

$$c-a-d: \quad e_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

* base non-orthogonale:

$$\theta^1 = dr, \quad \theta^2 = r d\theta, \quad \theta^3 = r \sin\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

= Cette forme du tenseur métrique est souvent dite "base orthogonale".

Pour les vecteurs duels on a alors:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_3 = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial r}} \right] \text{Exercice} =$$

On sait qu'une base non-orthogonale est caractérisée par $[e_i, e_k] \neq 0$. En effet:

$$[e_1, e_2] = -\frac{1}{r} e_2 \quad (\text{faire la suite}).$$

Dans les 2 bases, il est facile de montrer que

$$\langle \theta^N, e_\nu \rangle = \delta^N_\nu$$

Quelques remarques sur $g_{\mu\nu}$:

Environ d'abord:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu}) \quad (36)$$

Le 1^{er} terme est symétrique et le 2^{ème} antisymétrique.

Le 2^{ème} terme ne contribue pas à ds^2 . Alors on choisit $g_{\mu\nu}$ symétrique:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

D'autre part d'après la définition de $g_{\mu\nu}$:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

à chaque vecteur est associé une 1-forme, qu'on traduit comme l'association d'un vecteur contravariant V^μ avec un vecteur covariant V_μ , et donc $g_{\mu\nu}$ est utilisé pour abaisser ou élever un indice:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

On peut répéter cette opération plusieurs fois:

$$T_{\mu \dots \kappa}^{\nu \dots \rho} = g_{\mu\sigma} \dots g_{\kappa\tau} T^{\sigma \dots \tau \nu \dots \rho}$$

On définit l'inverse de $g_{\mu\nu}$ par:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$$

$\Rightarrow$

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu$$

(37)

Densités tensorielles: Eléments de volume

La question est de savoir comment se transforme un objet géométrique dans une transformation de coordonnées $x^N \rightarrow x'^N$.

On sait que:

$$T'^N{}_\nu = \frac{\partial x'^N}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} T^\rho{}_\tau$$

Voyons comment généraliser cette relation.

Soit, $J = \det \frac{\partial x'^N}{\partial x'^\nu}$

En 4D ceci donne:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x'^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x'^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x'^2} & \frac{\partial x'^0}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x'^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x'^0} & \frac{\partial x'^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x'^0} & \frac{\partial x'^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x'^3} \end{vmatrix}$$

On définit maintenant un objet appelé densité tensorielle de poids w , S^N , telle que:

$$S'^N{}_\nu = J^w \frac{\partial x'^N}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} S^\rho{}_\sigma \quad (38)$$

Cette définition reste valable $\forall$ le rang du tenseur.

Prenons le symbole de Levi-Civita $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$
Il est clair que c'est une densité tensorielle
de poids $w = 1$.

Exercice: Soit $T_{\kappa\lambda\mu\nu} = T_{[\kappa\lambda\mu\nu]}$
- Montrer que $T'^{0123} = J T_{0123}$
et $T'^{0123} = J^{-1} T_{0123}$

Exercice: Montrer que $\epsilon'^{\kappa\lambda\mu\nu} = \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$!

Considérons le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. On a:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu'}} g_{\rho\sigma}$$

Soit $g = \det(g_{\mu\nu})$ et $g' = \det(g'_{\mu\nu})$:

$$g' = \left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right)^2 g = J^2 g$$

Donc: g est une densité scalaire de poids $w = 2$.

On se dit que:

$$\boxed{\sqrt{g'} = J \sqrt{g}}$$

(39)

On a un espace où $g < 0$ on a:

$$\boxed{\sqrt{-g'} = \partial \sqrt{-g}}$$

Application à l'élément de volume: On considère un espace à n -dim avec la base de 1-forme $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$. L'élément de volume, qui est une n -forme, est donné par:

$$\eta = \sqrt{\pm g} \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n$$

Comme cas particulier on prend $n = 4$ (espace-temps habituel):

$$\begin{aligned} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} &= g_{\kappa\rho} g_{\lambda\sigma} g_{\mu\tau} g_{\nu\gamma} \epsilon^{\rho\sigma\tau\gamma} \\ &= g \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \end{aligned}$$

