Table des matières

Martingales en temps continu

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des martingales en temps continu lorsque $t \in \mathbb{R}^+$ ou $t \in [0, T]$ avec $T > 0$.

0.1 Définitions et exemples

Soit $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique défini sur cet espace, sa filtration naturelle est $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\geq 0}$.

Définition 0.1.1 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ sur $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, est appelé $\mathcal{F}_t-$ martingale (resp. sous martingtale, sur martingale) ssi*
1) $(X_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t-$ adapté ;
2) $\forall t \geq 0, X_t \in L^1(\Omega)$;
3) $\forall s \leq t, \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ p.s. (resp. $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s, \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$).

exemple 0.1.1
Martingale de Doob : soit X une variable aléatoire intégrable et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration, on définit le processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ comme suit

$$\forall t \geq 0, X_t = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_t).$$

Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t-$ martingale de plus elle est U.I.
2) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien standard , alors les processus suivants sont des martingales par rapport à la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$: $(B_t)_{t\geq 0}, (B_t^2 - t)_{t\geq 0}, \forall a \in \mathbb{R}; \left(\exp\left(aB_t - \frac{a^2 t}{2}\right)\right)_{t\geq 0}$.

Théorème 0.1.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ processus stochastique à accroissements indépendants réel et $\forall t \geq 0$, la v.a. X_t est intégrable et centrée. Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$ martingale.*

Propriétés :

1) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale (sous martingale, sur martingale), alors la fonction $\mathbb{E}(X_t)$ est constante (croissante, décroissante)

2) Inégalité de Jensen :Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale (sous martingale) et φ une fonction convexe (convexe croissante) avec $\mathbb{E}|\varphi(X_t)| < \infty, \forall t \geq 0$. Alors $(\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ est une sous martingale.

Le théorème suivant donne la caractérisation martingale d'un mouvement brownien (processus de *Wiener*)

Théorème 0.1.2 *(Théorème de Lévy)*

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique réel centré, à trajectoire continu et $\mathcal{F}_t-$adapté, tel que :

1) $(X_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t-$ martingale ;

2) $(X_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t-$ martingale.

Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

0.2 Temps d'arrêt et tribus associées

Définition 0.2.1 *Une variable aléatoire $T : \Omega \to [0, +\infty]$ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\forall t \geq 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On associe à un temps d'arrêt T les tribus suivantes

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\};$$

$$\mathcal{F}_{T^+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0, A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\};$$

$$\mathcal{F}_{T^-} = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0, A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Remarque 0.2.1 *Si T est un temps d'arrêt, $\{T = \infty\} = (\cup_{n\in\mathbb{N}} \{T \leq t\})^c \in \mathcal{F}_\infty$.*

Propriétés :

On donne ici quelques propriétés des temps d'arrêt :

1) Soit T un temps d'arrêt, alors on a $\mathcal{F}_{T^-} \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T^+}$. Et si la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continu à droite, on a $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T^+}$.

2) T est un $\mathcal{F}_{t^+}$-temps d'arrêt ssi $\forall t \geq 0, \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

3) Si $T = t$ est un temps d'arrêt constant, alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_{T^+} = \mathcal{F}_{t^+}$.
4) Si T est un temps d'arrêt, alors T est $\mathcal{F}_T-$mesurable.
5) Si T et S sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ et $\mathcal{F}_{S^+} \subset \mathcal{F}_{T^+}$.
6) Si (S_n) est une suite croissante de temps d'arrêt alors $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ est aussi un temps
d'arrêt et $\mathcal{F}_{S^-} = \vee_n \mathcal{F}_{S_n^-}$.
7) Si (S_n) est une suite décroissante de temps d'arrêt alors $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ est aussi un temps
d'arrêt de $(\mathcal{F}_{t^+})_t$ et $\mathcal{F}_{S^+} = \cap_n \mathcal{F}_{S_n^+}$.

Définition 0.2.2 *(Processus arrêté)*
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique réel et continu à droite, sur $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, et T un temps d'arrêt. Le processus réel , noté $\left(X_t^T\right)_{t\geq 0}$, défini par

$$\text{pour tout } t \geq 0, X_t^T = X_{t\wedge T} = X_t 1_{\{T<t\}} + X_T 1_{\{T\geq t\}},$$

s'appelle processus arrêté en T.

Corollaire 0.2.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale (resp. sous martingale, sur martingale) et T un temps d'arrêt par rapport à la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, alors le processus arrêté $\left(X_t^T\right)_{t\geq 0}$ est une martingale (resp.sous martingale, sur martingale).*

Théorème 0.2.1 *(Théorème d'arrêt pour les temps d'arrêt bornés)*
Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale (resp. sous martingale, sur martingale) continu à droite, S et T deux temps d'arrêt bornés par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, tels que $S \leq T$. Alors X_T et $X_S \in L^1(\Omega)$ et

$$X_S = \mathbb{E}\left(X_T \mid \mathcal{F}_S\right).$$

0.3 Inégalités maximales

Dans cette section, on généralise au cadre continu quelques inégalites maximales déja connues dans le cadre discret (martingales en temps discret).

