

Ex 01 : Soit l'équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$y'(t) = \frac{t}{y(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad h_n = h = 0,2; \quad y(0) = 1.$$

- 1) Approcher $y(1)$ en utilisant :
 - a) La méthode d'Euler explicite.
 - b) " " " implicite.
 - c) " " d'Euler modifiée.
 - d) Taylor d'ordre 2.
- 2) Comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte $y(1)$ qu'on trouve analytiquement.

Ex 02 : Soit à résoudre les problèmes de Cauchy. ① et ② par les schémas d'Euler explicite et implicite.

$$\textcircled{1} \begin{cases} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- a) Donner les solutions exactes de ① et ②, on suppose que le pas h_n est constant.
- b) Déterminer la solution approchée $y(t)$ par les deux schémas ① et ② en fonction de h et T .
- c) Que se passe-t-il si $h \rightarrow 0$.
 - " " " " si $h \rightarrow 2$ pour le problème ①.
 - " " " " si $h \rightarrow 1$ pour le problème ②.
- d) Que peut-on en déduire sur le choix des algorithmes.

EX03: on étudie la méthode numérique (M), pour résoudre l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ définie par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n),$$

où:

$$\phi(t, y, h) = \alpha f(t, y) + \beta f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)) + \gamma f(t+h, y+h f(t, y)).$$

Avec α, β, γ sont des réels compris entre 0 et 1.

1. Pour quelles valeurs du triplet (α, β, γ) retrouve-t-on:

- La méthode d'Euler?
- La méthode du point milieu?

2. On suppose que la fonction $f \in C^0([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R})$, et L -lipschitzienne en y . Pour quelle valeurs de (α, β, γ) la méthode proposée est-elle stable?

3. Quelles relations doivent satisfaire (α, β, γ) pour que la méthode soit constante? Convergente? d'ordre 1? d'ordre 2?

• la méthode numérique (M) peut-elle être d'ordre supérieur?

Ex04: Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ et soit $y'(t) = f(t, y(t))$, que l'on discrétise par une méthode à un pas sous la forme:

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + h g(y_n)}, \text{ où } h \text{ est le pas de temps constant.}$$

1) Ecrire le schéma sous la forme générale: $y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$.

2) Exprimer ϕ en fonction de g pour que la méthode soit constante.

3) on suppose que $y(0) = y_0 \geq 0$, Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_n \in [0, y_0]$.

4) En déduire la stabilité puis la convergence de la méthode.

changé de Module: L. Menniche.

Corrigé de la série (1)

Exo 1:

on a: $t_0 = 0 \Rightarrow t_1 = t_0 + h = 0,2$; $t_2 = t_1 + h = 0,4$; $t_3 = 0,6$; $t_4 = 0,8$; $t_5 = 1$.

1) a) Méthode d'Euler explicite: on a:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n). \end{cases}$$

$n=0$ $y_0 = y(t_0) = y(0) = 1$, $n = \overline{0, 4}$.

$$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0) = 1 + 0,2 \left(\frac{0}{1} \right) = 1 \quad (f(t, y) = \frac{t}{y} \Rightarrow f(0, 1) = \frac{0}{1} = 0).$$

$$y_2 = y_1 + h f(t_1, y_1) = 1 + 0,2 \left(\frac{0,2}{1} \right) = 1,04.$$

$$y_3 = y_2 + h f(t_2, y_2) = 1,04 + 0,2 \left(\frac{0,4}{1,04} \right) = 1,1169.$$

$$y_4 = 1,2243$$

$$y_5 = y_4 + h f(t_4, y_4) = 1,3549.$$

t_n	$t_0 = 0$	$t_1 = 0,2$	$t_2 = 0,4$	$t_3 = 0,6$	$t_4 = 0,8$	$t_5 = 1$
y_n	1	1	1,04	1,1169	1,2243	1,3549

b) Méthode d'Euler implicite

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_0 = 1. \\ h = 0,2 \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + 0,2 \cdot \frac{0,2}{y_1} = \frac{0,04}{y_1} + 1.$$

$$\Rightarrow y_1^2 - y_1 - 0,04 = 0, \text{ avec: } \Delta = 1,16 \text{ d'où: } y_1 = \frac{1 + 1,077}{2} = 1,0385$$

$$\text{et } y_2 = \frac{1 + 1,077}{2} = 1,0385.$$

Donc l'algorithme ne converge pas pour ce problème.

