

Cours : Analyse Numérique des E.D.O.

Déstiné aux étudiants de Master 1 EDP et Applications.

Département de Mathématiques, Univ de Tiji

Enseigné par: Menniche Linda.

Proposition: Soient f, ϕ sont de classe C^p , une méthode à un pas et d'ordre p si:

$$\frac{\partial^l \phi(t_n, y(t_n), 0)}{\partial h^l} = \frac{1}{l+1} f^{[l]}(t_n, y(t_n)), \quad 0 \leq l \leq p-1, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Dans la pratique, le calcul récurrent des y_n est entachée d'erreurs d'arrondi note ε_n . Pour que les calculs soit significatifs il est indispensable que la propagation de ces erreurs reste contrôlables.

on est donc amené à la définition suivante:

Définition 3: on dit qu'une méthode à un pas est stable s'il existe une constante $S \geq 0$, appelé constante de stabilité, telle que pour toutes suites $(y_n), (\tilde{y}_n)$ définies par:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n), \quad 0 \leq n \leq N.$$

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \phi(t_n, \tilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n.$$

on ait:
$$\max_{0 \leq n \leq N} |\tilde{y}_n - y_n| \leq S \left(|\tilde{y}_0 - y_0| + \sum_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_n| \right).$$

Autrement dit, une petite erreur initiale $|\tilde{y}_0 - y_0|$ et de petites erreurs d'arrondi ε_n dans le calcul récurrent des $\tilde{y}_n$ provoquent un erreur finale $\max_{0 \leq n \leq N} |\tilde{y}_n - y_n|$ contrôlable.

Théorème: (Condition suffisante de stabilité)

Pour que la méthode à un pas est stable, il suffit que la fonction ϕ soit lipschitzienne en y , c'est-à-dire qu'il existe une constante $L \geq 0$ telle que $\forall T \in [t_0, t_0 + T], \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall h \in \mathbb{R}$:

$$|\phi(t, y_1, h) - \phi(t, y_2, h)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

(1)

dans ce cas on peut prendre pour constante de stabilité: $S = e^{LT}$.

Démonstration: considérons deux suites $(y_n), (\tilde{y}_n)$ telles que:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n).$$

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \phi(t_n, \tilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n.$$

par différence on obtient:

$$|\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}| \leq |\tilde{y}_n - y_n| + h_n L |\tilde{y}_n - y_n| + |\varepsilon_n|.$$

En posant $\theta_n = |\tilde{y}_n - y_n|$, il vient: $\theta_{n+1} \leq (1 + L h_n) \theta_n + |\varepsilon_n|$.

Pour compléter la démonstration du théorème, on a besoin de lemme

suivant:

Lemme de Gronwall: soient les suites $h_n, \theta_n, 0$ et $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$ telle que:

$$\theta_{n+1} \leq (1 + L h_n) \theta_n + |\varepsilon_n|. \text{ Alors:}$$

$$\theta_n \leq e^{L(t_n - t_0)} \theta_0 + \sum_{0 \leq i \leq n-1} e^{L(t_n - t_{i+1})} |\varepsilon_i|.$$

Preuve de lemme: par récurrence.

Pour $n=0$, l'inégalité se réduit à $\theta_0 \leq \theta_0$.

Supposons l'inégalité est vraie à l'ordre n , on observe que:

$$1 + L h_n \leq e^{L h_n} = e^{L(t_{n+1} - t_n)}$$

(puisque on a: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \Rightarrow 1 + x \leq e^x$ avec $x = L h_n$).

par hypothèse on a: $(1 + L h_n) \theta_n \leq e^{L(t_{n+1} - t_n)} \theta_n$.

$$\Rightarrow (1 + L h_n) \theta_n + |\varepsilon_n| \leq e^{L(t_{n+1} - t_n)} \theta_n + |\varepsilon_n|.$$

$$\Rightarrow \theta_{n+1} \leq e^{L(t_{n+1} - t_n)} \theta_n + |\varepsilon_n|.$$

$$\leq e^{L(t_{n+1} - t_n)} \left[e^{L(t_n - t_0)} \theta_0 + \sum_{0 \leq i \leq n-1} e^{L(t_n - t_{i+1})} |\varepsilon_i| \right] + |\varepsilon_n|.$$

(2)

$$\text{d'où: } \theta_{n+1} \leq e^{L(t_{n+1}-t_0)} \theta_0 + \sum_{0 \leq i \leq n-1} e^{L(t_{n+1}-t_{i+1})} |\varepsilon_i| + |\varepsilon_n|$$

l'inégalité cherchée s'ensuit d'ordre $(n+1)$.

et comme $t_n - t_0 \leq T$ et $t_n - t_{i+1} \leq T$, d'après le lemme de

$$\text{Gronwall implique: } \max_{0 \leq n \leq N} \theta_n \leq e^{LT} (\theta_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i|).$$

$$\text{on a donc: } \max_{0 \leq n \leq N} |\tilde{y}_n - y_n| \leq e^{LT} (|\tilde{y}_0 - y_0| + \sum_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i|),$$

et le théorème est démontré.

Définition 4 (Convergence).

Un schéma à un pas est dit convergent, si pour toute solution exacte y définie sur $[t_0, t_0+T]$, la suite y_n telle que: $y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$.

$$\text{vérifie } \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \longrightarrow 0$$

quand $y_0 \rightarrow y(t_0)$ et $h_{\max} \rightarrow 0$.

• $e_n = |y_n - y(t_n)|$ appelé l'erreur locale.

• la quantité $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$ s'appelle l'erreur globale.

Théorème:

Si la méthode à un pas est stable et consistante, elle est convergente.

Preuve: on pose:

$$y_{n+1} = y(t_{n+1}) = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) + e_n$$

telle que e_n est l'erreur de consistance, donc d'après la définition de stabilité, on a: $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \leq S(|y_0 - y(t_0)| + \sum_{0 \leq i \leq n} |e_i|)$.

$$\text{d'où: } \lim_{\substack{h_{\max} \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow y(t_0)}} |y_n - y(t_n)| \leq \lim_{\substack{h_{\max} \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow y(t_0)}} S(|y_0 - y(t_0)| + \sum_{0 \leq i \leq n} |e_i|)$$

$$0 \leq \lim_{\substack{h_{\max} \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow y(t_0)}} |y_n - y(t_n)| \leq \lim_{\substack{h_{\max} \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow y(t_0)}} \sum_{0 \leq n \leq N} |e_n| = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{puisque la méthode} \\ \text{est consistante} \end{array} \right).$$

$\Rightarrow \lim_{\substack{h_{\max} \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow y(t_0)}} y_n = y(t_n)$, donc la méthode est convergente.