Théorème 0.3.1 *(inégalité de Doob)* *a) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une sous martingale continue à droite par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, alors pour tout $t>0$, pour tout $c>0$*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} X_s \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}\,|X_t|}{c}.$$

b) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite telle que por tout $t\geq 0, X_t \in L^p$, avec $p>1$ fixé, alors pour tout $t>0$, pour tout $c>0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_s| \geq c\right) \leq \frac{\mathbb{E}\,|X_t|^p}{c^p}.$$

0.4 Convergence

Dans ce paragraphe, on étudie les différente formes de convergence des martingales.

Définition 0.4.1 *Une martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ est dite fermée par une variable aléatoire Y si*

$$\mathbb{E}\,|Y| < \infty \text{ et } \forall t\geq 0, X_t = \mathbb{E}\left(Y \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Remarque 0.4.1 *La v.a. n'est pas nécésseremen unique.*

Théorème 0.4.1 *(convergence p.s.)*
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite telle que $\sup_t \mathbb{E}\,|X_t|^p < \infty$ (i.e bornée dans L^p) Alors la v.a $Y = \lim_t X_t$ existe p.s et $\mathbb{E}\,|Y|^p < \infty$.

Corollaire 0.4.1 *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ une sur martingale continue à droite, alors $(X_t)_{t\geq 0}$ converge p.s. vers une limite intégrable.*

Théorème 0.4.2 *(convergence en moyenne d'ordre 1 ou p)*
a) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite, les 3 conditions suivantes sont équivalentes :
1) $(X_t)_{t\geq 0}$ converga dans L^1.
2) $\exists$ une v.a. X_∞ intégrable telle que $X_t = \mathbb{E}\left(X_\infty \mid \mathcal{F}_t\right), \forall t\geq 0$.
3) $(X_t)_{t\geq 0}$ est U.I.
b) De plus, si $p>1$ et si $(X_t)_{t\geq 0}$ est bornée dans L^p, alors la convergence a aussi lieu dans L^p avec $X_\infty \in L^p$.

Intégrale stochastique

Ce chapitre est une introduction à l'intégrale stochastique, il est consacré à l'étude de l'intégrale de *Wiener* et celle d'*Ito*.

0.5 Intégrale de *Wiener*

0.5.1 Rappel

a) Intégrale de *Riemann*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, l'intégrale de f, sur l'intervalle $[a, b]$, au sens de *Riemann* est définie comme suit :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\rightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i^{(n)}) \left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right);$$

où $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = b$ est une suite de partitions de $[a, b]$ telles que $\lim_{n\rightarrow\infty} \max_{1\leq i\leq n} \left|t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right| = 0$ et $\zeta_i^{(n)} \in \left[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\right]$.

b) Fonctions à variation bornée

Une fonction f est dite à variation bornée, sur l'intervalle $[a, b]$, si

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty,$$

où le sup est pris sur toutes les partitions $(t_0, ..., t_n)$ de $[a, b]$.

Remarque 0.5.1 *1-Si f est croissante, alors f est à variation bornée.*

2- Si f est la différence de 2 fonctions croissantes, alors f est à variation bornée.

3- Si f est continûment dérivable, alors f est à variation bornée.

c) Intégrale de *Riemann-Stieltjes*

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée.

L'intégrale de *Riemann-Stieltjes* de la fonction f par rapport à la fonction g, sur l'intervalle $[a, b]$, est définie comme suit :

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i^{(n)}) \left(g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)}) \right);$$

où $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = b$ est une suite de partitions de $[a, b]$ et $\zeta_i^{(n)} \in \left[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)} \right]$ telle que $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} \left| t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \right| = 0$.

Proposition 0.5.1 *1- Si f est continue et g est cintinûment dérivable, alors*

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

2- Si f et g sont continues et à variation bornée, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)df(t) &= \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2} \\ \int_a^b f(t)dg(t) &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(t)df(t). \end{aligned}$$

Proposition 0.5.2 *(Formule d'intégration par parties)*

Soient g une fonction continue et f une conction à variation bornée, on a

$$\int_a^b f(t)dg(t) = f(t)g(t) \mid_a^b - \int_a^b g(t)df(t)$$

0.5.2 Intégrale de *Wiener*

L'intégrale de *Wiener* est une intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien standard.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la définition de l'intégrale

$$\int_a^b f(s)\, dB_s(\omega)$$

où f est une fonction déterministe et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

Supposons que pour chaque $\omega \in \Omega$, on va utiliser la formule d'intégration par parties pour définir cette intégrale au sens de *Riemann-Stieltjes* par

$$\int_a^b f(s)\, dB_s(\omega) = f(t)B(t,\omega)\mid_a^b - \int_a^b B(t,\omega)df(t),$$

alors la classe de fonctions f pour les quelles l'intégrale $\int_a^b B(t,\omega)df(t)$ est définie, au ens de *Riemann-Stieltjes*, pour chaque $\omega \in \Omega$, est limitée c'est à dire que f doit être continue à variation bornée.