c) Méthode d'Euler modifiée

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f\left(\frac{t_{n+1} + t_n}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right) \\ y_0 = 1, h = 0,2. \end{cases}$$

$$n=0 \Rightarrow y_1 = y_0 + h f\left(\frac{t_1+t_0}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right) \\ = 1 + 0,2 f\left(\frac{0,2}{2}, 1 + 0,1 f(0,1)\right) = 1,02.$$

$$y_2 = y_1 + h f\left(\frac{t_2+t_1}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(t_1, y_1)\right) = 1,0777.$$

$$y_3 = 1,1674.$$

$$y_4 = 1,2823.$$

$$y_5 = 1,4162.$$

d) Méthode de Taylor d'ordre 2:

$$\text{on a: } \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} h^k f^{(k)}(t_n, y_n) \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

$$\text{on a: } f^{[1]}(t, y(t)) = f'(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} \\ = \frac{1}{y(t)} + \frac{t}{y(t)} \cdot \frac{t}{(y(t))^2} = \frac{1}{y(t)} + \frac{t^2}{(y(t))^3}$$

$$\left(\text{car } \frac{\partial y(t)}{\partial t} = y'(t) = f(t, y(t)) = \frac{t}{y(t)} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{t}{(y(t))^2} \right)$$

$$\text{pour } n=0: y_1 = y_0 + h_0 f(t_0, y_0) + \frac{1}{2!} h_0^2 f'(t_0, y_0) = 1,02. / h_0 = h.$$

$$y_2 = y_1 + h f(t_1, y_1) + \frac{1}{2!} h^2 f'(t_1, y_1) = 1,0781.$$

$$y_3 = 1,1683.$$

$$y_4 = 1,2836.$$

$$y_5 = 1,4177.$$

e) La solution exacte:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{t}{y(t)} \Rightarrow y(t) dy(t) = t dt.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2(t) = \frac{1}{2} t^2 + C.$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{t^2 + C'}.$$

$$y(0)=1 \Rightarrow C'=1, \text{ donc } y(t) = \sqrt{t^2 + 1}.$$

t_n	$t_0=0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_n	1	1,0954	1,1077	1,11662	1,12806	1,14142

on a: $e_n = |y(t_n) - y_n|$ / $y(t_n)$ la valeur exacte.
 y_n " " approchée.

explicite	0	0,198	0,037	0,0493	0,0563	0,0593
modifié	0	0,0002	0,0904	0,0012	0,0017	0,0023
Taylor	0	0,0002	0,0011	0,0021	0,003	0,0035

Exo 2:

a) La solution exacte du problème (1),

on a: $y'(t) = -y(t) \Rightarrow \frac{dy(t)}{y(t)} = -dt \Rightarrow \ln(y(t)) = -t \Rightarrow y(t) = ke^{-t}$

on a: $y(0) = 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow y(t) = e^{-t}$.

la solution exacte de problème (2) est $y(t) = e^t$.

b) les solutions approchées

Pour le pb (1)

1) Euler explicite

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) = y_n - h_n y_n = (1 - h_n) y_n \Rightarrow y_{n+1} = (1 - h_n) y_n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{n+1} &= (1-h) y_n \\ &= (1-h)(1-h) y_{n-1} \\ &= (1-h)^2 y_{n-1} = (1-h)^3 y_{n-2} \\ &\vdots \\ &= (1-h)^{n+1} y_0 \end{aligned}$$

d'où la solution approchée de $y(t)$ est $y_N = (1-h)^N y_0 = (1-h)^{\frac{T}{h}}$

(puisque $h = \frac{t_0 + T - t_0}{N} = \frac{T}{N}$).