Majoration de l'erreur globale

Compte tenu de la majoration supposée, satisfaite pour e_n , on a

$$|e_n| \leq c h_n^{p+1} \Rightarrow \sum_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq c \sum_{0 \leq n \leq N} h_n^{p+1} \leq c \sum_{0 \leq n \leq N} h_n h_{\max}^p \leq h_n T h_{\max}^p.$$

si la méthode est stable avec constante de stabilité S , on obtient donc la majoration $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \leq S (|y_0 - y(t_0)| + c T h_{\max}^p)$.

L'erreur initiale $|y_0 - y(t_0)|$ est généralement négligeable. L'erreur globale donnée par une méthode d'ordre p est donc de l'ordre de grandeur $h_{\max}^p$ avec une constante proportionnalité $S c T$.

Théorème (condition nécessaire et suffisante de consistance).

La méthode définie par ϕ est consistante si et seulement si

$$\forall (t, y, h) \in [t_0, t_0 + T] \times J \times [0, h_{\max}] : \phi(t, y, 0) = f(t, y).$$

où J est un compact de $\mathbb{R}$.

Preuve: soit y la solution exacte de (E) et soient

$$e_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n), \quad 0 \leq n \leq N.$$

des erreurs de consistance correspondantes.

d'après le théorème des accroissements finis (puisque $y \in C^1[t_0, t_0 + T]$),

$$\exists c_n \in]t_n, t_{n+1}[: y(t_{n+1}) - y(t_n) = h_n y'(c_n) = h_n f(c_n, y(c_n)) / h_n = t_{n+1} - t_n.$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } e_n &= h_n \left[f(c_n, y(c_n)) - \phi(t_n, y(t_n), h_n) \right] = h_n (\alpha_n + \beta_n) \\
 &= h_n \left[f(c_n, y(c_n)) - \phi(c_n, y(c_n), 0) + \phi(c_n, y(c_n), 0) - \phi(t_n, y(t_n), h_n) \right] \\
 &= h_n (\alpha_n + \beta_n).
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= f(c_n, y(c_n)) - \phi(c_n, y(c_n), 0) \\
 \beta_n &= \phi(c_n, y(c_n), 0) - \phi(t_n, y(t_n), h_n).
 \end{aligned}$$

Comme la fonction $(t, y) \mapsto \phi(t, y(t), h)$ est continue sur $[t_0, t_0+T] \times J$ qui est compact, elle est uniformément continue.

par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, h_{\max} \leq \eta \Rightarrow |\beta_n| \leq \varepsilon \dots (*)$

on a donc : $|e_n| \leq h_n (|\alpha_n| + |\beta_n|)$.

$$\Rightarrow \sum_{0 \leq n \leq N} |e_n| \leq \sum_{0 \leq n \leq N} h_n |\alpha_n| + \sum_{0 \leq n \leq N} h_n |\beta_n|.$$

$$\Rightarrow \sum_{0 \leq n \leq N} |e_n| - \sum_{0 \leq n \leq N} h_n |\alpha_n| \leq \sum_{0 \leq n \leq N} h_n |\beta_n|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \sum_{0 \leq n \leq N} |e_n| - \sum_{0 \leq n \leq N} h_n |\alpha_n| \right| \leq \sum_{0 \leq n \leq N} h_n |\beta_n| \leq T\varepsilon \quad (\text{d'après } *).$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}
 \lim_{h_{\max} \rightarrow 0} \sum_{0 \leq n \leq N} |e_n| &= \lim_{h_{\max} \rightarrow 0} \sum_{0 \leq n \leq N} h_n |\alpha_n| \\
 &= \lim_{h_{\max} \rightarrow 0} \sum_{0 \leq n \leq N} h_n \left| f(c_n, y(c_n)) - \phi(c_n, y(c_n), 0) \right| \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t, y(t)) - \phi(t, y(t), 0)| dt.
 \end{aligned}$$

car on a : si une fct est intégrable alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N f(\theta_i) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

si on pose : $h_n = \frac{1}{n}$ alors si $n \rightarrow +\infty$, alors $h_n \rightarrow 0$ avec $a = t_0$ et $b = t_0 + T$.

(5)

on a la méthode et consistance si $\lim_{h_{\max} \rightarrow 0} \sum |e_n| = 0$

$$c.-\bar{a}.d \quad \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t, y(t)) - \phi(t, y(t), 0)| dt = 0.$$

$$\Rightarrow f(t, y(t)) - \phi(t, y(t), 0) = 0.$$

$$\Rightarrow f(t, y(t)) = \phi(t, y(t), 0).$$

6

6

3. Méthode de Runge-Kutta (1901)

Les méthodes de Runge-Kutta sont les méthodes d'analyse numérique d'approximation de solution d'équation différentielle.

Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c-à-d qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite.

3.1. Principe général: on considère le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), t \in [t_0, t_0 + T]. \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

et on cherche à discrétiser ce problème par rapport à une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$.

L'idée est de calculer par récurrence les pts (t_n, y_n) en utilisant des points intermédiaires $(t_{n,i}, y_{n,i})$ avec $t_{n,i} = t_n + c_i h_n$, $1 \leq i \leq q$, $c_i \in [0, 1]$.

A chacun de ces points on associe la pente correspondante $p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i})$.
Soit y une solution exacte de l'équation, on a:

$$\begin{aligned} y(t_{n,i}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t)) dt \\ &= y(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du \end{aligned}$$

grâce au changement de variable $t = t_n + u h_n$ (si $t_{n,i} = t_{n+1}$ alors

$$t_{n+1} = t_n + c_i h_n \Rightarrow t_{n+1} - t_n = h_n = c_i h_n \Rightarrow c_i = 1).$$

$$\text{De même: } y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + u h_n) du.$$

on se donne alors pour chaque $i = 1, 2, \dots, q$ une méthode d'intégration approchée.

$$\int_0^{c_i} g(t) dt \approx \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} g(c_j) \dots (M_i).$$

Ces méthodes peuvent être a priori différents. on se donne également une méthode d'intégration approchée sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 g(t) dt \approx \sum_{j=1}^q b_j g(c_j) \dots (M).$$

En appliquant ces méthodes d'intégration à $g(u) = f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n))$, il vient $y(t_{n,i}) \approx y(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} f(t_{n,j}, y(t_{n,j}))$.