Donc on ait besoin d'une autre idée pour définir l'intégrale $\int_a^b f(s)\, dB_s$ pour une classe plus large de fonctions f.

Cette nouvelle intégrale est appelée intégrale de $Wiener$ de$f$, et elle est définie pour toute fonction $f \in L^2[a,b]$.

où $L^2[a,b] = \left\{ f, f : [a,b] \to \mathbb{R}, \int_a^b |f(s)|^2 ds < \infty \right\}$

Définition de l'integrale de Wiener

On commence par définir l'integrale $\int_a^b f(t)\ dB_t(\omega)$ pour les fonctions f étagées puis on généralise au cas où $f \in L^2[a,b]$.

a) **Integral de Wiener d'une fonction étagée**

Définition 0.5.1 *Soit f une fonction étagée de la forme :*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\, 1_{[t_{i-1},t_i]}\ , \forall i = \overline{1,n},$$

où : $\varepsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$ et $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = b$.
L'intégtale de Wiener de la fonction étagée f est définie par :

$$\int_a^b f(s)\, dB_s = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right).$$

Notons $I(f) = \int_a^b f(t)\, dB_t$.

Remarque 0.5.2 *1- Pour toutes* f *et* $g \in L^2[a,b]$ *étagée, et pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$, *on a*

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g).$$

Théorème 0.5.1 *Soit* f *une fonction étagée, alors* $I(f)$ *est une variable gaussienne de moyenne* $E(I(f)) = 0$ *et de variance* $var(I(f)) = \int_0^{+\infty} f^2(s)\, ds$.

b) **Intégrale de Wiener pour** $f \in L^2([a,b])$

Théorème 0.5.2 *Soit* $f \in L^2([a,b])$, *il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *des fonctions étagées qui converge vers* f *dans* $L^2([a,b])$, *c'-à-d qui vérifie*

$$\lim_{n\to 0} \int_a^b |f_n - f|^2(t)\, dt = 0.$$

D'après le théorème (2.1.2), la suite des variables aléatoires $\left(I(f_n) = \int_0^{+\infty} f_n(s)\, dB_s\right)_{n\geq 1}$ est une suite de Chauchy dans $L^2(\Omega)$, donc elle est convergente dans $L^2(\Omega)$.

Définition 0.5.2 *Soit* $f \in L^2([a,b])$, *l'intégrale de Wiener de* f *est :*

$$\int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(s)\, dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right).$$

Remarque 0.5.3 $I(f)$ *est bien définie, car* $I(f)$ *est indépendante du choix de la suite* $(f_n)_{n\geq 0}$..

Théorème 0.5.3 *Soit* $f \in L^2[a,b]$ *l'integrale de Wiener* $\int_a^b f(t)\, dB_t$ *est une variable aléatoire gaussienne de moyenne* 0 *et de variance* $\int_a^b f(t)^2\, dt$.

0.5.3 Propriètés de l'intégrale de Wiener

Proposition 0.5.3

1- $\forall f, g \in L^2([a,b]), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$ *on a :*

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

2- $\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \int_a^b f(t)\, g(t)dt.$

3- $\int_a^b f(t)dB(t) = \int_a^c f(t)dB(t) + \int_c^b f(t)dB(t).$

4- Si f *une fonction détérministe dérivable, en utilisant la formule d'integration par partie, on obtient*

$$\forall \omega \in \Omega, \int_a^b f(t)\, dB(t,\omega) = [f(t)\, B(t,\omega)]_a^b - \int_a^b B(t,\omega)\, df(t).$$

Théorème 0.5.4 *Soit* $f \in L^2([a,b])$ *alors, le processus stochastique définie par*

$$X(t) = \int_a^b f(s)\, dB(t,\omega)$$

est une martingale continue par rapport à la filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\sigma}(B_s, s \leq t)$.

0.5.4 Exemples de l'integrale de Wiener

exemple 0.5.1 *Soit* f *une fonction étagé définie par*

$$f(t) = \begin{cases} -3 \ si \ t \in [0,1] \\ 1 \ si \ t \in [1,3] \\ 4 \ si \ t \in [3,4] \end{cases}$$

alors l'intégrale de Wiener de la fonction f *est :*

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(t)dB(t) &= \sum_{i=1}^{3} f(t_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= -3(B(1) - B(0)) + 1(B(3) - B(1)) + 4(B(4) - B(3)) \\ &= -3N(0,1) + 1N(0,2) + 4N(0,1) \\ &= N(0,9) + N(0,2) + N(0,16) \\ &= N(0,27). \end{aligned}$$

exemple 0.5.2

Soit $X(t)=\int_0^1 t dB_t$.