2) Euler implicite: $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n - h y_{n+1}$

$$\Rightarrow (1+h) y_{n+1} = y_n$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n}{1+h} = \frac{y_{n-1}}{(1+h)^2}$$

par récurrence $y_{n+1} = \frac{y_0}{(1+h)^{n+1}}$

d'où: $y_N = \frac{1}{(1+h)^N} = \frac{1}{(1+h)^{\frac{T}{h}}}$

pour le problème (2)

1) Euler explicite:

$$y_N = (1+h)^{\frac{T}{h}}$$

2) Euler implicite:

$$y_N = \frac{1}{(1-h)^{\frac{T}{h}}}$$

c) pour le pb (1): si $h \rightarrow 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_N = \lim_{h \rightarrow 0} (1-h)^{\frac{T}{h}} = e^{-T} \quad \left(\text{utiliser: } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{T}{k}\right)^k = e^{-T} \right) \quad \text{explicite}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_N = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(1+h)^{\frac{T}{h}}} = \frac{1}{e^T} = e^{-T} \rightarrow \text{implicite}$$

pour le problème (2)

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_N = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{T}{h}} = e^T \rightarrow \text{explicite.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_N = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(1-h)^{\frac{T}{h}}} = e^T \rightarrow \text{implicite.}$$

d'où les deux méthodes convergent vers la solution exacte pour les deux problèmes.

Si $h=2$: pour le pb (1):

$$y_N = (1-2)^{\frac{T}{2}} = (-1)^{\frac{T}{2}}$$

$$y_N = \frac{1}{3^{\frac{1}{N}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{3})^N}$$

pour h assez grand, le schéma d'Euler implicite est meilleur que celui d'Euler explicite.

• si $h \rightarrow 1$ pour le $p_2(2)$:

$$\lim_{h \rightarrow 1} y_N = \lim_{h \rightarrow 1} (1+h)^{\frac{1}{h}} = 2^T \rightarrow \text{explicite}$$

$$\lim_{h \rightarrow 1} y_N = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{1}{(2-h)^{\frac{1}{h}}} = \infty \rightarrow \text{implicite.}$$

d) Pour le schéma implicite, la solution approchée explose.

dans ce cas le schéma d'Euler explicite est meilleur que implicite.

EX03:

1) la méthode d'Euler

Dans ce cas $\phi(t, y, h) = f(t, y)$.

d'où $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$.

• Méthode du point milieu

$$\text{on a } \phi(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right)$$

d'où: $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = 1$.

2) les valeurs de (α, β, γ) pour que la méthode soit stable

Il suffit de démontrer que ϕ soit Lipschitzienne en y . c.-à-d:

$$\exists L > 0, \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y, z \in \mathbb{R} : |\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq L |y - z|.$$

$$\text{on a: } |\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \left(\alpha h + \beta h + \beta h^2 \frac{h_{\max}}{2} + \gamma h + \gamma h^2 h_{\max} \right) |y - z|$$

$$(h \leq h_{\max}), \text{ donc il suffit de prendre } L = \alpha h + \beta h + \beta h^2 \frac{h_{\max}}{2} + \gamma h + \gamma h^2 h_{\max}.$$

3) Consistance :

On sait qu'une méthode à un pas est consistante d'ordre p si :

$$\frac{\partial^l \phi(t, y, 0)}{\partial h^l} = \frac{1}{l+1} f^{(l)}(t, y), \quad 0 \leq l \leq p-1.$$

Pour $p=1$, on a : $\phi(t, y, 0) = \alpha f(t, y) + \beta f(t, y) + \gamma f(t, y)$
 $= (\alpha + \beta + \gamma) f(t, y).$

d'où : $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$ si $\alpha + \beta + \gamma = 1$, donc la consistance est au moins d'ordre 1.