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j \leq q} b_j f(t_{n,j}, y(t_{n,j})).$$

La méthode de Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{n,i} = t_n + c_i h_n \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} p_{n,j} \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}). \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq q.$$

$$t_{n,q+1} = t_n + h_n.$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j}$$

on la représente conventionnellement par le tableau suivant :

(M_1)	c_1	0	0	$\dots$	0	0
(M_2)	c_2	a_{21}	0	$\dots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$					
(M_q)	c_q	a_{q1}	a_{q2}	$\dots$	a_{qq-1}	0
(M)		b_1	b_2	$\dots$	b_{q-1}	b_q

où les méthodes d'intégration approchée correspondent aux lignes. on pose par convention $a_{ij} = 0$ pour $j > i$.

Remarque: On supposera toujours que les méthodes d'intégration (M_i) et (M) sont d'ordre 0, c-à-d $C_i = \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij}$, $\sum_{1 \leq j \leq q} b_j = 1$.

en effet: $g(H)=dt$, on peut prendre $g(H)=1$ d'où:

$$\int_0^C dt = \sum_{j=1}^i a_{ij} \Rightarrow \sum_{j=1}^i a_{ij} = C_i.$$

$$\int_0^1 dt = \sum_{j=1}^q b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^q b_j = 1.$$

En particulier, on aura toujours $C_1=0$, $t_{n+1}=t_n$, $y_{n+1}=y_n$, $p_{n+1}=f(t_n, y_n)$.

Exemple 1: pour $q=2$.

de choix le plus possible et: $\frac{0}{1} \mid \frac{0}{1}$

et l'algorithme est donné par:

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n). \\ t_{n+1} = t_n + h_n. \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_{n,1}. \end{cases}$$

Il s'agit de la méthode d'Euler.

Exemple 2: pour $q=2$.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1 - \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array} \quad \text{où } \alpha \in]0,1].$$

l'algorithme s'écrit ici:

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} = t_n + \alpha h_n. \\ y_{n,2} = y_n + \alpha h_n p_{n,1} \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}). \\ t_{n+1} = t_n + h_n. \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left(\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) p_{n,1} + \frac{1}{2\alpha} p_{n,2} \right). \end{cases}$$

ou encore, sous forme condensée:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f\left(t_n + \alpha h_n, y_n + \alpha h_n f(t_n, y_n)\right) \right]$$

• Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on retrouve la méthode du pt milieu:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\right).$$

qui est basée sur la méthode d'intégration du point milieu:

$$\int_0^1 g(t) dt \approx g\left(\frac{1}{2}\right).$$

• Pour $\alpha = 1$, on obtient la méthode de Heun

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[\frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f\left(t_n + h_n, y_n + h_n f(t_n, y_n)\right) \right].$$

qui repose sur la méthode d'intégration des trapèzes: $\int_0^1 g(t) dt \approx \frac{1}{2}(g(0) + g(1))$.

Exemple 03: Pour $q=4$, on obtient la méthode de Runge-Kutta classique.

Il s'agit de la méthode définie par le tableau:

π_1	c_1	0	0	0	0	0
π_2	c_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
π_3	c_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
π_4	c_4	1	0	0	1	0
π			$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'algorithme correspondant s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2} h_n \\ y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2} h_n p_{n,1} \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2} h_n p_{n,2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n,3} = f(t_{n,2}, y_{n,3}) \cdot (\text{noter que } t_{n,3} = t_{n,2}) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \quad (\text{noter que } t_{n,4} = t_{n+1}) \\ y_{n,4} = y_n + h_n p_{n,3} \\ p_{n,4} = f(t_{n+1}, y_{n,4}) \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{6} p_{n,1} + \frac{2}{6} p_{n,2} + \frac{2}{6} p_{n,3} + \frac{1}{6} p_{n,4} \right) \end{array} \right.$$

Dans ce cas les méthodes d'intégration $(M_1), (M)$ utilisées sont respectivement :

$$(M_2) \quad \int_0^1 g(t) dt \approx \frac{1}{2} g(0); \text{ rectangle à gauche.}$$

$$(M_3) \quad \int_0^1 g(t) dt \approx \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{2}\right); \text{ rectangle à droite.}$$

$$(M_4) \quad \int_0^1 g(t) dt \approx g\left(\frac{1}{2}\right); \text{ point milieu.}$$

$$\int_0^1 g(t) dt \approx \frac{1}{6} g(0) + \frac{2}{6} g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} g(1); \text{ Simpson.}$$

3.1 Stabilité des méthodes de Runge-Kutta.

des méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes à un pas

$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$ avec $\phi(t_n, y_n, h_n) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j}$, la fonction ϕ est définie de manière explicite par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(t, y, h) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j f(t + c_j h, y_j) \text{ avec} \\ y_i = y + h \sum_{1 \leq j \leq q} a_{ij} f(t + c_j h, y_j), \quad 1 \leq i \leq q \end{array} \right. \dots (*)$$

supposons que f soit L -lipschitzienne en y . on va montrer que ϕ est alors également lipschitzienne.

Soit $z \in \mathbb{R}$ et supposons $\phi(t, y, h)$ et z_i définis à partir de z comme dans la formule (*). Pour ce la, on a besoin de lemme suivant:

Lemme: Soit $\alpha = \max_{1 \leq j \leq i} |a_{ij}|$. Alors:

$$|y_i - z_i| \leq \left(1 + (kL\alpha) + (kLh)^2 + \dots + (kLh)^{i-1}\right) |y - z|.$$

Preuve du lemme: par récurrence sur i

Pour $i=1$, on a $y_1 = y$, $z_1 = z$ et le résultat est évident.