On a $f(t)=t, X(t)$ *est définie si :* $f(t)\in L^2[0,1]$ *c'est-à-dire si* $\int_0^1 t^2dt<+\infty$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2dt &= \left[\frac{1}{2}t\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}-0\\ &= \frac{1}{2}<+\infty\end{aligned}$$

d'où : $f(t)\in L^2[0,1]$, *par conséquence* $X(t)$ *est définie.*

Donc : $X(t)$ *est une intégrale de Wiener, et un proc-stoc gaussien*

Alors :

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n} t_i\left(B(t_i)-B(t_{i-1})\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= 0\\ var(X_t) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc : $X(t)\rightsquigarrow N(0,\frac{1}{2})$.

exemple 0.5.3 *Soit* $X(t)=\int_0^t \sin s dBs$.

On a $f(s)=\sin s, X(t)$ *est définie si :* $f(s)\in L^2[0,t]\Longleftrightarrow\int_0^t\sin^2 sds<+\infty$.

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin^2 sds &= \int_0^t\frac{1-\cos 2s}{2}ds\\ &= \int_0^t\frac{1}{2}ds-\int_0^t\frac{\cos 2s}{2}ds\\ &= \left[\frac{1}{2}s\right]_0^t-\left[\frac{1}{4}\sin 2s\right]_0^t\\ &= \frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t<+\infty.\end{aligned}$$

D'où : $f(s) \in L^2[0,t]$*, par conséquence* $X(t)$ *est définie.*
Donc : $X(t)$ *est une intégrale de Wiener ,et un proc-stoc gaussien*
Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) &= 0 \\
cov(X_t, X_s) &= \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}(X_t)\,\mathbb{E}(X_s) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \sin u dB(u,\omega)\right)\left(\int_0^s \sin u dB(u,\omega)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^{s\wedge t} \sin u dB(u,\omega) \int_0^{s\wedge t} \sin u dB(u,\omega)\right) \\
&= \int_0^{s\wedge t} \sin^2 u du = \frac{1}{2}(s\wedge t) - \frac{1}{2}\sin 2(s\wedge t).
\end{aligned}$$

On a : $t \to B_t$ *est une fonction continue*
$t \to \sin t$ *est une fonction continement dérivable*
$\Longrightarrow \sin t$ *est à variation bornée.*
Donc : en appliquent la formule d'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sin s dB(s,\omega) &= [\sin s B(s,\omega)]_0^t - \int_0^t \cos s B(s,\omega)\, ds \\
&= \sin t B(t,\omega) - \int_0^t \cos s B(s,\omega)\, ds.
\end{aligned}$$

0.6 Intégrale d'Itô

Cette partie est consacré à l'étude de l'intégrale de la forme $\int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega)$, l'intégrale d'Itô d'un processus stochastique $(f(t,\omega))_{t\geq 0}$ par rapport à un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$.

D'abord, on définit cette intégrale dans le cas où $f(t,\omega) \in f \in \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega))$ où

$$f \in \mathbf{L}^2_{ad}([a,b]\times\Omega)) = \begin{cases} (f(t,\omega))_{t\in[a,b]} \text{ un processus stochastique}\,; (f(t,\omega))_{t\in[a,b]} \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{ada} \end{cases}$$

Le mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[a,b]}$ vérifient les conditions suivantes :

1) pour chaque t, B_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable ;

2) pour tout $s \leq t$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$.

Puis on prolonge la définition de l'intégrale $\int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega)$ au cas où $f(t,\omega) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ où

$$\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right) = \left\{ (f(t,\omega))_{t\in[a,b]} \text{ un processus stochastique} ; (f(t,\omega))_{t\in[a,b]} \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{adapté et } \int_a^b |f$$

et $(B_t)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in[a,b]}$ vérifient les deux conditions précédentes.

0.6.1 Définition de l'intégrale d'Ito

a) Intégrale d'ITô sur $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$

a–1-Pour les processus stochastique étagés dans $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$

Définition 0.6.1 *(processus stochastique étagé)*

Un processus stochastique étagé $(X_t)_{t\in[a,b]}$ *est de la forme :*

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\, 1_{[t_{i-1},t_i]}(t).$$

Où : $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *et* ξ_{i-1} *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ *-mesurable tel que* $E\left(\xi^2_{i-1}\right) < +\infty$.

Définition 0.6.2 *L'intégrale d'Itô d'un processus stochastique étagé* $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$, *sur l'intervalle* $[a,b]$, *est défini par :*

$$\int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega)\left(B(t_i,\omega) - B(t_{i-1},\omega)\right).$$

On pose $I(f) = \int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega)$.