Si $p=2$: $\frac{\partial \phi(t, y, 0)}{\partial h} = \frac{1}{2} f'(t, y).$

on pose $x_1 = t + \frac{h}{2}$; $y_1 = y + \frac{h}{2} f(t, y)$; $x_2 = t + h$; $y_2 = y + h f(t, y).$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t, y, h)}{\partial h} &= \beta \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial h} + \beta \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial h} + \gamma \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial h} + \gamma \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial h} \\ &= \frac{\beta}{2} \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial x_2} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y_1} f(t, y) + \gamma \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial y_2} f(t, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \phi(t, y, 0)}{\partial h} &= \frac{\beta}{2} f(t, y) + \frac{\beta}{2} f(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \gamma f(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \\ &= \frac{1}{2} \left[(\beta + 2\gamma) \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + (\beta + 2\gamma) f(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\beta + 2\gamma) f'(t, y). \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\beta + 2\gamma = 1$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, pour que la méthode elle est consistante au moins d'ordre 2.

- on a la méthode est stable et consistante au moins d'ordre deux, donc elle est convergente au moins d'ordre deux si elle vérifie $\alpha L = \alpha k^2 + \beta k + \beta k^2 \frac{h_{\max}}{2} + \gamma k + \gamma k^2 h_{\max}.$

la méthode elle est d'ordre supérieure si $p=3$: $\frac{\partial^2 \phi(t, y, 0)}{\partial h^2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} f^2(t, y)$.

$$\text{on a: } \frac{\partial^2 \phi(t, y, 0)}{\partial h^2} = \frac{\beta}{4} \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t^2} + \frac{\beta}{4} f(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t \partial y} + \frac{\beta}{4} f(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t \partial y} +$$

$$\frac{\beta}{4} f^2(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t^2} + \gamma f(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y \partial t} + \gamma f(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t \partial y} +$$

$$\gamma f^2(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2} \dots \text{--- (1)}$$

$$\text{et: } f''(t, y) = \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} \times \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + f(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t \partial y} + f(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y \partial t} +$$

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + f^2(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dots \text{--- (2)}$$

D'après (1) et (2), on ne peut pas trouver une relation entre α, β, γ pour que la méthode au moins d'ordre trois.

3. On conclut que la méthode n'est d'ordre 2, donc elle ne peut pas être d'ordre supérieure.

Exo 4:

1) La forme générale d'une méthode à un pas est: $y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$

$$\text{on a: } y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + h_n g(y_n)} \Rightarrow y_{n+1} (1 + h_n g(y_n)) = y_n$$

$$\Rightarrow y_{n+1} + h_n y_{n+1} g(y_n) = y_n$$

$$\Rightarrow y_{n+1} + h_n \cdot \frac{y_n \cdot g(y_n)}{1 + h_n g(y_n)} = y_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h_n \left[\frac{-y_n g(y_n)}{1 + h_n g(y_n)} \right]$$

$$\text{d'où: } \phi(t_n, y_n, h_n) = - \frac{y_n g(y_n)}{1 + h_n g(y_n)}$$

(11)

2) la méthode est consistante car: $\phi(t_n, y_n, 0) = f(t_n, y_n)$.

$$\phi(t, y, 0) = -y g(y) = f(y, t)$$

3) par récurrence.

4) Montrons la stabilité de la méthode: Il suffit de montrer que:

$\exists \rho > 0, \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y, z \in [0, y_0], \forall h < T: |\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \rho |y - z|$.

$$\begin{aligned} |\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| &= \left| \frac{-g(y)y}{1+hg(y)} + \frac{g(z)z}{1+hg(z)} \right| \\ &= \left| \frac{-g(y)y(1+hg(z)) + g(z)z(1+hg(y))}{(1+hg(y))(1+hg(z))} \right|. \end{aligned}$$

$$\leq \left| -g(y)y - hg(y)g(z) + zg(z) + hg(z)g(y) \right|.$$

$$\leq g(y)h g(z)|y-z| + |g(y)y - zg(z)|.$$

$$\leq g(y)g(z)h|y-z| + |g(y)y - g(z)z - g(y)z + g(y)z|.$$

$$\leq g(y)g(z)h|y-z| + |g(y)(y-z) + z(g(y)-g(z))|$$

$$\leq g(y)g(z)h|y-z| + g(y)|y-z| + |z||g(y)-g(z)|.$$

$$\leq g(y)[g(z)h+1]|y-z| + |z||g(y)-g(z)|.$$

puisque g est continue sur $[0, y_0]$, donc $\exists M_1 > 0: g(y)(g(z)h+1) \leq M_1$.