Supposons que l'inégalité est vraie pour tout $j < i$, alors

$$|y_i - z_i| \leq |y - z| + h \sum_{j < i} |a_{ij}| \cdot k \cdot \max_{j < i} |y_j - z_j|$$

$$|y_i - z_i| \leq |y - z| + \alpha k h \max_{j < i} |y_j - z_j|$$

par hypothèse de récurrence il vient: $\max_{j < i} |y_j - z_j| \leq \left(1 + \alpha k h + \dots + (kLh)^{i-2}\right) |y - z|$

et l'inégalité s'en suit à l'ordre i .

La formule (*) entraîne maintenant

$$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \sum_{2 \leq j \leq 9} |b_j| k |y_j - z_j| \leq \Delta |y - z|,$$

avec $\Delta = k \sum_{2 \leq j \leq 9} |b_j| \left(1 + \alpha k h_{\max} + \dots + (kLh_{\max})^{j-1}\right).$

Corollaire: Les méthodes de Runge-Kutta sont stables, avec constante de stabilité $S = e^{\Delta T}$.

3.2 Consistance des méthodes de Runge-Kutta

on sait que une méthode à un pas est consistante si $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$

$\forall y \in \mathbb{J}, t \in [t_0, t_0 + T], h \in [0, h_{\max}]$.

on a
$$\phi(t, y, h) = \sum_{j=1}^9 b_j f(t + c_j h, y_j)$$

$$\text{d'où } \phi(t, y, 0) = \sum_{j=1}^q b_j f(t, y_j)$$

$$= \sum_{j=1}^q b_j f(t, y) \quad / \quad y_j = y$$

$$= f(t, y) \sum_{j=1}^q b_j = f(t, y).$$

d'où la consistance des méthodes de Runge-Kutta.

3.3 Convergence des méthodes de Runge-Kutta.

Comme ces méthodes sont stables et consistantes, alors ces méthodes sont convergentes.

Chapitre 3 : Méthodes à pas multiples

On s'intéresse toujours à la résolution numérique du problème de Cauchy relatif à une équation différentielle: $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $y \in \mathbb{R}$.

Soit $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ une subdivision de $[t_0, t_0 + T]$ de pas

successifs $h_n = t_{n+1} - t_n$.

Définition 1: On appelle méthode numérique à $(r+1)$ pas

toute méthode numérique de la forme:

$$y_{n+1} = \Psi(t_n, y_n, h_n, \dots, t_{n-r}, y_{n-r}, h_{n-r}), \quad n \geq r.$$

3.1 Méthode avec pas constant

on suppose que le pas $h_n = h$ est constant, on considère les méthodes (M) de la forme:

$$(M) \quad \begin{cases} y_{n+1} = \sum_{i=0}^r \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^r \beta_i f_{n-i}, \\ t_{n+1} = t_n + h, \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}). \end{cases}$$

où α_i, β_i , $0 \leq i \leq r$ sont des constantes réelles.

3.2 Démarrage de l'algorithme: de point initial (t_0, y_0) étant donné, l'algorithme ne peut démarrer que si les valeurs $(y_1, f_1), \dots, (y_r, f_r)$ ont déjà été calculées.

On dit dans ce cas que les méthodes à pas multiples ne sont pas auto-démarrante, et les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_r$ se calculent à partir d'un algorithme à un pas. (Méthode de Runge-Kutta).

3.3 Méthode d'Adams-Bashforth

3.3.1. Description : si on suppose que y est une solution exacte de (E), on écrit :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Supposons que pour $0 \leq i \leq r$, on ait déjà calculé les points $y(t_{n-i})$ et les pentes $f_{n-i} = f(t_{n-i}, y(t_{n-i}))$.

L'idée de la méthode est d'approximer la fonction $f(t, y(t))$ sur $[t_n, t_{n+1}]$ par son polynôme d'interpolation aux points $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-r}$.

Considérons donc le polynôme $P_{n,r}(t)$ qui interpole les points (t_{n-i}, f_{n-i}) , $0 \leq i \leq r$:

$$P_{n,r}(t) = \sum_{i=0}^r f_{n-i} L_{n,i,r}(t), \quad \deg P_{n,r} = r.$$

où :

$$L_{n,i,r}(t) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq r \\ j \neq i}} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}}, \quad 0 \leq i \leq r.$$

$$\text{on a : } y'(t) = f(t, y(t)) \text{ d'où } \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

on écrit maintenant : $y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,r}(t) dt.$

$$\Rightarrow y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} f_{n-i}$$

$$\text{avec } b_{n,i,r} = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}(t) dt.$$

L'algorithme de la méthode d'Adams-Bashforth à $(r+1)$ pas
(en abrégé AB_{r+1}) donc s'écrit :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} f_{n-i}, & n \geq r, \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

L'intérêt de cette méthode provient de sa simplicité
puisque une seule évaluation de f est nécessaire à
chaque étape.

Remarque 1 : Pour la phase d'initialisation on choisit
une méthode de Runge-Kutta par exemple d'ordre
 $(r+1)$ pour initialiser les premières valeurs

$$y_1, \dots, y_r, f_1, \dots, f_r.$$

on dit dans ce cas que l'algorithme d' AB_{r+1} n'est
pas auto-démarrant.

Exemples

• $r=0$: On a $p_{n,0}(t) = \text{constante} = f_n$, d'où

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_n dt, \text{ d'où AB}_1: y_{n+1} = y_n + h_n f_n.$$

Il s'agit de la méthode d'Euler explicite.

• $r=2$: $p_{n,2}$ est le polynôme d'interpolation de f aux points (t_n, f_n) et (t_{n-1}, f_{n-1}) (de degré 1), d'où:

$$p_{n,2}(t) = f_n L_{n,0,2}(t) + f_{n-1} L_{n,1,2}(t)$$

$$\text{Eq: } L_{n,0,2}(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \quad \text{et} \quad L_{n,1,2}(t) = \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n}.$$

d'où:

$$p_{n,2}(t) = f_n \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + f_{n-1} \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n}.$$

$$= \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left[f_n (t - t_n + t_n - t_{n-1}) + f_{n-1} (t - t_n) \right]$$

$$= \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left[f_n (t - t_n) + f_n (t_n - t_{n-1}) + f_{n-1} (t - t_n) \right]$$

$$= f_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} (t - t_n).$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,2}(t) dt = f_n h_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \left[\frac{1}{2} (t - t_n)^2 \right]_{t_n}^{t_{n+1}}.$$

$$= h_n \left[f_n + \frac{h_n}{2 h_{n-1}} (f_n - f_{n-1}) \right].$$

L'algorithme s'écrit donc

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \left(f_n + \frac{h_n}{2h_{n-1}} (f_n - f_{n-1}) \right) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_n) \end{cases}$$

AB₂ : $t_{n+1} = t_n + h_n$.