On définit:

$$d\tau = d\tau^4 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} dx^\kappa dx^\lambda dx^\mu dx^\nu$$

on fait $x \rightarrow x'$:

$$d\tau \rightarrow d\tau' = \frac{1}{4} \epsilon'_{\kappa\lambda\mu\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} dx^\rho dx^\sigma dx^\tau dx^\gamma$$

(40)

$$\Rightarrow d\tau' = \frac{1}{4!} \left(\det \frac{\partial x'}{\partial x} \right) \epsilon_{\rho\sigma\tau\lambda} dx^\rho dx^\sigma dx^\tau dx^\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{d\tau' = J^{-1} d\tau}$$

$$\text{ou : } J^{-1} = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g'}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{-g'} d\tau' = \sqrt{-g} d\tau}$$

et par conséquent l'élément de volume η est un invariant.

Dérivée absolue: Les formes de connexions:

Avant de traiter le cas général, on considère l'espace E^2 :

$$V = V^x e_x + V^y e_y \quad (\text{cartésiennes})$$

$$V = V^r e_r + V^\varphi e_\varphi \quad (\text{polaires})$$

$$\text{ou bien: } V = V^i e_i \quad (i=1, 2)$$

(41)

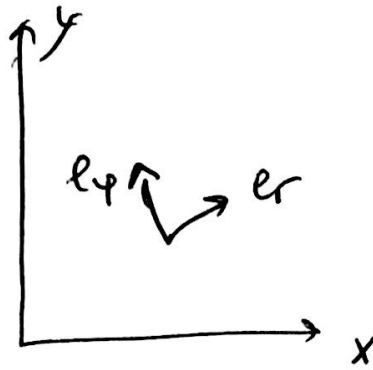
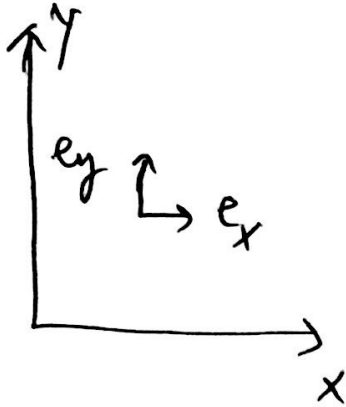
De façon analogue, on définit une 1-forme de E^2 :

$$\omega = \omega_i \theta^i$$

avec

$$\theta^i = (dx, dy) \text{ ou } \theta^i = (dr, d\varphi)$$

$$\text{ou } \theta^i = (dr, r d\varphi)_{nh}$$



En général les vecteurs de base varient. Alors on définit la dérivée absolue de V par:

$$\begin{aligned} \nabla_i V &= \nabla_i (V^m e_m) \\ &= (\partial_i V^m) e_m + V^m (\partial_i e_m) \\ &= V^m_{,i} e_m + V^m e_{m,i} \end{aligned}$$

Dans les coords cartésiennes, $e_{m,i} = 0$. Alors $V = \text{ste}$
 $\Rightarrow V^m_{,i} = 0$. Dans le cas général $V = \text{ste}$
 implique que:

$$V^m_{,i} e_m + V^m e_{m,i} = 0$$

(14)

Multiplions par la 1-forme θ^i et sommions sur i :

$$\nabla \vec{V} \equiv (\nabla_i \vec{V}) \vec{\theta}^i = (V^m_{,i} \vec{e}_m + V^m \vec{e}_{m,i}) \vec{\theta}^i$$

Ici aucune direction n'est spécifiée.

Exemple: $\mathbb{R}^2$ et Coords polaires.