comme $g \in C^1$ sur $[0, y_0]$, d'après le théorème des accroissements

finis $\exists M_2 > 0, \forall y, z \in [0, y_0] \text{ tq: } |g(y) - g(z)| \leq M_2 |y - z|$.

d'où la stabilité de la méthode.

4) la méthode est consistante et stable donc elle est convergente.

Université de Tiji
Faculté des Sciences Exactes
et Informatique.
Département de Mathématiques

Master 1 EOP et Applications
Analyse Numérique des E.D.O
2019-2020.

TD 8

Exercice 1: Etudier l'ordre de la méthode de Runge-Kutta pour $q=4$.

Exercice 2: Montrer que la méthode d'AB_{r+1} de pas constant h

s'écrit:
$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^r b_{ni,r} f(t_{n-i}, y_{n-i})$$

avec
$$b_{ni,r} = (-1)^i \int_0^1 \frac{s(s+1)\dots(s+i-1)(s+i+1)\dots(s+r)}{i!(r-i)!} ds.$$

c-à-d $b_{ni,r}$ ne dépend pas de n .

Exercice 3: Soit le problème de Cauchy.

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{t}{y(t)}, \\ y(0) = 1, t \in [0,1] \text{ avec } h=0,2. \end{cases}$$

Approcher $y(1)$ en utilisant:

- la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
- la méthode d'AB₂.
- la méthode d'AM₂.

Chargé de Module: L. Menniche.

Enseigné par: Menniche, L.

Corrigé du TD2.

Exo1: l'algorithme de R.K pour $q=4$.

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[\frac{1}{6} p_{n,1} + \frac{4}{6} p_{n,2} + \frac{2}{6} p_{n,3} + \frac{1}{6} p_{n,4} \right].$$

$$p_{n,1} = f(t_n, y_n).$$

$$p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{1}{2} h_n, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

$$p_{n,3} = f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\right)\right).$$

$$p_{n,4} = f\left(t_n + h_n, y_n + h_n \left[f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\right) \right]\right)$$

$$\phi(t_n, y_n, h_n) = \frac{1}{6} p_{n,1} + \frac{4}{6} p_{n,2} + \frac{2}{6} p_{n,3} + \frac{1}{6} p_{n,4}.$$

on sait que une méthode à un pas et d'ordre p si

$$\frac{\partial^l \phi(t_n, y(t_n), 0)}{\partial h^l} = \frac{1}{l+1} f^{[l]}(t_n, y(t_n)), \quad 0 \leq l \leq p-1; \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

pour $p=1$ alors $l=0$.

$$\text{on a: } \phi(t, y(t), 0) = \frac{1}{6} f(t, y) + \frac{4}{6} f(t, y) + \frac{2}{6} f(t, y) + \frac{1}{6} f(t, y) = f(t, y)$$

donc le schéma de R.K est au moins d'ordre 1.

$$\text{pour } p=2 \text{ alors } l=1: \text{c.à.d. : } \frac{\partial \phi(t, y(t), 0)}{\partial h} \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2} f'(t, y(t)) = \frac{1}{2} y''(t).$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h}(t, y(h), t) = ?$$

$$\frac{\partial}{\partial h} p_{n,1} = 0.$$

$$\text{on pose } x(h) = t + \frac{h}{2} ; y(h) = y + \frac{h}{2} f(t, y).$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial h} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial h} \quad d'où :$$

$$\frac{\partial p_{n,2}(t, y, h)}{\partial h} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} f(t, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p_{n,2}(t, y, 0)}{\partial h} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{1}{2} f(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$$