$f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_n)$.

Lorsque $h_n = h$ est constant, l'algorithme AB₂ s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right).$$

Remarque 2 : si le pas h_n est constant les coefficients $b_{i,r}$ ne dépendent pas de n .

on se donne le tableau suivant pour les petites valeurs des r , les coefficients $b_{i,r}$ correspondants sont aussi donnés.

r	$b_{0,r}$	$b_{1,r}$	$b_{2,r}$	$b_{3,r}$	$\beta_r = \sum_i b_{i,r} $
0	1				1
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$			2
2	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$		3,66...
3	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$	6,66...

où $\beta_r = \sum_i |b_{i,r}|$.

3.3.2 Erreur de consistance et ordre de la méthode d'AB_{r+1}

Soit y une solution exacte du problème de Cauchy

L'erreur de consistance est donnée par $e_n = y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}$
d'où $e_n = y(t_{n+1}) - \left[y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,r}(t) dt \right]$.

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - p_{n,r}(t)) dt.$$

où $p_{n,r}$ est le polynôme d'interpolation de la fonction

$y'(t) = f(t, y(t))$ aux points $t_{n,i}$, $0 \leq i \leq r$.

D'après le théorème de la moyenne, il existe un point

$\theta \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que $e_n = h_n (y'(\theta) - p_{n,r}(\theta)) \dots \dots \textcircled{2}$

Théorème de la moyenne (Rappel).

Si f continue sur $[a, b]$, il existe $\theta \in]a, b[$ tel que

$$f(\theta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

On rappelle le théorème suivant:

Théorème 1 on suppose que f est $(n+1)$ fois dérivable sur

$[a, b]$, alors pour tout $x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$
on a:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(\xi_x) f^{(n+1)}(\xi_x)$$

où $\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$, tel que x_j , $0 \leq j \leq n$ sont les points d'interpolation et p_n le polynôme d'interpolation au pts x_j , $0 \leq j \leq n$.

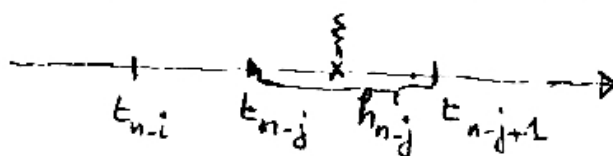
D'après le théorème précédent, on obtient:

$$\textcircled{1} \text{ et } e_n = h_n \left[\frac{1}{(r+1)!} y^{(r+2)}(\xi) \pi_{n,r+1}(\xi) \right]$$

où $\xi \in]t_{n-r}, t_{n+1}[$ est un point intermédiaire entre σ et les pts t_{n-i} , $0 \leq i \leq r$ et $\pi_{n,r+1}(\xi) = \prod_{i=0}^r (\xi - t_{n-i})$

• On suppose que $\xi \in]t_{n-j}, t_{n-j+1}[$, $j = 0, \dots, r$, on a:

Si $i > j$



$$t_{n-j} - t_{n-i} \leq (t_{n-j+1} - t_{n-j}) + (t_{n-j} - t_{n-i})$$

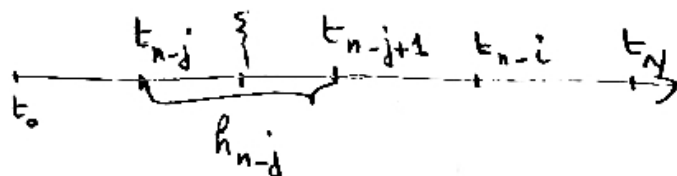
$$\leq h_{n-j} + (n-j - (n-i)) h_{n-i}$$

$$\leq h_{\max} + (i-j) h_{\max} = (1 + (i-j)) h_{\max}$$

(puisque on a: $t_i = t_0 + i h$)

Si $i \leq j$

on a: $i \leq j \Rightarrow n-i \geq n-j$.



$$t_{n-i} - t_{n-j} \leq (t_{n-j+1} - t_{n-j}) + (t_{n-i} - t_{n-j})$$

$$\leq h_{n-j} + (n-i - (n-j)) h_{n-j}$$

$$\leq (1 + (j-i)) h_{\max}$$

$$\text{d'où } \prod_{i=0}^r (z - t_{n-i}) = \prod_{i=0}^j (z - t_{n-i}) \prod_{l=j+1}^r (z - t_{n-i})$$

$$\Rightarrow \prod_{i=0}^r (z - t_{n-i}) \leq h_{\max}^{r+1} (-1)^{j+1} \left[(1+j)(1+(j+1)) \times \dots \times (1+(r-j)) \right] \times \\ \left[(1+(j+1)-j)(1+(j+2)-j) \dots (1+(r-j)-j) \right]$$

$$\Rightarrow \prod_{i=0}^r (z - t_{n-i}) \leq h_{\max}^{r+1} (-1)^{j+1} (1+j) \times j \times \dots \times 2 \times 1 \times$$

$$\left[(1+(j+1)-j)(1+(j+2)-j) \times \dots \times (1+(r-j)-j) \right]$$

on pose $j+l = i$, tel que $j+1 \leq i \leq r$

$$\text{d'où } j+1 \leq j+l \leq r \Rightarrow 1 \leq l \leq r-j.$$

$$\text{on a } 1+(j+l)-j = 1+l \leq 1+l+j, \quad 1 \leq l \leq r-j.$$

$$\text{si } l=1 \Rightarrow 1+(j+1)-j \leq 1+1+j = 2+j.$$

$$\text{si } l=2 \Rightarrow 1+(j+2)-j \leq 1+2+j = 3+j.$$

$\vdots$

$$\text{si } l=r-j \Rightarrow 1+(r-j)-j \leq 1+r-j+j = 1+r. \text{ donc:}$$

$$\prod_{i=0}^r (z - t_{n-i}) \leq h_{\max}^{r+1} \underbrace{(-1)^{j+1} (1+j)j \times \dots \times 2 \times 1 \times (j+2)(j+3) \times \dots \times (r+1)}_{(r+1)!}$$

d'où:

$$\prod_{i=0}^r (z - t_{n-i}) \leq h_{\max}^{r+1} (-1)^{j+1} (r+1)!$$

$$\text{alors: } |e_n| \leq h_n h_{\max}^{r+1} \frac{(r+1)!}{(r+1)!} \left| y \left(\frac{r+2}{3} \right) \right|.$$

$$\leq h_n h_{\max}^{r+1} \cdot C$$

$$\text{avec } C = \max_{z \in [t_n, t_{n+1}]} \left| y \left(\frac{r+2}{3} \right) \right|.$$

donc la méthode d'Adams-Bashforth à $(r+1)$ pas est
consistante d'ordre $r+1$.