On va calculer $e_{m,i}$: $e_{r,r}$, $e_{r,\phi}$, $e_{\phi,r}$, $e_{\phi,\phi}$.
 Dans le base holonome: $e_r = \frac{\partial}{\partial r}$, $e_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi}$:

$$e_r = \frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y = \cos \phi e_x + \sin \phi e_y$$

$$e_\phi = - (r \sin \phi) e_x + (r \cos \phi) e_y$$

On a: $|e_x| = |e_y| = 1$, $|e_r| = 1$, $|e_\phi| = r$

$$\Rightarrow e_{r,r} = 0, \quad e_{r,\phi} = \frac{1}{r} e_\phi$$

$$e_{\phi,r} = \frac{1}{r} e_\phi, \quad e_{\phi,\phi} = -r e_r$$

On voit que $e_{m,i}$ sont 4 vecteurs. On peut les écrire sous la forme:

$$e_{m,i} = \Gamma^k_{mi} e_k$$

Γ^k_{mi} : Coeff de connexion ou Coeff de Christoffel.

Dans $\mathbb{R}^2$ on a ($x^1 = r$, $x^2 = \phi$ et base holonome)

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^1_{22} = -r.$$

(43)

exercice: Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $\vec{e}_{m,i} = \gamma^k_{mi} \vec{e}_k$
 en considérant le base non-orthogonale.
 Calculer γ^k_{mi} .

En remplaçant $\vec{e}_{m,i}$ ds ∇V on obtient:

$$\begin{aligned} \nabla V &= (V^{\nu}_{,N} + \Gamma^{\nu}_{\lambda N} V^{\lambda}) \vec{e}_{\nu} \vec{\theta}^N \\ &= \underbrace{(V^{\nu}_{,N} + \Gamma^{\nu}_{\lambda N} V^{\lambda})}_{V^{\nu}_{;N}} \vec{e}_{\nu} \otimes \vec{\theta}^N \\ \Rightarrow \quad &\boxed{\nabla V = V^{\nu}_{;N} \vec{e}_{\nu} \otimes \vec{\theta}^N} \end{aligned}$$

C'est la dérivée absolue ou covariante de V .

On peut aussi introduire la 1-forme connexion:

$$\vec{\omega}^{\kappa}_{\lambda} = \Gamma^{\kappa}_{\lambda N} \vec{\theta}^N$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla \vec{V} = (dV^N + \omega^N_{\kappa} V^{\kappa}) \vec{e}_N}$$

Ces équations donnent:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \vec{e}_N &= \vec{\omega}^{\kappa}_N \vec{e}_{\kappa} \\ \nabla_N \vec{e}_{\nu} &= \Gamma^{\kappa}_{\nu N} \vec{e}_{\kappa} \\ \nabla_N \vec{V} &= \langle \nabla \vec{V}, \vec{e}_N \rangle \\ &= V^{\nu}_{;N} \vec{e}_{\nu} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \vec{a} \\ \text{à montrer} \end{array}$$

(44)

On va maintenant se finir la différentiation des 1-formes. Pour la suite on va simplement utiliser la qualité vecteur / formes.

Pour une 0-forme (scalair) on a (Base holonôme):

$$\begin{aligned} \nabla f &= df = \partial_\mu f dx^\mu \\ &= (\nabla_\mu f) \theta^\mu \quad : \quad \theta^\mu = dx^\mu \end{aligned}$$

or $\nabla f = (\nabla_\mu f) \theta^\mu \Rightarrow \nabla_\mu f = \partial_\mu f = f_{,\mu}$

Pour une 1-forme:

$$\langle dx^\mu, e_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$$

$$\Rightarrow \nabla \langle dx^\mu, e_\nu \rangle = 0 = \langle \nabla dx^\mu, e_\nu \rangle + \langle dx^\mu, \nabla e_\nu \rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \nabla dx^\mu, e_\nu \rangle &= - \langle dx^\mu, \nabla e_\nu \rangle \\ &= - \langle dx^\mu, \omega^\lambda_\nu e_\lambda \rangle \\ &= - \omega^\lambda_\nu \langle dx^\mu, e_\lambda \rangle \\ &= - \omega^\lambda_\nu \delta^\mu_\lambda \\ &= - \omega^\mu_\nu \end{aligned}$$

