

On peut aussi travailler avec le tenseur lui-même au lieu de ses Cptes :

$$g = g^{\mu\nu} e_\mu e_\nu$$

$$g^{\mu\nu} = g(\theta^\mu, \theta^\nu)$$

et pour l'antisymétrie on a :

$$g^{\mu\nu} = -g^{\nu\mu} \Rightarrow g(\theta^\mu, \theta^\nu) = -g(\theta^\nu, \theta^\mu)$$

et cette propriété est valable $\forall \omega$ et σ :

$$g(\omega, \sigma) = -g(\sigma, \omega)$$

5) Formes différentielles. dualité de Hodge.

Les 1-formes sont les duales des vecteurs. Elles sont aussi duales des lignes. L'intégrale de 1-forme le long d'une ligne est un nbre.

En effet considérons l'exemple dans $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$$

$$\int_C \omega = \text{nombre.}$$

On appelle une ligne une 1-Chaine. On a alors une dualité entre 1-forme et 1-Chaine.

On peut généraliser cette définition comme suit:

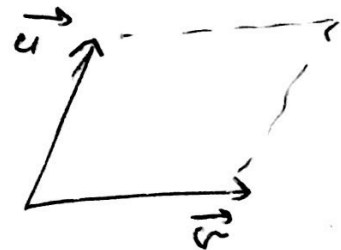
C_0 :	0 - chaîne:	point
C_1 :	1 - chaîne:	ligne
C_2 :	2 - chaîne:	aire
C_3 :	3 - chaîne:	volume
C_4 :	4 - chaîne:	4 - volume
		$\vdots$

* 2 - chaîne:

$$\int_{C_2} \omega_2 = \text{nombre}$$

Considérons l'aire du parallélogramme formé par 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$A = |\vec{v} \wedge \vec{u}|$$



Dans le plan (xy) on a:

$$\pm A = v_x u_y - v_y u_x = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ u^1 & u^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{ou} \quad v^i = dx^i(\vec{v})$$

$$u^i = dx^i(\vec{u})$$

On définit la 2-forme par:

$$\omega_2 = dx^i \wedge dx^k = dx^i \otimes dx^k - dx^k \otimes dx^i$$

Alors:

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dx^k(\vec{v}, \vec{u}) &= dx^i(\vec{v}) dx^k(\vec{u}) - dx^k(\vec{v}) dx^i(\vec{u}) \\ &= v^i u^k - v^k u^i \\ &= \begin{vmatrix} v^i & v^k \\ u^i & u^k \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En général, on a dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées
Cartésiennes:

$$\omega_2 = a_{ik} dx^i \wedge dx^k$$

$$\int_S \omega_2 = \text{nombre.}$$

on a les propriétés suivantes:

$$dx^1 \wedge dx^2 = - dx^2 \wedge dx^1$$

$$dx^1 \wedge dx^1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = (a_{12} - a_{21}) dx^1 \wedge dx^2 + (a_{23} - a_{32}) dx^2 \wedge dx^3 + (a_{31} - a_{13}) dx^3 \wedge dx^1}$$

et on remarque qu'il faut arriver que
 a_{ik} soit antisymétrique:

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

(21)

et on a alors:

$$\boxed{w_2 = P dx^2 \wedge dx^1 + Q dx^3 \wedge dx^1 + R dx^1 \wedge dx^2}$$

On remarque qu'on a 3 formes pour la 2-forme.

→ 3-chaîne: de la même manière on définit

la 3-forme par:

$$w_3 \sim dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

On a:

$$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \varepsilon^{ijk} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

et par conséquent il n'y a qu'une seule forme de base de la 3-forme. On écrit alors:

$$\boxed{w_3 = F(x, y, z) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3}$$

avec: $\int_{C_3} w_3 = \text{nombre.}$

Il est clair que dans $\mathbb{R}^3$ il n'y a pas de p -formes avec $p > 3$.

p-forms de $\mathbb{R}^3$

p	p-forme	Base (Cartésienne)	Dim
0	$f(x^1, x^2, x^3)$	1	1
1	$a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3$	(dx^1, dx^2, dx^3)	3
2	$P dx^2 \wedge dx^3 +$ $Q dx^3 \wedge dx^1 +$ $R dx^1 \wedge dx^2$	$(dx^2 \wedge dx^3,$ $dx^3 \wedge dx^1,$ $dx^1 \wedge dx^2)$	3
3	$F(x, y, z) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$	$(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)$	1

Exercice: Trouver toutes les p-formes dans l'espace-temps de Minkowski.

