 "Quand V passe la surface w , $w_N V^N$ est le
 nombre bangs".

→ $\vec{e}_N$ vecteurs de base dans le fibre tangent

$\rightarrow \vec{ON}$ " " " " " Constant

On peut écrire aussi la relation de dualité sous forme:

$$\langle \vec{\omega}, \vec{v} \rangle = \vec{\omega}(\vec{v}) = \omega_\mu v^\mu$$

Le felle sono buone!

$$V^N = \langle \vec{\theta}^N, \vec{v} \rangle = \vec{\theta}^N(\vec{v}) : \vec{v} \rightarrow V^N$$

$$\vec{w}_j = \langle \vec{w}, \vec{e}_j \rangle = \vec{w}(\vec{e}_j) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

qui m'ontent qu'on peut: →

- Rapper un vecteur V dans l'un de ses $\text{Cotes } V^N$

- Le vecteur de base e_N mappe la 1-forme $\vec{w}$ dans l'une de ses cpts w_N .

C'est pour cette raison la 1-forme $\vec{\omega}$ est le dual de la base $\{\vec{e}_\alpha\}$ et que l'espace n -dim de 1-formes et l'espace dual T_P^* à l'espace tangent T_P .

Il y a encore une autre notation à introduire. On a déjà vu que :

$$\vec{e}_N = \partial / \partial x^N$$

De même on fait :

$$\vec{\theta}^N = dx^N$$

alors :

$$\langle dx^N, \frac{\partial}{\partial x^N} \rangle = \delta^N_N$$

La 1-forme dx^N est différente de l'élément infinitésimal dx^N . dx^N n'est pas un nombre mais un élément de l'espace cotangent T_p^* .

On peut écrire alors :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^N} dx^N$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\langle df, \frac{\partial}{\partial x^N} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^N}}$$

Règles de transformation :

- base : $x^N \longrightarrow x'^N$
 $\vec{\theta}^N \longrightarrow \vec{\theta}'^N = \frac{\partial x'^N}{\partial x^N} \vec{\theta}^N$

- Cotes : $\omega_N \longrightarrow \omega'_N = \frac{\partial x^N}{\partial x'^N} \omega_N$

alors : $\omega \longrightarrow \omega'_N \vec{\theta}'^N = \frac{\partial x^N}{\partial x'^N} \frac{\partial x'^N}{\partial x^K} \omega_K \vec{\theta}^K = \omega_K \vec{\theta}^K = \omega$
 (14)

Donc: ω est un invariant.

Verifions: Il se transforme de manière Covariante
1-forme. Elle " " " " Covariante.

$$V^\mu(x) \Rightarrow V'^\mu(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}(x) V^\nu(x)$$

$$V_\mu(x) \Rightarrow V'_\mu(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}(x) V_\nu(x)$$

Exercice: On va travailler dans $\mathbb{R}^2$ du le
système de coordonnées polaire

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Soit le vecteur V
de Cpts Contravariants (V^x, V^y) , (V^r, V^θ) .

- 1 - Calculer V^r et V^θ
- 2 - " V_r et V_θ . Est ce que
les relations trouvées correspondent aux
relations ~~normales~~ ordinaires entre Cpts
Contravariants et Covariants.

- Si on note les cpts ordinaires covariants
par $\bar{V}_r$ et $\bar{V}_\theta$, trouver la relation
entre $\bar{V}_r$ et V_r , et entre $\bar{V}_\theta$ et V_θ .

- 3 - Discuter vos résultats et Conclure.

4) Tenseurs: On définit un tenseur $\binom{r}{s}$ comme un objet géométrique de composantes dans l'espace formé par le produit cartésien de r bases de vecteurs et de s bases de 1-formes:

$$\Pi = T^{\alpha \dots \beta}_{\lambda \dots \mu} e_\alpha \otimes \dots \otimes e_\beta \otimes \theta^\lambda \otimes \dots \otimes \theta^\mu$$

Les $T^{\alpha \dots \beta}_{\lambda \dots \mu}$ sont les Cpts de Π sur la base.

On a:

$$\text{Tenseur } \binom{1}{0} \equiv \text{vecteur}$$

$$\text{Tenseur } \binom{0}{1} \equiv 1\text{-forme.}$$

Généralement on enlève le produit cartésien et on écrit tout simplement:

$$\Pi = T^{\alpha \dots \beta}_{\lambda \dots \mu} e_\alpha \dots e_\beta \theta^\lambda \dots \theta^\mu$$

ou

$$T^{\alpha \dots \beta}_{\lambda \dots \mu} = \Pi / (\theta^\lambda, \dots, \theta^\mu, e_\alpha, \dots, e_\beta)$$

et la loi de transf:

$$T'^{\alpha' \dots \beta'}_{\lambda' \dots \mu'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{\lambda'}} \dots \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} T^{\alpha \dots \beta}_{\lambda \dots \mu}$$

en un pt x .