Maintenant on pose:

$$\nabla dx^\mu = \tilde{\omega}^\mu_\nu \otimes dx^\nu$$

$$\Rightarrow \langle \nabla dx^\mu, e_\nu \rangle = \tilde{\omega}^\mu_\nu$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega}^\mu_\nu = - \omega^\mu_\nu$$

$$\text{Si } \tilde{\omega}^\mu_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda \Rightarrow \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} = - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}$$

(45)

alors :

$$\begin{aligned}\nabla dx^\mu &= -\omega^\mu{}_\nu \otimes dx^\nu \\ &= -\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} dx^\lambda \otimes dx^\nu\end{aligned}$$

On voit que sur les 1-formes ∇ est équivalent à d !
 Donc pour les 1-formes de base θ^μ on a :

$$\nabla \theta^\mu = d\theta^\mu = -\omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu$$

↳ Eq. de structure de Cartan

Prendons une 1-forme générale A :

$$\begin{aligned}\nabla A &= \nabla (A_\mu dx^\mu) \\ &= dA_\mu \otimes dx^\mu - A_\mu \omega^\mu{}_\nu \otimes dx^\nu \\ &= A_{\mu,\nu} dx^\nu \otimes dx^\mu - A_\mu \omega^\mu{}_\nu \otimes dx^\nu \\ &= \underbrace{(A_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda)}_{A_{\mu;\nu}} dx^\nu \otimes dx^\mu\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\nabla A &= A_{\mu;\nu} dx^\nu \otimes dx^\mu \\ A_{\mu;\nu} &= A_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda\end{aligned}$$

qui donne la dérivée covariante d'un vecteur covariant.
Tenseurs : On commencera par le tenseur $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\vec{T} = t^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu$$

(46)

$$\nabla_\lambda \vec{t} = \nabla_\lambda (t^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu)$$

$$= (\partial_\lambda t^{\mu\nu}) \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu + t^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \vec{e}_\mu) \otimes \vec{e}_\nu + t^{\mu\nu} \vec{e}_\mu \otimes (\nabla_\lambda \vec{e}_\nu)$$

$$= (\partial_\lambda t^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} t^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\lambda} t^{\mu\rho}) \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu$$

$$\Rightarrow \nabla_\lambda \vec{t} = t^{\mu\nu}_{;\lambda} \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu$$

$$t^{\mu\nu}_{;\lambda} = \partial_\lambda t^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} t^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\lambda} t^{\mu\rho}$$

Cette relation se généralise comme suit :

$$\begin{aligned} T^{\kappa\lambda\dots}_{\mu\nu\dots j\rho} &= \nabla_\lambda T^{\kappa\lambda\dots}_{\mu\nu\dots j\rho} \\ &+ \Gamma^\kappa_{\sigma\lambda} T^{\sigma\lambda\dots}_{\mu\nu\dots j\rho} + \left(\begin{array}{l} \text{de même} \\ \text{pour chaque} \\ \text{indice sup} \end{array} \right) \\ &- \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} T^{\kappa\lambda\dots}_{\sigma\nu\dots j\rho} - \left(\begin{array}{l} \text{de même} \\ \text{pour chaque} \\ \text{indice inf} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} A = A_{\mu\nu} dx^\mu \text{ qui est un tenseur } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \downarrow \\ \nabla A \text{ est un tenseur } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu \text{ est un tenseur } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \downarrow \\ \nabla \vec{V} \text{ est un tenseur } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \textcircled{47}$$

Le tenseur métrique g relie le vecteurs et les 1-forms, c'est un tenseur $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soit: $\vec{A} = \vec{g}(\vec{V}, \dots) \Leftrightarrow A_\nu = g_{\nu\mu} V^\mu$

et: $\nabla \vec{A} = \vec{g}(\nabla \vec{V}, \dots) \Leftrightarrow A_{\nu;s} = g_{\nu\mu} V^\mu_{;s}$

On a aussi en utilisant la règle de Leibniz:

$$\nabla \vec{A} = \nabla [\vec{g}(\vec{V}, \dots)] = \nabla \vec{g}(\vec{V}, \dots) + \vec{g}(\nabla \vec{V}, \dots)$$

$\Rightarrow \nabla \vec{g} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla g_{\mu\nu} = 0}$
 qu'on appelle "Condition de Compatibilité Métrique" CCM.