Remarquons d'abord que dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathcal{H}_{\text{Mink}}$ le nombre de p-formes indépendantes est le même que celui de (n-p)-formes dans un espace à n-dimensions. Pour n=3, on a 3 1-formes et $(3-1)=2$ de 2-formes. C'est un résultat général. C'est une application de:

Espace des p-formes $\longrightarrow$ Espace des (n-p)-formes

(23)

Cette application s'exprime par le produit étoile de Hodge (Opérateur de Hodge).

$$\boxed{* (p\text{-formes}) \Rightarrow (n-p)\text{-formes}}$$

La formule générale est,

$$* (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon^{i_1 \dots i_p}_{j_{p+1} \dots j_n} dx^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}$$

Attention: Dans l'espace-temps de Minkowski (La métrique n'est pas définie positive) Les indices sont élevés ou abaissés avec le tenseur métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

on a la Convention:

$$\varepsilon^{0123} = 1 = - \varepsilon_{0123}$$

Exemple: $n = 2$

$$* 1 = \frac{\varepsilon_{ij}}{2!} dx^i \wedge dx^j = dx \wedge dy \quad (24)$$

$$* dx = dx^1 = \varepsilon_{1i} dx^i = dy$$

$$* dy = - dx, \quad * dx \wedge dy = \varepsilon_{21} = 1$$

$$** 1 = 1$$

$$** dx = -dx, \quad ** dy = dy$$

$$** dx \wedge dy = dx \wedge dy.$$

Exercice: Appliquer l'opérateur $*$ et $**$ pour $n=3$ à : 1 , dx , $dx \wedge dy$ et $dx \wedge dy \wedge dz$.

Pour une p -forme ω_p de un espace à métrique définie positive on a :

$$** \omega_p = (-1)^{p(n-p)} \omega_p$$

Dans l'espace-temps de Minkowski ($n=4$) on a :

$$** \omega_p = (-1)^{p-1} \omega_p$$

Exercice: On considère les 2-formes suivantes,
 $\omega = a_i \theta^i$, $\sigma = b_k \theta^k$

* Montrer que : $\omega \wedge \sigma = C_{ik} \theta^i \wedge \theta^k$

* Généraliser ce résultat au cas où ω est une p -forme et σ une q -forme. (25)

Opérateur de dérivée extérieure: théorème de Stokes Généralisé.

Considérons le théorème de Stokes:

$$\underbrace{\int \vec{A} d\vec{S}}_{\text{intégrale d'une 2-forme}} = \underbrace{\int \vec{\nabla} \wedge \vec{A} d\vec{\Sigma}}_{\text{intégrale d'une 1-forme}}$$

Ce qui implique l'existence d'une relation entre la 1-forme et la 2-forme. De la même manière le théorème de Gauss reliant l'intégrale sur une surface à l'intégrale sur un volume implique l'existence d'une relation entre la 2-forme et la 3-forme.

Pour trouver ces relations nous allons définir un opérateur de dérivée extérieure d :

$$w = a_{1, \dots, p}(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$$
$$dw = \frac{\partial a_{1, \dots, p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$$

on remarque que dw est une $(p+1)$ -forme.

Exemple: 1-forme de $\mathbb{R}^3$:

$$\theta = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

(2b)

$$d\theta = \frac{\partial a_x}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial a_x}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial a_y}{\partial x} dx \wedge dy$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial a_y}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial a_z}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial a_z}{\partial y} dy \wedge dz \\
& = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\
& + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx
\end{aligned}$$

qui est une 2-forme.

Exercice: Soit la 2-forme dans $\mathbb{R}^3$ suivante:

$$\omega = b_x dy \wedge dz + b_y dz \wedge dx + b_z dx \wedge dy$$

Calculer $d\omega$.