$$\bullet p_{n,3}(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} p_{n,2}\right), \text{ posant :}$$

$$x(h) = t + \frac{h}{2}, y(h) = y + \frac{h}{2} p_{n,2}.$$

$$\frac{\partial p_{n,3}}{\partial h} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial h}.$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} p_{n,2} + \frac{h}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial p_{n,2}}{\partial h} \quad d'où :$$

$$\frac{\partial p_{n,3}(t, y, 0)}{\partial h} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{1}{2} f(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y}.$$

$$\bullet p_{n,4}(t, y, h) = f\left(t + h, y + h p_{n,3}\right), \text{ posant } x(h) = t + h; y(h) = y + h p_{n,3}.$$

$$\frac{\partial p_{n,4}}{\partial h} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial h}.$$

$$= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p_{n,3} + h \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial p_{n,3}}{\partial h} \quad d'où :$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{2}{6} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{1}{2} f(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right) + \frac{2}{6} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{1}{2} f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

$$\text{donc: } \frac{\partial \phi}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{1}{2} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + f(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} y''(t).$$

$$\text{avec: } \frac{\partial P_{n,4}}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y).$$

donc le schéma est consistant au moins d'ordre 2.

• de schéma est au moins d'ordre 3 si

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}(t, y, 0) = \frac{1}{3} y^{(3)}(t). \quad (\text{utiliser la même procédure}).$$

$$\text{on arrête jusqu'à } \frac{\partial^4 \phi}{\partial h^4}(t, y, 0) \neq \frac{1}{5} y^{(5)}(t).$$

on en déduit que la méthode de RK est d'ordre 4.

$$\text{Exo 2: on a: } b_{n,i,r} = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{r}{\pi} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}} dt.$$

on fait un changement de variable:

$$s = \frac{t - t_n}{h} \Rightarrow ds = \frac{1}{h} dt.$$

$$t = t_n + sh, \text{ si } t = t_n \Rightarrow s = 0 \text{ et si } t = t_{n+1} = t_n + h \Rightarrow s = 1.$$

$$\frac{r}{\pi} \left(\frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}} \right) = \frac{r}{\pi} \left(\frac{t_n + sh - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}} \right)$$

$$= \frac{r}{\pi} \frac{sh + hn - (n-j)h}{h(n-i) - h(n-j)}$$

$$= \frac{r}{\pi} \left(\frac{s+j}{j-i} \right).$$

$$= \frac{(s+0)(s+1)(s+2) \dots (s-i+1)(s+i+1) \dots (s+r)}{\underbrace{-i(n-i) \dots (i-1-i)}_{(-1)^i i!} \underbrace{(i+1-i) \dots (r-i)}_{(r-i)!}}$$

$$d'au: b_{n,i,r} = \frac{1}{i!} \int_0^1 \frac{s(s+1)\dots(s+i-1)(s+i+1)\dots(s+r)}{(-1)^i i! (r-i)!} ds$$

$$\text{donc: } b_{n,i,r} = \frac{(-1)^i}{i! (r-i)!} \int_0^1 s(s+1)\dots(s+i-1)(s+i+1)\dots(s+r) ds.$$

Exo 3: a) d'après Exo 1 on a:

$$y_1 = y_0 + 0,2 \left[\frac{1}{6} p_{0,1} + \frac{2}{6} p_{0,2} + \frac{2}{6} p_{0,3} + \frac{1}{6} p_{0,4} \right].$$

$$p_{0,1} = f(t_{0,1}, y_0) = \frac{0}{1} = 0.$$

$$p_{0,2} = f(t_{0,2}, y_{0,2}).$$

$$t_{0,2} = t_0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 = 0,1.$$

$$y_{0,2} = y_0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot p_{0,1} = 1 \quad d'au \quad p_{0,2} = 0,1.$$

$$p_{0,3} = f(t_{0,3}, y_{0,3}), \quad t_{0,3} = t_0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 = 0,1.$$

