
TD 02

Exercice 01

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

a) Former, à partir de ça, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.

b) Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?

c) Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

Exercice 02

On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité $1/2$ pour chaque voisin. Déterminer le graphe et la matrice de transition de la chaîne ainsi obtenue.

Exercice 03

Trois chars livrent un combat. Le char A atteint sa cible avec la probabilité $2/3$, le char B avec la probabilité $1/2$ et le char C avec la probabilité $1/3$. Ils tirent tous ensemble et dès qu'un char est touché, il est détruit. On considère à chaque instant, l'ensemble des chars non détruits. Montrer qu'on obtient une chaîne de Markov dont on explicitera l'ensemble des états et la matrice de transition dans chacun des cas suivants :

a) Chaque char tire sur son adversaire le plus dangereux ;

b) A tire sur B ; B tire sur C et C tire sur A.

Exercice 04

On dispose de 2 machines identiques fonctionnant indépendamment et pouvant tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la $n^{\text{ième}}$ journée.

a) On suppose que, si une machine est tombée en panne un jour, elle est réparée la nuit suivante et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la nuit. Montrer que l'on peut définir ainsi une chaîne de Markov dont on déterminera le graphe, la matrice de transition et éventuellement les distributions stationnaires.

b) Même question en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain, le réparateur ne pouvant toujours réparer qu'une machine dans la journée.