Exercice: Utiliser l'exemple ci-dessus pour montrer que $d^2\theta = 0$.

Au fait ceci est un résultat général:

$$\boxed{d^2 = 0}$$

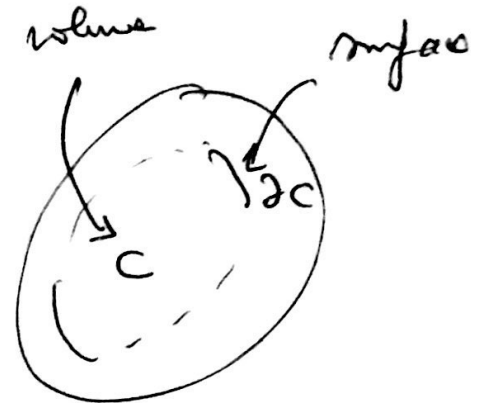
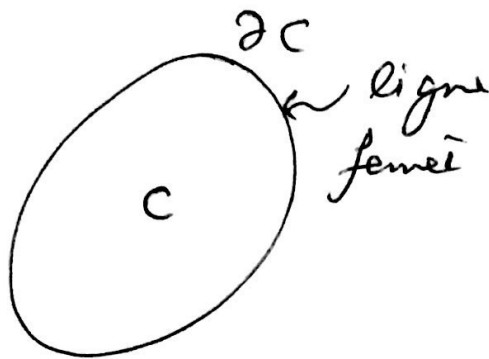
qui s'appelle le lemme de Poincaré.

Exercice: Si ω est une p -forme et σ une q -forme, montrer que:

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge d\sigma$$

Théorème généralisé de Stokes:

Soit ω une p -forme et c une $(p+1)$ -chaîne.
On définit ∂ l'opérateur de frontières sur la chaîne, de telle sorte que ∂c est la frontière de c ; ∂c est une p -chaîne.



On remarque que dans le 2 cas, la frontière est fermée; ∂c n'a pas de frontière:

$$\partial(\partial c) = \partial^2 c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial^2 = 0}$$

c'est un résultat général pour les p -formes.

$\partial^2 = 0$ et le dual de $d^2 = 0 \Rightarrow \partial$ est le dual de d .

Avec toutes ces définitions, on annonce le théorème généralisé de Stokes:

$$\boxed{\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega}$$

(28)

Les équations de Maxwell et formes différentielles:

Nous allons reformuler les eqs de Maxwell en utilisant le langage des formes. On pose $c=1 \Rightarrow x^0 = t$.

On définit les formes suivantes:

* 1-forme A : $A = A_\mu dx^\mu$

* 2-forme F : $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$
 $= -F_{0i} dx^i \wedge dx^0 + F_{ij} dx^i \wedge dx^j$

$$\Rightarrow F = E_i dx^i \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$
$$= (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

On calcule la 3-forme dF :

$$dF = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dt + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz \wedge dt$$
$$+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \wedge dt + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dx \wedge dy \wedge dz$$
$$+ \frac{\partial B_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx$$
$$+ \frac{\partial B_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \quad (24)$$

On calcule la 2-forme dual de F :

$$\begin{aligned} *F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} * dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= F_{10} * dx \wedge dt + F_{20} * dy \wedge dt + F_{30} * dz \wedge dt \\ &\quad + F_{12} * dx \wedge dy + F_{31} * dz \wedge dx + F_{23} * dy \wedge dz \\ &= -E_x dy \wedge dz - E_y dz \wedge dx - E_z dx \wedge dy \\ &\quad + (B_z dy + B_y dz + B_x dx) \wedge dt \end{aligned}$$

et la dérivée extérieure de $(*F)$:

$$\begin{aligned} d(*F) &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dx \wedge dy \wedge dz - \frac{\partial E_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz \\ &\quad - \frac{\partial E_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx - \frac{\partial E_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) dx \wedge dz \wedge dt \\ &\quad + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dt \\ &\quad + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz \wedge dt \end{aligned}$$