$$y_{0,3} = y_0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot p_{0,2} = 1,01.$$

$$p_{0,3} = 0,099.$$

$$p_{0,4} = f(t_1, y_{0,4}) \text{ avec } t_1 = 0,2.$$

$$y_{0,4} = 1 + 0,2 p_{0,3} = 1,0198.$$

$$p_{0,4} = 0,1961, \text{ donc:}$$

$$y_1 = 1 + 0,2 \left[\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{6} \cdot 0,1 + \frac{2}{6} \cdot 0,099 + \frac{1}{6} \cdot 0,1961 \right] = 1,0198$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = 1,0198}.$$

$$y_2 = y_1 + 0,2 \left[\frac{1}{6} p_{1,1} + \frac{2}{6} p_{1,2} + \frac{2}{6} p_{1,3} + \frac{1}{6} p_{1,4} \right].$$

$$p_{1,1} = f(t_1, y_1) = \frac{0,2}{1,0198} = 0,1961.$$

$$p_{1,2} = f(t_{1,2}, y_{1,2}) \text{ avec } t_{1,2} = t_1 + 0,1 = 0,2 + 0,1 = 0,3.$$

$$y_{1,2} = y_1 + 0,1 p_{1,1} = 1,0394 \text{ d'où } p_{1,2} = 0,2556.$$

$$p_{1,3} = f(t_{1,2}, y_{1,3}) ; y_{1,3} = y_1 + 0,1 p_{1,2} = 1,0437.$$

$$\text{d'où } p_{1,3} = 0,2861.$$

$$p_{1,4} = f(t_2, y_{1,4}) = ? , t_2 = 0,4.$$

$$y_{1,4} = y_1 + 0,2 p_{1,3} = 1,077. \text{ d'où } p_{1,4} = 0,3714.$$

$$y_2 = 1,0198 + 0,2 \left[\frac{1}{6} 0,1961 + \frac{2}{6} 0,2886 + \frac{2}{6} 0,2861 + \frac{1}{6} 0,3714 \right]$$

$$\Rightarrow y_2 = 1,0770.$$

$$y_3 = y_2 + 0,2 \left[\frac{1}{6} p_{2,1} + \frac{2}{6} p_{2,2} + \frac{2}{6} p_{2,3} + \frac{1}{6} p_{2,4} \right].$$

$$p_{2,1} = f(t_2, y_2) = 0,3714.$$

$$p_{2,2} = f(t_{2,2}, y_{2,2}) , \text{ avec } t_{2,2} = t_2 + 0,1 = 0,5.$$

$$y_{2,2} = y_2 + 0,1 p_{2,1} = 1,1141 \text{ d'où } p_{2,2} = 0,4438.$$

$$p_{2,3} = f(t_{2,2}, y_{2,3}) = ?$$

$$y_{2,3} = 1,1279 \text{ et } p_{2,3} = 0,4457.$$

$$y_{2,4} = y_2 + 0,2 p_{2,3} = 1,1661.$$

$$p_{2,4} = \frac{0,6}{1,1661} = 0,5145.$$

$$y_3 = 1,077 + 0,2 \left[\frac{1}{6} 0,3714 + \frac{2}{6} 0,4438 + \frac{2}{6} 0,4457 + \frac{1}{6} 0,5145 \right]$$

$$\text{d'où } y_3 = 1,1662.$$

De la même manière on trouve $y_4 = 1,2806$ et $y_5 = 1,4142 \approx y(1)$

b) on approche $y(1)$ par AB_2 ($r=1$)

on a: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (3f_n - f_{n-1})$.

$$y(0) = y_0 = 1.$$

Pour calculer y_1 , on utilise par exemple RK2.