3.3.3 Stabilité de la méthode AB_{r+1}

Théorème: On suppose que $f(t, y)$ est k -lipshitzienne
en y et que les sommes $\sum_{i=0}^r |b_{n,i,r}|$ sont majorées

indépendamment de n par une constante β_r . Alors

la méthode d'Adams-Bashforth à $r+1$ pas est stable,
avec constante de stabilité $S = e^{\beta_r k T}$.

preuve: Soit $\tilde{y}_n$ la suite récurrente perturbée telle que

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} \tilde{f}_{n-i} + \varepsilon_n, & r \leq n \leq N, \\ \tilde{f}_{n-i} = f(t_{n-i}, \tilde{y}_{n-i}). \end{cases}$$

Posons $\theta_n = \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{y}_i - y_i|$. On a

$$|\tilde{f}_{n-i} - f_{n-i}| \leq k |y_i - \tilde{y}_i| \leq k \theta_n \quad (\text{puisque } f \text{ est } k\text{-lipsh})$$

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}| &= \left| \tilde{y}_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} \tilde{f}_{n-i} + \varepsilon_n - \left(y_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} f_{n-i} \right) \right| \\ &\leq |\tilde{y}_n - y_n| + h_n \sum_{i=0}^r |b_{n,i,r}| |\tilde{f}_{n-i} - f_{n-i}| + |\varepsilon_n|. \end{aligned}$$

$$\leq \theta_n + h_n \beta_r k \theta_n + |\varepsilon_n|.$$

$$\leq (1 + \beta_r k h_n) \theta_n + |\varepsilon_n|.$$

Comme $\theta_{n+1} = \max(\theta_n, |\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}|)$, on en déduit

$$\theta_{n+1} \leq (1 + \beta_r k^2 h_n) \theta_n + |\varepsilon_n|.$$

Le lemme de Gronwall implique alors

$$\theta_N \leq e^{(\beta_r k^2 (t_N - t_r))} \left(\theta_r + \sum_{n=0}^N |\varepsilon_n| \right)$$

$$\leq e^{\beta_r k^2 T} \left(\theta_r + \sum_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_n| \right).$$

Ce qui donne la stabilité des méthodes d'AB_{r+1} avec constante de stabilité $S = e^{\beta_r k^2 T}$.

Remarque : d'après le tableau précédent, on voit que la constante β_r croît assez vite quand r augmente. La stabilité devient donc de moins en moins quand le nombre de pas augmente. En pratique on se limitera le plus souvent aux cas $r=1$ ou $r=2$.

3.4 Méthode d'Adams-Moulton

3.4.1 Description: L'idée en est la même que celle des méthodes d'Adams-Bashforth, mais on approxime ici $f(t, y(t))$ par son polynôme d'interpolation aux points $t_{n+1}, t_n, \dots, t_{n-r}$; le point t_{n+1} est donc pris en plus.

on considère le polynôme $P_{n,r}^*(t)$ de degré $r+1$ qui interpole les points $(t_{n,i}, f_{n,i})$ pour $-1 \leq i \leq r$

$$P_{n,r}^*(t) = \sum_{-1 \leq i \leq r} f_{n,i} L_{n,i,r}^*(t),$$

avec

$$L_{n,i,r}^*(t) = \prod_{\substack{j=-1 \\ j \neq i}}^r \left(\frac{t - t_{n,j}}{t - t_{n,i}} \right)$$

on obtient donc:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \sum_{i=-1}^r b_{n,i,r}^* f_{n,i}.$$

avec:

$$b_{n,i,r}^* = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}^*(t) dt.$$

L'algorithme d'Adams-Moulton à $r+1$ pas noté AM_{r+1} s'écrit:

$$y_{n+1} - h_n b_{n,-1,r}^* f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r}^* f_{n,i} \quad \text{--- (2)}$$

Remarque: on remarque que y_{n+1} n'est pas donné explicitement en fonction des quantités $y_n, f_{n,i}$ antérieurement calculées. Pour cette raison, on dit que la méthode d'Adams-Moulton est une implicite (la méthode d'Adams-Moulton est une méthode explicite).

Pour résoudre l'équation (2) on aura recours en général à une méthode itérative.

Notons u_n la quantité explicite:

$$u_n = y_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r}^* f_{n-i}$$

Le point y_{n+1} cherché est la solution x de l'équation

$$x = u_n + h_n b_{n,r-1,r}^* f(t_{n+1}, x).$$

On va donc calculer la suite itérée $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ où

$$\varphi(x) = u_n + h_n b_{n,r-1,r}^* f(t_{n+1}, x).$$

Si on suppose que f est k -lipschitzienne alors

$f_y'(t_{n+1}, x)$ est borné.

(puisque toute f est dérivable sur un intervalle réel et k -lipschitzienne si la dérivée est bornée).

Comme $\varphi'(x) = h_n b_{n,r-1,r}^* f_y'(t_{n+1}, x)$ d'où:

$$|\varphi'(x)| = h_n |b_{n,r-1,r}^*| |f_y'(t_{n+1}, x)| < h_n |b_{n,r-1,r}^*| \cdot k < 1$$

$$\text{d'où: } h_n < \frac{1}{k |b_{n,r-1,r}^*|}$$

donc il suffit que $h_n < \frac{1}{k |b_{n,r-1,r}^*|}$ pour avoir la

Convergence de la méthode.