On écrit maintenant la 3-forme courant j ,

$$j = j_\mu * dx^\mu \quad (\text{b})$$

où :

$$f_\mu = (-\rho, \vec{J})$$

alors :

$$\begin{aligned} f &= f_0 * dx^0 + f_i * dx^i \\ &= -\rho * dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + J_x * dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + J_y * dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + J_z * dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation :

$$\boxed{d * F = j}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' &= \rho \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}' - \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = \vec{J}' \\ \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \end{aligned}$$

qui sont les équations inhomogènes de Maxwell.

et les équations homogènes de Maxwell sont,

$$\boxed{dF = 0.}$$

Le tenseur métrique:

Jusqu'à maintenant nous avons travaillé dans des espaces où existait la notion de pts et de voisinage, de manière on était capable de s'en servir et de définir des vecteurs et des formes différentielles. On a oublié une notion importante qui est la longueur d'un vecteur, on distance entre 2 pts. Pour la faire nous allons introduire le Tenseur métrique. Un espace général muni d'une métrique s'appelle Espace Riemannien.

Par définition le tenseur métrique mappe 2 vecteurs en un scalaire. On peut alors le définir comme le produit de deux 1-formes:

$$g(u, v) = u \cdot v$$

$$\begin{aligned} 1\text{-formes} &\longrightarrow dx^N \\ \text{vecteurs de base} &\longrightarrow e_N \end{aligned}$$

Avec: $\langle dx^N, e_N \rangle = \delta^N_N$

$$u = u^N e_N$$

et: $g = g_{N,N} dx^N \otimes dx^N$

(32)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g(u, v) &= g_{\mu\nu} \langle dx^\mu, u^\lambda e_\lambda \rangle \langle dx^\nu, v^k e_k \rangle \\
&= g_{\mu\nu} u^\lambda v^k \langle dx^\mu, e_\lambda \rangle \langle dx^\nu, e_k \rangle \\
&= g_{\mu\nu} u^\lambda v^k \delta^\mu_\lambda \delta^\nu_k \\
&= g_{\mu\mu} u^\lambda v^k \\
&= \text{al. } v
\end{aligned}$$

On teste par :

$$g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\mu} \langle dx^\mu, e_\mu \rangle \langle dx^\mu, e_\nu \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}}$$

Donc on a l'écriture :

$$\boxed{g(u, v) = g(e_\mu, e_\nu) u^\mu v^\nu}$$

Considérons la relation :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \tilde{dx}^\mu \tilde{dx}^\nu$$

ici $\tilde{dx}^\mu$ et la répartition entre 2 pts x^μ et $x^\nu + \tilde{dx}^\mu$. Ce n'est pas la forme. (35)

On va exprimer le déplacement $\tilde{\Delta}x^\mu$ par un vecteur Δ :

$$\Delta = \tilde{\Delta}x^\mu e_\mu$$

$$\Rightarrow g(\Delta, \Delta) = g_{\mu\nu} \tilde{\Delta}x^\mu \tilde{\Delta}x^\nu = d\lambda^2$$

Donc: le langage est le même que celui utilisé avec les formes.

Si on entre le symbole (x) on a:

$$g = d\lambda^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Espaces Riemannien et non-Riemannien

On va incorporer la tensor métrique dans notre discussion.

Exemple: E^3 (espace Euclidien à 3-dim).

En général: $g = g_{ik} \theta^i \otimes \theta^k$

En coordonnées cartésiennes, les 1-forms de base sont $\theta^i = dx^i$:

$$\theta^1 = dx^1 = dx, \theta^2 = dx^2 = dy, \theta^3 = dx^3 = dz$$

et $g_{ik} = \delta_{ik}$

(34)

$$\Rightarrow ds^2 = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

Les vecteurs duaux aux 1-formes sont:

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

avec: $\langle \otimes^m, e_n \rangle = \delta^m_n$

Espaces plats:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Dans le langage des formes on a:

$$ds^2 = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi$$

On a les choix suivants:

* base holonôme:

$$\theta^1 = dr, \quad \theta^2 = d\theta, \quad \theta^3 = d\varphi$$

dans ce cas:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Les vecteurs duaux sont alors donnés par:

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(3r)