$$\text{donc } y_1 = 1,02.$$

$$\text{pour } n=1: y_2 = y_1 + \frac{h}{2} (3f_1 - f_0) = 1,078823.$$

$$f_0 = f(t_0, y_0) = \frac{t_0}{y_0} = 0.$$

$$f_1 = \frac{t_1}{y_1} = 0,196078.$$

$$y_2 = 1,078823.$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2} (3f_2 - f_1).$$

$$f_2 = \frac{t_2}{y_2} = 0,370774. \text{ d'où } y_3 = 1,170447.$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{2} (3f_3 - f_2)$$

$$f_3 = \frac{t_3}{y_3} = 0,512625. \text{ d'où } y_4 = 1,287157.$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{2} (3f_4 - f_3) \text{ avec } f_4 = \frac{t_4}{y_4} = 0,621525.$$

$$\text{d'où } y_5 = 1,422362.$$

$$y(1) \approx y_5 = 1,422362.$$

c) on approche $y(1)$ par AM_2 .

$$\text{on a: } y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} \right).$$

$$= y_n + h \left[\frac{5}{12} \cdot \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} + \frac{8}{12} \cdot \frac{t_n}{y_n} - \frac{1}{12} \cdot \frac{t_{n-1}}{y_{n-1}} \right].$$

comme l'algorithme se a deux pas, il n'est pas auto-démarrant

$y_0 = 1$, pour calculer y_1 on utilise par exemple R.K d'ordre 2.

on trouve $y_1 = 1,02$ donc:

$$y_2 = y_1 + \frac{0,2}{12} \left(5 \frac{t_2}{y_2} + 8 \frac{t_1}{y_1} - \frac{0}{1} \right).$$

on calcule la valeur approchée de y_2 à partir de l'algorithme du point fixe:

$$x_{p+1} = U_n + h_n b_{n-1,1}^* f(t_{n+1}, x_p).$$

$$U_n = y_n + h \sum_{i=0}^1 b_{n,i}^* f(t_{n-i}, y_{n-i}) \text{ avec } n=1.$$

on prend $x_0 = y_2$ (d'AB₂).

$$\text{d'où } x_0 = 1,0788.$$

$$x_1 = U_1 + h b_{1,1,1}^* f(t_2, x_0).$$

$$U_1 = y_1 + 0,2 \left[b_{1,0,1}^* \cdot \frac{t_1}{y_1} + b_{1,1,1}^* \cdot \frac{t_0}{y_0} \right].$$

$$= (1,02) + 0,2 \left[\frac{5}{12} \cdot \frac{0,2}{1,02} + \frac{1}{12} \cdot 0 \right] = 1,0461$$

$$x_1 = 1,0461 + (0,2) \left(\frac{5}{12} \right) \left(\frac{0,4}{1,0788} \right) = 1,077.$$

$$x_2 = u_2 + h b_{1,1,2}^* f(t_2, x_1).$$

$$= 1,0461 + 0,2 \left(\frac{8}{12} \right) (0,3714) \Rightarrow x_2 = 1,0771.$$

$$\text{d'où } y_2 \simeq x_2 = 1,0771.$$

on calcule y_3 (la valeur approchée) à partir de l'algorithme du point fixe.

$$x_{p+1} = u_2 + h b_{x,-1,1}^* f(t_3, x_p)$$

$$x_1 = u_2 + h b_{x,-1,1}^* f(t_3, x_0).$$

$$x_0 = y_3 \text{ (AB}_2\text{) d'où } u_0 = 1,1704.$$

$$\begin{aligned} u_2 &= y_2 + 0,2 b_{x,0,1}^* f_2 + 0,2 b_{x,1,1}^* f_1 \\ &= 1,0771 + 0,2 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{0,4}{1,0771} + 0,2 \left(\frac{-1}{12} \right) \cdot \frac{0,2}{1,02} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } u_2 = 1,1233.$$

$$x_1 = u_2 + 0,2 \left[\frac{8}{12} \cdot \frac{0,4}{1,0771} - \frac{1}{12} \cdot \frac{0,2}{1,02} \right] + \frac{0,2 \times 5}{12} \cdot \frac{0,6}{1,1704}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 1,1527}$$

$$x_2 = u_2 + 0,2 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{0,6}{1,1527} = 1,1961 = y_3,$$

et ainsi de suite.