En notation, on a:

$$\begin{aligned} A_{\nu;s} &= (g_{\nu\mu} V^\mu)_{;s} \\ &= g_{\nu\mu;s} V^\mu + g_{\nu\mu} V^\mu_{;s} \end{aligned}$$

$\Rightarrow g_{\nu\mu;s} V^\mu = 0$

or V^μ est arbitraire $\Rightarrow \boxed{g_{\nu\mu;s} = 0}$

qui est la version composante de "CCM".
 Cette condition permet de déterminer une relation pour les coeff de connexion $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$. En effet:

(48)

$$g_{NP;K} = 0$$

$$\Rightarrow g_{NP,K} - \Gamma^\sigma_{NK} g_{\sigma P} - \Gamma^\sigma_{PK} g_{N\sigma} = 0 \quad (a)$$

$$\bullet N \rightarrow P \rightarrow K \rightarrow N:$$

$$g_{PK,N} - \Gamma^\sigma_{PN} g_{\sigma K} - \Gamma^\sigma_{KN} g_{P\sigma} = 0 \quad (b)$$

$$g_{KN,P} - \Gamma^\sigma_{KP} g_{\sigma N} - \Gamma^\sigma_{NP} g_{K\sigma} = 0 \quad (c)$$

On fait $(a) + (b) - (c)$:

$$\Gamma^\nu_{NK} = \frac{1}{2} (g_{NP,K} + g_{KP,N} - g_{KN,P})$$

6) Transport parallèle: Dans ce paragraphe nous allons passer à ~~mon~~ rendre la notion de dérivée covariante plus visible (à l'ancien =)

Considérons d'abord le tenseur d'un vecteur:

$$\frac{\partial V_N}{\partial x^\nu} = \partial_\nu V_N = V_{N,\nu}$$

Ce n'est pas un ~~tenseur~~ pur et simple.

$$\frac{\partial V'_N}{\partial x'^\nu} = V'_{N,\nu} = \underbrace{\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^N} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V_{\rho,\sigma}}_{(49) \text{ tenseur}} + \underbrace{\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^N} V_\rho}_{?}$$

On remarque que la dérivée d'un vecteur n'est pas un objet tensoriel parce que la transformation est linéaire et linéaire $x'^N(x^N) = ax^N + b$. Or, en RG, ce qui est important ce sont les transformations non linéaires, qui incluent les champs gravitationnels. Il s'agit donc que le caractère non tensoriel de la dérivée d'un vecteur est un problème fondamental qu'il faut résoudre.

* Source du Problème: $\vec{V}(x+dx) = \vec{V} + d\vec{V}$

$\vec{V}(x) = \vec{V}$

$d\vec{V} = \vec{V}(x+dx) - \vec{V}(x)$ est la différence de 2 vecteurs définis en 2 pts différents $\Rightarrow$ ce n'est pas un vecteur. Par contre dx est un vecteur $\Rightarrow \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x}$ n'est pas un vecteur. On peut illustrer cette situation en considérant 2 vecteurs parallèles $\vec{V}$ et $\vec{W}$ dans le plan (xy) .



(53)

* Cords cartésiennes:

$$V_i = W_i; \quad i = x, y$$

$$\Rightarrow V_i - W_i = 0$$

* Cords polaires:

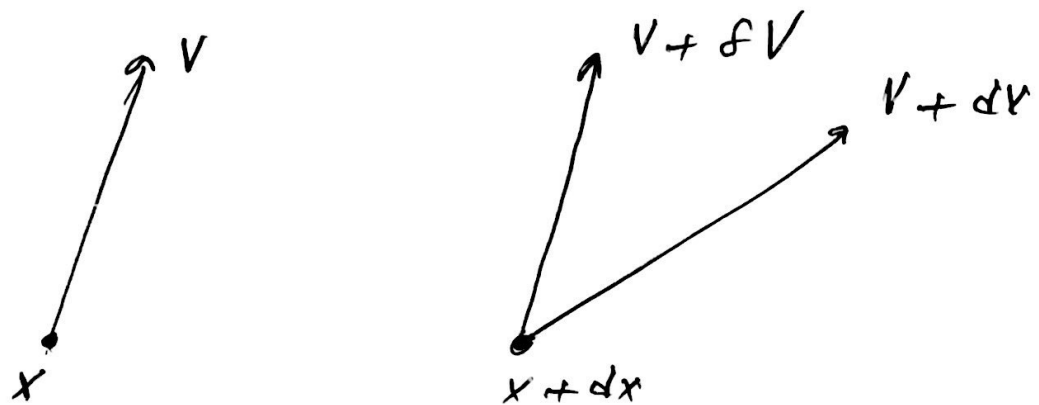
$$V_i \neq W_i; \quad i = r, \varphi.$$

$$\Rightarrow V_i - W_i \neq 0$$

On se rend compte que $(\vec{V} - \vec{W})$ n'est pas un vecteur, plus qu'il n'est pas le même ds 2 sys de Cords différents.

* Solution du Problème:

Pour avoir une dérivée d'un vecteur qui soit un objet tensoriel, il faut considérer la différence de 2 vecteurs définis au même pt x^N :



$$V \parallel V + \delta V$$

(51)

On dit que $\vec{V} + \delta \vec{V}$ est obtenu en transportant $\vec{V}$ parallèlement à lui-même au pt x au pt $x + dx$:

$$\begin{cases} V^N(x) + dV^N = V^N(x + dx) \text{ défini en } x + dx \\ V^N(x) + \delta V^N \text{ défini en } x + dx \text{ et } \delta V^N \text{ transporté parallèlement de } x. \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes $\delta V^N = 0$, mais en général ce n'est pas vrai.

Prendre la diff entre $\vec{V}^N + \delta \vec{V}^N$ et $\vec{V}^N + d\vec{V}^N$ au pt $x + dx$:

$$\begin{aligned} \Delta V^N &= (V^N + dV^N) - (V^N + \delta V^N) \\ &= dV^N - \delta V^N \end{aligned}$$

il est naturel de passer par:

$$\delta V^N = - \Gamma^N_{\lambda \nu} V^\lambda dx^\nu$$

$$\Rightarrow \Delta V^N = dV^N + \Gamma^N_{\lambda \nu} V^\lambda dx^\nu$$

Alors la dérivée du vecteur V est:

$$\frac{DV^N}{dx^\nu} = \frac{dV^N}{dx^\nu} + \Gamma^N_{\lambda \nu} V^\lambda$$

qu'on peut écrire sous la forme:

$$\boxed{V^N{}_{; \nu} = V^N{}_{, \nu} + \Gamma^N_{\lambda \nu} V^\lambda}$$

(52)

Pour trouver les dérivées covariantes d'un vecteur covariant W_N on utilise:

$$\delta(V^N W_N) = 0$$

$$(\delta V^N) W_N + V^N (\delta W_N) = 0$$

$$\Rightarrow V^N (\delta W_N) = \Gamma^N_{\lambda \nu} W_N V^\lambda dx^\nu = \Gamma^\lambda_{\nu N} W_\lambda dx^\nu V^N.$$

V^N arbitraire

$$\Rightarrow \boxed{\delta W_N = \Gamma^\lambda_{\nu N} W_\lambda dx^\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{N;\nu} = W_{N,\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu N} W_\lambda}$$

Remarque: On sait que $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ ne se transforme pas comme un tenseur. Mais la quantité

$$T^\rho_{\nu\mu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}$$

se transforme comme un tenseur; c'est le tenseur de Torsion. En RG on assume souvent que $\vec{T} = 0$ et donc:

$$\boxed{\Gamma^\rho_{\nu\mu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu}}$$

(53)