Proposition 0.6.1 *Soit $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ un processus étagé de $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, alors l'intégrale d'Itô $I(f)$ est une variable aléatoire de moyenne :*

$$\mathbb{E}(I(f)) = 0,$$

et de variance :

$$var(I(f)) = \mathbb{E}\left(I(f)^2\right) = \int_a^b \mathbb{E}\left|f(t,\omega)\right|^2 dt.$$

Maintenant on définit l'intégrale $\int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega)$ pour $f\in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$.

a–2-Pour tout processus stochastique dans $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$

Lemme 0.6.1 *Soit $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ un processus stochastique de $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, alors il existe une suite de processus stochastique étagés $(f_n(t,\omega))_{n\geq1}\in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ telle que $(f_n(t,\omega))_{n\geq1}$ converge vers $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ dans $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ c'est à dire :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \mathbb{E}\left|f_n(t,\omega)-f(t,\omega)\right|^2 dt = 0.$$

On a.la suite $(I(f_n))_{n\geq1}$, des intégrales d'Ito des processus stochastiques $(f_n(t,\omega))_{n\geq1}$, est de Cauchy, alors elle converge dans $L^2(\Omega)$ par conséquent on peut définir l'intégrale de $f\in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ comme suit :

Définition 0.6.3 *Soit $(f_n(t,\omega))_{n\geq1}\in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ une suite de processus stochastique qui converge vers $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ dans $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, alors l'intégrale d'Itô du processus $(f(t,\omega))_{t\in[a,b]}$ est définie par :*

$$\int_a^b f(t,\omega)\,dB(t,\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t,\omega)\,dB_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\left(B(t_i)-B(t_{i-1})\right).$$

$$i.e.\ I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) \;.....\; (*)$$

Remarque 0.6.1 *l'intégrale définie par $(*)$ est bien définie.*

Théorème 0.6.1 *Soit $f\in L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$, alors l'intégrale d'Itô $I(f)$ est une variable aléatoire de moyenne $\mathbb{E}(I(f))=0$, et de variance $var(I(f)) = \int_a^b \mathbb{E}\left|f(t,\omega)\right|^2 dt$.*

b) Intégrale d'Itô sur$\mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right)$

On peut prolonger cette intégrale, en supposant que $f \in \mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right)$, dont $L^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right) \subset \mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right)$.

Lemme 0.6.2 *Soit $\left(f(t,\omega)\right)_{t\in[a,b]} \in \mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right)$, alors il existe une suite de processus $\left(g_n\right)_{n\geq 0}$ de $L^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right)$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t,\omega) = f(t,\omega)\, p.s \text{ et en probabilité.}$$

$$i.e. \lim_{.n\to\infty} \int_a^b \left|g_n(t,\omega) - f(t,\omega)\right|^2 dt = 0, \text{ p.s et en probabilité.}$$

Lemme 0.6.3 *Soit $\left(f(t,\omega)\right)_{t\in[a,b]} \in \mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right)$, alors il existe une suite de processus étagée $\left(f_n(t,\omega)\right)_{n\geq 1}$ de $L^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right)$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left|f_n(t,\omega) - f(t,\omega)\right|^2 dt = 0, \text{ en probabilité.}$$

Définition 0.6.4 *Soit $\left(f(t,\omega)\right)_{t\in[a,b]} \in \mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, \mathcal{L}^2[a,b]\right)$, l'intégrale d'ITO de f est définie comme suit :*

$$\int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t,\omega)\, dB(t,\omega).$$

0.6.2 Propriétés de l'intégrale d'Itô

Proposition 0.6.2

1- $\forall f, g \in L^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right), \mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, \mathcal{L}^2[a,b]\right)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

2- $\forall f \in L^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right), \mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right) : \int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega) = \int_a^c f(t,\omega)\, dB(t,\omega) + \int_c^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega)$.

3- Pour $f \in L^2_{ad}\left([a,b]\times\Omega\right)$ le processus $X(t) = \int_a^t f(u,\omega)\, dB(u,\omega)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue.

4- Pour $f \in \mathcal{L}_{ad}\left(\Omega, L^2[a,b]\right)$ *le processus* $X(t) = \int_a^t f(u,\omega)\, dB(u,\omega)$ *est une martingale locale continue.*

5- $\int_0^T f(t,\omega)\, dB(t,\omega) = \int_0^T dB(t,\omega) = B(T) - B(0)$ *si* $f(t) = 1$, $\forall t \geq 0$.

6- $\int_0^T f(t,\omega)\, dB(t,\omega) = \int_0^T c dB(t,\omega) = c\left(B(T) - B(0)\right)$ *si* $f(t) = c$, $\forall t$.

7- $\int_0^T 1_{[a,b]} dB(t,\omega) = B(b) - B(a)$.

8- $\int_0^T 1_{[a,b]} f(t,\omega)\, dB(t,\omega) = \int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega)$.