La solution y_{n+1} de l'équation $x = \varphi(x)$ est alors unique d'après le théorème de point fixe et l'algorithme

converge vers y_{n+1} , et l'algorithme itératif s'écrit

$$\begin{cases} F_p = f(t_{n+1}, x_p) \\ x_{p+1} = x_n + h_n b_{n+1,r} F_p \end{cases}$$

on choisira une valeur initiale x_0 qui soit une approximation de y_{n+1} , par exemple la valeur donnée par la méthode d'AB_{r+1}

c-à-d: $x_0 = y_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} f_{n-i}$

on arrête l'itération pour $|x_{p+1} - x_p| < \varepsilon$ (ε la précision donnée) et on prend

$$\begin{cases} y_{n+1} = \text{dernière valeur } x_{p+1} \text{ calculée.} \\ f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}). \end{cases}$$

Exemples:

• $r=0$: on a deux points d'interpolation t_{n+1} et t_n donc $P_{n/0}^*$

est de degré 1, soit

$$P_{n/0}^* = f_n + \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n} (t - t_n),$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_{n/0}^*(t) dt = h_n \left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right).$$

Donc on obtient: $y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right).$

ou encore: $y_{n+1} - \frac{1}{2} h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + \frac{1}{2} h_n f_n.$

$r=1$: le polynôme $p_{n,1}^*$ interpole les points (t_{n+1}, f_{n+1})
 $(t_n, f_n), (t_{n-1}, f_{n-1})$ d'où

$$p_{n,1}^*(t) = f_{n+1} \frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})}{h_n(h_n+h_{n-1})} - f_n \frac{(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})}{h_n h_{n-1}} + f_{n-1} \frac{(t-t_n)(t-t_{n+1})}{h_{n-1}(h_n+h_{n-1})}.$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,1}^*(t) dt \text{ d'où:}$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[\frac{2h_n + 3h_{n-1}}{6(h_n + h_{n-1})} f_{n+1} + \frac{3h_{n-1} + h_n}{6h_{n-1}} f_n - \frac{h_n^2}{6h_{n-1}(h_n + h_{n-1})} f_{n-1} \right],$$

quand $h_n = h = \text{constant}$, cette formule se réduit à

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} \right).$$

- De manière générale, les coefficients $b_{n,i,r}^*$ sont des nombres $b_{i,r}^*$ indépendants de n lorsque le pas est constant. on a le tableau suivant:

r	$b_{-1,r}^*$	$b_{0,r}^*$	$b_{1,r}^*$	$b_{2,r}^*$	$b_{3,r}^*$	β_r^*	ρ_{r+1}
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				1	2
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$			1,41...	3,66...
2	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$		1,41...	6,66...
3	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$	1,78...	12,64...

avec $\beta_r^* = \sum_i |b_{i,r}^*|$.

Remarque: les coefficients $b_{n,i,r}^*$ vérifient toujours

$$\sum_{i=-1}^r b_{n,i,r}^* = 1.$$

3.4.2 Erreur de consistance et ordre de la méthode AM_{r+1}

Soit y une solution exacte du problème de Cauchy. Sous

l'hypothèse $y_{n-i} = y(t_{n-i})$, $0 \leq i \leq n$, on a:

$$\begin{aligned} e_n &= y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= y(t_{n+1}) - \left[y(t_n) + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r}^* f(t_{n-i}, y(t_{n-i})) + h_n b_{n,r+1,r}^* f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right] \\ &= y(t_{n+1}) - \left[y(t_n) + h_n \sum_{i=-1}^r b_{n,i,r}^* f(t_{n-i}, y(t_{n-i})) \right] + \\ &\quad h_n b_{n,r+1,r}^* \left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right]. \end{aligned}$$

$$e_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - p_{n,r}^*(t)) dt + h_n b_{n,r+1,r}^* \left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right].$$

Supposons que $f(t, y)$ soit L -lipschitzienne en y . Alors, on obtient:

$$|e_n| \leq \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - p_{n,r}^*(t)) dt \right| + h_n b_{n-1,r}^* |e_n| \text{ d'où:}$$

$$|e_n| \leq \frac{1}{1 - h_n b_{n-1,r}^* L} \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - p_{n,r}^*(t)) dt \right|.$$

quand le pas h_n est suffisamment petit, on a donc

$$|e_n| \leq \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - p_{n,r}^*(t)) dt \right| (1 + o(h_n)).$$

la formule de la moyenne donne

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - p_{n,r}^*(t)) dt = h_n (y'(\theta) - p_{n,r}^*(\theta)), \theta \in]t_n, t_{n+1}[.$$

$$\text{et comme } y'(\theta) - p_{n,r}^*(\theta) = \frac{1}{(r+2)!} y^{(r+3)}(\xi) \pi_{n,r}^*(\xi),$$

$$\text{avec } \xi \in]t_n, t_{n+1}[.$$

$$\text{où } \pi_{n,r}^*(\xi) = \prod_{i=-1}^r (\xi - t_{n-i})$$

$$\pi_{n,r}^*(\xi) = (\xi - t_{n+1}) \pi_{n,r}(\xi).$$

d'où:

on a: $t_{n,r} \leq \xi \leq t_{n+1}$

$$|\xi - t_{n+1}| = |t_{n+1} - \xi| = \left| t_0 + (n+1)h_{n+1} - (t_0 + (n-r)h_{n+1}) \right| \\ = (r+1)h_{n+1} \leq (r+1)h_{\max}$$

et comme dans la méthode d'AB_{r+1}:

$$|\pi_{n,r}(\xi)| \leq (r+1)! h_{\max}^{r+1}$$

$$\text{d'où: } |\pi_{n,r}^*(\xi)| \leq (r+1)h_{\max} \cdot (r+1)! h_{\max}^{r+1} \\ \leq (r+2)! h_{\max}^{r+2}$$

$$\text{donc: } \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) - p_{n,r}^*(t) \right| \leq \frac{1}{(r+2)!} h_n |y^{(r+3)}(\xi)| |\pi_{n,r}^*(\xi)| \\ \leq |y^{(r+3)}(\xi)| h_n h_{\max}^{r+2}$$

par conséquent l'erreur de consistance admet la majoration

$$|e_n| \leq C h_n h_{\max}^{r+2} (1 + \alpha h_1)$$

$$\text{avec: } C = \max_{\xi \in [t_0, t+T]} |y^{(r+3)}(\xi)|$$

La méthode AB_{r+1} est donc d'ordre $r+2$.

On initialisera les r premières valeurs $y_1, y_2, \dots, y_r$ à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre $r+2$.