(15)

Contraction:

Le Tenseur $\binom{r}{s}$ est dit de rang $(r+s)$.

En posant un indice contravariant égal à un indice covariant et en sommant sur cet indice, on se dit alors le rang du tenseur de 2.

Exemple:

$$\begin{aligned} T'^{\alpha\beta} &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^N}{\partial x'^{\alpha}} T^{\kappa\lambda}_N \\ &= \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \delta^N_k T^{\kappa\lambda}_N \\ &= \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} T^{\kappa\lambda}_k \end{aligned}$$

qui est le rang de l'ordre d'un vecteur.

Symétrie et antisymétrie:

- Tenseur symétrique $\binom{r}{s}$

$$T^{(\kappa \dots \lambda)}_{\mu \dots \nu} = \frac{1}{r!} \left\{ \sum_P (\kappa \dots \lambda) \right\} T^{\kappa \dots \lambda}_{\mu \dots \nu}$$

- Tenseur antisymétrique $\binom{r}{s}$

$$T^{\kappa \dots \lambda}_{[\mu \dots \nu]} = \frac{1}{r!} \left\{ \text{Somme alternée de Toutes les permutations des indices } \mu \dots \nu \text{ de } T^{\kappa \dots \lambda}_{\mu \dots \nu} \right\}$$

Exemples,

$$T^{(k\lambda)}_N = \frac{1}{2} (T^{k\lambda}_N + T^{\lambda k}_N)$$

$$T^{[k\lambda]}_N = \frac{1}{2} (T^{k\lambda}_N - T^{\lambda k}_N)$$

$$T^{[k\lambda N]}_{\rho\sigma} = \frac{1}{6} (T^{k\lambda N}_{\rho\sigma} + T^{\lambda k N}_{\rho\sigma} + T^{N k \lambda}_{\rho\sigma} - T^{k N \lambda}_{\rho\sigma} - T^{N \lambda k}_{\rho\sigma} - T^{\lambda k N}_{\rho\sigma})$$

Un tenseur est symétrique si :

$$T^{k\lambda}_N = T^{(k\lambda)}_N \Rightarrow T^{k\lambda}_N = T^{\lambda k}_N$$

et il est antisymétrique si :

$$T^{k\lambda}_N = T^{[k\lambda]}_N \Rightarrow T^{k\lambda}_N = -T^{\lambda k}_N$$

Les notions de symétrie et antisymétrie ont un caractère tensoriel, et sont donc valable $\forall$ la base :

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} T^{\rho\sigma} = - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} T^{\sigma\rho} \\ &= - \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} T^{\sigma\rho} = - T'^{\nu\mu} \end{aligned}$$

et de même pour un tenseur symétrique. ⑧

On peut aussi travailler avec le tenseur lui-même au lieu de ses Cptes:

$$S = S^{\mu\nu} e_\mu e_\nu$$

$$S^{\mu\nu} = S(\theta^\mu, \theta^\nu)$$

et pour l'antisymétrie on a:

$$S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu} \Rightarrow S(\theta^\mu, \theta^\nu) = -S(\theta^\nu, \theta^\mu)$$

et cette propriété est valable $\forall w$ et σ :

$$S(w, \sigma) = -S(\sigma, w)$$

5) Formes différentielles. dualité de Hodge.

Les 1-formes sont les duals des vecteurs. Elles sont aussi duals des lignes. L'interprète de 1-forme le long d'une ligne est un nbre.

En effet considérons l'exemple dans $\mathbb{R}^3$:

$$w = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$$

$$\int_C w = \text{nombre.}$$

On appelle une ligne une 1-Chaine. On a alors une dualité entre 1-forme et 1-Chaine.

On peut aussi travailler avec le tenseur lui-même au lieu de ses Cptes:

$$g = g^{\mu\nu} e_\mu e_\nu$$

$$g^{\mu\nu} = g(\partial^\mu, \partial^\nu)$$

et pour l'antisymétrie on a:

$$g^{\mu\nu} = -g^{\nu\mu} \Rightarrow g(\partial^\mu, \partial^\nu) = -g(\partial^\nu, \partial^\mu)$$

et cette propriété est valable $\forall w$ et σ :

$$g(w, \sigma) = -g(\sigma, w)$$

5) Formes différentielles. dualité de Hodge.

Les 1-formes sont les duals des vecteurs. Elles ont aussi duals des lignes. L'intégrale de 1-forme le long d'une ligne est un nbre.

En effet considérons l'exemple dans $\mathbb{R}^3$:

$$w = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$$

$$\int_C w = \text{nombre.}$$

On appelle une ligne une 1-Chaine. On a alors une dualité entre 1-forme et 1-Chaine.