9- $\mathbb{E}\left(\int_0^T f(t,\omega)\, dB(t,\omega)\right) = 0, \mathbb{E}\left(\int_0^T f(t,\omega)\, dB(t,\omega)\right)^2 = \int_0^T \mathbb{E}\left(f^2(t,\omega)\right) dt.$

10- Soient f *et* $g \in L^2_{ad}\left([a,b] \times \Omega\right)$ *alors*

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b f(t,\omega)\, dB(t,\omega) \cdot \int_a^b g(t,\omega)\, dB(t,\omega)\right) = \int_a^b \mathbb{E}\left(f(t,\omega)\, g(t,\omega)\right) dt.$$

0.6.3 Exemples de l'intégrale d'ITO

exemple 0.6.1 *Soit* $(X_t)_{t\in[0,1]}$ *un processus élémentaire défini pour tout* $t \in [0,1]$ *comme suit*

$$X_t = \xi_0 1_{\left[0,\frac{1}{4}\right]}(t) + \xi_1 1_{\left[\frac{1}{4},1\right]}(t).$$

L'intégrale d'ITO de X_t *est*

$$\int_0^t X(s) dB_s = \xi_0 \left(B\left(\frac{1}{4}\right) - B(0)\right) + \xi_1 \left(B(1) - B\left(\frac{1}{4}\right)\right).$$

exemple 0.6.2 *L'intégrale* $\int_0^1 e^{B(t)} dB(t)$ *est définie car*

$\left(\mathbb{E}(\int_0^1 e^{2B(t)} dt) = \int_0^1 \mathbb{E}(e^{2B(t)} dt = \int_0^1 e^{2t} dt = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) < \infty\right)$

sa moyenne $\mathbb{E}\left(\int_0^1 e^{B(t)} dB(t)\right) = 0$

et sa variance $\mathbb{E}\left(\int_0^1 e^{B(t)} dB(t)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

exemple 0.6.3 *Calculons l'intégrale* $\int_0^T B(t) dB(t)$. *Soit* $0 < t_0 < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_n^n = T$ *une partition de* $[0,T]$ *et soit*

$$X^n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} B(t_i^n) 1_{\left[t_i^n, t_{i-1}^n\right]}(t)$$

alors pour chaque n, $X^n(t)$ *est une processus simple adaptée* $(\xi_i^n = B(t_i^n))$ *par la continuité de* B_t *, on a :* $\lim_{n\to\infty} X^n(t) = B(t)$ *p.s.*

$$\int_0^t X^n(t)dB(t) = \sum_{i=1}^{n-1} B(t_i^n)(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n)).$$

On a : $B(t_i^n)(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n)) = \frac{1}{2}\left[B^2\left(t_{i+1}^n\right) - B^2(t_i^n) - (B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n))^2\right]$

$$\begin{aligned}\int_0^t X^n(t)dB(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(B^2\left(t_{i+1}^n\right) - B^2(t_i^n)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n))^2 \\ &= \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}B^2(0) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n))^2,\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n-1}(B\left(t_{i+1}^n\right) - B(t_i^n))^2$ *est la variation quadratique d'un mouvement brownien elle converge on probabilité vers* T, *par conséquence*

$$\int_0^t X^n(t)dB(t) \xrightarrow{\text{en proba}} \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

La moyenne de $\int_0^T B(t)dB(t)$ *est égale à 0 la variance est* $\frac{1}{2}$.

0.7 La formule d'Itô

La formule d'ITO est une régle de dérivation de fonctions dépendant des processus stochastiques. Une de ses applications est l'évaluation d'une intégrale stochastique.

La formule d'Itô de Base

On commence par dériver des foctions dépendant d'un mouvement brownien standard, et la formule d'Ito s'énnonce comme suit :

Théorème 0.7.1 *Soit* $(B_t)_{t\in[a,b]}$ *un mouvement brownien standard par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[a,b]}$ *et* f *une fonction de class* $C^2(\mathbb{R})$ *alors :*

$$f(B(t,\omega)) - f(B(a,\omega)) = \int_a^t f'(B(s,\omega))\,dB(s,\omega) + \frac{1}{2}\int_a^t f''(B(s,\omega))\,ds$$

c-à-d :

$$\frac{d}{dt}\left(f\left(B\left(s,\omega\right)\right)\right)' = f'\left(B\left(s,\omega\right)\right)dB\left(t,\omega\right)+\frac{1}{2}f''\left(B\left(s,\omega\right)\right)dt.$$

Théorème 0.7.2 *Soit* $(B_t)_{t\in[a,b]}$ *un mouvement brownien et* $f\ (t,x)$*une fonction de classe* $C^{1,2}(\mathbb{R})$ *alors :*

$f\left(t,B\left(t,\omega\right)\right)-f\left(a,B\left(a,\omega\right)\right)=\int_a^t f'\left(s,B\left(s,\omega\right)\right)dB\left(s,\omega\right)+\int_a^t f'\left(s,B\left(s,\omega\right)\right)ds+\frac{1}{2}\int_a^t f''\left(s,B\left(s,\omega\right)\right)ds.$