(30)

(30)

3.4.2 Stabilité de la méthode AM_{r+1}

On suppose que les rapports $\frac{h_n}{h_{n-1}}$ restent bornés, de sorte

que les quantités $\beta_r^* = \max_n \sum_{0 \leq i \leq r} |b_{n-1,i}^*|$, $\gamma_r^* = \max_n |b_{n-1,r}^*|$

sont contrôlées. Supposons également que $f(t, y)$ soit k -lipschitzienne en y .

soit $\tilde{y}_n$ une suite perturbée telle que

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \left(b_{n-1,r}^* \tilde{f}_{n+1} + \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i}^* \tilde{f}_{n-i} \right) + \varepsilon_n \\ \tilde{f}_{n-i} = f(t_{n-i}, \tilde{y}_{n-i}), \quad r \leq n \leq N. \end{cases}$$

posons $\vartheta_n = \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{y}_i - y_i|$, $\vartheta_{n+1} = \max(|\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}|, \vartheta_n)$

$$|\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}| \leq |\tilde{y}_n - y_n| + h_n \left[|b_{n-1,r}^*| k |\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}| + \sum_{i=0}^r |b_{n,i}^*| k |\tilde{y}_{n-i} - y_{n-i}| \right] + |\varepsilon_n|. \text{ d'où:}$$

$$\vartheta_{n+1} \leq \vartheta_n + h_n \left[|b_{n-1,r}^*| k \vartheta_{n+1} + \sum_{i=0}^r |b_{n,i}^*| k \vartheta_n \right] + |\varepsilon_n|.$$

$$\vartheta_{n+1} (1 - h_n |b_{n-1,r}^*| k) \leq (\vartheta_n + |\varepsilon_n|) \left(1 + k h_n \sum_{i=0}^r |b_{n,i}^*| \right).$$

$$\text{Or } \gamma_r^* = \max_{0 \leq i \leq r} |b_{n-1,i}^*| \Rightarrow \gamma_r^* \geq |b_{n-1,r}^*|, \quad \forall i = 0, \dots, r$$

$$0 < 1 - h_n k \gamma_r^* \leq 1 - h_n k |b_{n-1,r}^*|.$$

$$\text{si } h_n < \frac{1}{L |b_{n-1,r}^*|} \text{ d'où}$$

$$\theta_{n+1} \leq \frac{1 + L h_n \sum_{i=0}^r |b_{n,i,r}^*|}{1 - h_n |b_{n-1,r}^*| L} (\theta_n + |\varepsilon_n|).$$

$$\theta_{n+1} \leq 1 + \frac{\sum_{i=0}^r |b_{n,i,r}^*| L h_n}{1 - |b_{n-1,r}^*| L h_n} (\theta_n + |\varepsilon_n|).$$

$$\theta_{n+1} \leq (1 + \Lambda h_n) (\theta_n + |\varepsilon_n|), \text{ avec}$$

$$\Lambda = \frac{\beta_r^* L}{1 - \gamma_r^* L h_{\max}}.$$

d'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\theta_N \leq e^{\Lambda(t_N - t_r)} \left(\theta_r + \sum_{i=r+1}^N |\varepsilon_i| \right).$$

donc la méthode d'AM_{r+1} est stable avec une constante de stabilité

$$S = e^{\Lambda T} = e^{\frac{\beta_r^* L T}{1 - \gamma_r^* L h_{\max}}}$$

Lorsque $h_{\max}$ est assez petit devant $\frac{1}{\gamma_r^* L}$, alors

$$S \approx e^{(\beta_r^* L T)}.$$

3.4 Méthodes de prédiction - correction

3.4.1 Principe général

On se donne une méthode dite de prédiction (ou prédicteur), fournissant (explicitement) une première valeur approchée py_{n+1} du point y_{n+1} à atteindre :

$$py_{n+1} = \text{prédiction de } y_{n+1}$$

$$pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1}) = \text{prédiction de } f_{n+1}$$

En substituant la valeur pf_{n+1} ainsi trouvée à f_{n+1} dans la formule d'Adams-Moulton, on obtient alors une nouvelle valeur corrigée y_{n+1} qui est retenue en vue des calculs ultérieurs.

De façon précise, une méthode PECE (prédiction, évaluation, correction, évaluation) à $r+1$ pas va s'écrire de la manière suivante : $y_{n-r}, f_{n-r}, \dots, y_n, f_n$ étant déjà calculés, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Prédiction: } py_{n+1} = \dots \text{ (à partir des } y_{n-i}, f_{n-i}, 0 \leq i \leq r), t_{n+1} = t_n + h_n \\ \text{Evaluation: } pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1}) \\ \text{Correction: } y_{n+1} = y_n + h_n \left(b_{n+1-r, r}^* pf_{n+1} + \sum_{i=0}^r b_{n+1-i, r}^* f_{n-i} \right) \\ \text{Evaluation: } f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{array} \right.$$

Remarques

- Nous avons utilisé ici la méthode d'Adams-Moulton comme correction, mais cela pourrait être a priori n'importe quelle autre méthode implicite.
- Le démarrage de l'algorithme PECE nécessite le calcul des points $y_1, \dots, y_r$ et les pentes $f_0, \dots, f_r$ à l'aide d'une méthode à un pas.
- on peut estimer que le coût en temps de calcul d'une méthode PECE est environ le double de celui d'une méthode d'Adams-Bashforth d'ordre égal (mais on verra que la stabilité est beaucoup meilleure). Ce temps de calcul est en général inférieur à celui des méthodes de Runge-Kutta (d'ordre ≥ 3).

Exemples

- Prédicteur: Euler (ordre 1), Correcteur: AM_1 (d'ordre 1)

$$\begin{cases} P: py_{n+1} = y_n + h_n f_n \\ E: pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1}) \\ C: y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{2} pf_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right) \\ E: f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

Cet algorithme coïncide avec la méthode de Heun, qui n'est autre que la méthode de Runge-Kutta définie par

0	0	0
1	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

• Prédicteur: AB_{n+1} (ordre $r+1$), Correcteur: AM_{n+1} .

$$P: py_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} f_{n-i}$$

$$E: pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1})$$

$$C: y_{n+1} = y_n + h_n \left(b_{n,r,r}^* pf_{n+1} + \sum_{i=0}^r b_{n,i,r}^* f_{n-i} \right)$$

$$E: f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

35

35