Evaluation d'une intégrale stochastique en utilisant la formule d'Ito

Théorème 0.7.3 *Soit* $F(t,x)$ *la primitive de la fonction continue* $f(t,x)$ *et on suppose que* $\frac{dF}{dt}$ *et* $\frac{df}{dx}$ *sont continue, alors :*

$$\int_a^b f\left(t,B\left(t,\omega\right)\right)dB\left(t,\omega\right)=\left[F\left(t,B\left(t,\omega\right)\right)\right]_a^b-\int_a^b \frac{dF}{dt}\left(t,B\left(t,\omega\right)\right)+\frac{1}{2}\frac{df}{dx}\left(t,B\left(t,\omega\right)\right)dt\cdots\cdots(a)$$

$\cdot$ *f ne déponde pas de t, l'equation (a) s'ecrit :*

$$\int_a^b f\left(B\left(t,\omega\right)\right)dB\left(t,\omega\right)=\left[F\left(B\left(t,\omega\right)\right)\right]_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f^2\left(B\left(t,\omega\right)\right)dt.$$

exemple 0.7.1 *Evaluons l'intégrale* $\int_a^b B(s,\omega)\,e^{B(s,\omega)}dB(s,\omega)$ *en utilisant la formule d'ITO*

on pose $x=B(s,\omega)$ *on a alors*

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ &\Longrightarrow F(x)=e^x(x-1)+c \\ &\Longrightarrow F\left(B\left(s,\omega\right)\right)=e^{B(s,\omega)}\left(B\left(s,\omega\right)-1\right)+c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'B\left(s,\omega\right) &= e^{B(s,\omega)}\left(1+B\left(s,\omega\right)\right) \\ &= e^{f(B(s,\omega))}\left(1+B\left(s,\omega\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{B(s,\omega)} B(s,\omega)\, dB(s,\omega) &= \left[e^{B(s,\omega)}\left(B(s,\omega)-1\right)\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B(s,\omega)}\left(1+B(s,\omega)\right) ds \\ &= e^{B(s,\omega)}\left(B(s,\omega)-1\right) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B(s,\omega)}\left(1+B(s,\omega)\right) ds.\end{aligned}$$

Equation différentielles stochastiques

Ce chapitr est consacré à létude des équations différentielles stochastiques (E.D.S), qui motivèrent les premièrs travaux d'Ito sur l'intégrale stochastique, On s'intéresse au cas unidimentionnel, en donnant les principaux définitions et résultats.

0.8 Définitions

Soit $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré sur lequel est défini un $\mathcal{F}_t-$ mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$.

Définition 0.8.1 *Une équation différentielle stochastique (E.D.S) est une équation de la forme*

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s,$$

ou sous sa forme différentielle

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, d + \sigma(t, X_t)\, dB_t \\ X_0 = \xi, \end{cases} \qquad ((1))$$

avec dB_t *est la différentielle du mouvement brownien unidimentionnelle* $(B_t)_{t\geq 0}$, b *et* σ *sont les coefficients de l'équation (1) appelés respectivement le drift et la volatilité du* $(X_t)_{t\geq 0}$ *où*

$$b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, T > 0.$$

ξ *est une variable aléatoire représentant la condition initiale indépentante du mouvement brownien* $(B_t)_{t\geq 0}$. *L'inconnu de cette équation est* $(X_t)_{t\geq 0}$.

Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients b et σ, l'équation (1) admet une solution unique.

Définition 0.8.2 *Une solution de l'équation (1) est un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$, appelé processus de diffusion ou simplement diffusion, continu $\mathcal{F}_t-$ adapté tel que les intégrales*

$$\int_0^t b(s, X_s)\, ds \ \ et \ \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s,$$

aient un sens (c'est à dire qu'il faut que $\sigma \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,t])$, car $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$ est une intégrale d'Ito, et que $b \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[0,t])$, car $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ est une intégrale d'un processus stochastique par rapport à la mesure de Lebesgue),

Et l'égalité

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s,$$

est satisfaite pour tout $t \in [0, T]$.

Remarque 0.8.1 *Si $\sigma(t, X_t) = 0$ dans l'équation (1), alors*

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\, ds,$$

est une équation différentielle stochastique ordinaire car pour tout $\omega \in \Omega; b(s, X_s) : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle mais ξ est une variable aléatoire.

Intéressons maintenant aux conditions d'existence et d'unicité de la solution d'une E.D.S.

0.9 Existence et unicité de la solution d'une E.D.S.

Etant donné un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et un $\mathcal{F}_t-$mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$.

Définition 0.9.1 *Une fonction mesurable $g(t,x)$ définie sur $[a,b]\times\mathbb{R}$ est dite satisfait la condition de Lipschitz en x s'il existe une constante $k>0$ telle que :*

$$|g(t,x)-g(t,y)|\leq k|x-y|\,;\forall a\leq t\leq b, x,y\in\mathbb{R}.$$

Définition 0.9.2 *Une fonction mesurable $g(t,x)$ définie sur $[a,b]\times\mathbb{R}$ est dite satisfait la condition de croissance linéaire enx s'il existe une constante $k>0$ telle que :*

$$|g(t,x)|\leq k(1+|x|)\,;\forall a\leq t\leq b, x\in\mathbb{R}.$$

Lemme 0.9.1 *Soient $b(t,X_t)$ et $\sigma(t,X_t)$ deux fonctions mesurables sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ vérifiant la condition de Lipschitz en x, supposons que la condition initiale ξ, qui est $\mathcal{F}_0-$mesurable, est telle que $\mathbb{E}\left(\xi^2\right)<\infty$. Alors l'équation*

$$X_t=\xi+\int_0^t b(s,X_s)\,ds+\int_0^t \sigma(s,X_s)\,dB_s, 0\leq t\leq T,$$

a au moins une solution continu.

Théorème 0.9.1 *Soient $T>0$ et $b(.,.),\sigma(.,.):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. On suppose qui'il existe une constante $k>0$ telle que pour tout $t\in[0,T]\,,x,y\in\mathbb{R}$,*

1- condition de Lipschitz en x :

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq k|x-y|\,,$$

2- condition de la croissance linéaire :

$$|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\leq k(1+|x|)\,,$$

3- $\mathbb{E}\left(\xi^2\right)<\infty$.

Alors l'E.D.S. (1) possède une unique solution $(X_t)_{t\geq0}$(à l'indistingabilité prés) continue, adapté par rapport à $\mathcal{F}_t^{\xi,(B_t)_{t\geq0}}$ la tribu engengrée par le mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq0}$ et la condition initiale ξ (solution forte) et vérifie $\mathbb{E}\int_0^T|X_t|^2\,dt<\infty$.

Remarque 0.9.1 *1- La condition de la croissance linéaire assure que la solution* $(X_t)_{t\geq 0}$ *ne s'explose pas, i.e. que* $\lim |X_t| \neq \infty$ *lorsque* $n \to \infty$.

2- La solution est unique à l'indistingabilité veut dire que si $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(X'_t)_{t\geq 0}$ *sont deux processus stochastiques continus satisfaisant*

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s, 0 \leq t \leq T,$$

adapté rar rapport à $\mathcal{F}_t^{\xi,(B_t)_{t\geq 0}}$ *et* $\mathbb{E}\int_0^T |X_t|^2\, dt < \infty, \mathbb{E}\int_0^T |X'_t|^2\, dt < \infty$. *Alors* $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$ *pour tout* $t \leq T$, *p.s.*

0.10 Solution forte et solution faible d'une E.D.S.

Définition 0.10.1 *Une solution forte de l'E.D.S. (1) sur l'espace probabilisé filtré* $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, *par rapport au mouvement brownien* $(B_t)_{t\geq 0}$ *et la condition initiale* ξ, *est un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$, *à trajectoires continues, adapté à* $\mathcal{F}_t^{\xi,(B_t)_{t\geq 0}}$ *et* $\mathbb{E}\int_0^T |X_t|^2\, dt < \infty$.

Définition 0.10.2 *Une solution faible de l'E.D.S. (1) sur l'espace probabilisé filtré* $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *,par rapport au m.b.*$(B_t)_{t\geq 0}$ *est le processus continu* $(X_t)_{t\geq 0}$ *qui est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable avec*$\mathcal{F}_t$ *n'est pas necessairement la tribu engendrée par* $(B_t)_{t\geq 0}$ *et* ξ.

Remarque 0.10.1 *La solution forte est bien sûr une solution faible mais la réciproque est fausse en genéral.*

Définition 0.10.3 *(unicité forte) Il y a une unicité trajectorielle (unicité forte) pour l'E.D.S. (1) lorsque* (X, B_t) *et* (X', B'_t) *sont deux solutions définies sur le même espace filtré avec* $B_t = B'_t$ *et* $X_0 = X'_0$ *p.s. Alors* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* $(X'_t)_{t\geq 0}$ *sont indistingables.*

Définition 0.10.4 *(unicité faible) Il y a une unicité en loi (unicité faible) pour l'E.D.S. (1) lorsque* (X, B_t) *et* (X', B'_t)*sont deux solutions avec la possibilité de* $(B_t)_{t\geq 0}$ *et* $(B'_t)_{t\geq 0}$ *sont différents (en particulier si* (X, B_t) *et* (X', B'_t) *sont définis sur deux espaces de probabilité* $\left(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *et* $\left(\Omega', \mathcal{A}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\prime\right)$ *différents et* $X_0 = X'_0$. *Alors les lois de* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(X'_t)_{t\geq 0}$ *sont égales.*

Théorème 0.10.1 *Si l'unicité trajectorielle est satisfaite. Alors*

1- l'unicité en loi est satisfaite.

2- toute solution de (1) est forte.