

Chapitre II

Répartition des Transits en Régimes Stationnaires

1. Introduction

L'objectif général de ce chapitre est l'étude du fonctionnement de la simulation du système électrique en régime permanent. On a en effet besoin de connaître à un instant donné l'état du système électrique en régime stationnaire, soit pour analyser dans une situation donnée l'adéquation à la demande des capacités de production et de transport, soit pour servir de point de départ (état initial) à des simulations de régimes dynamiques.

Le problème que l'on cherche à résoudre est celui de la détermination en régime stationnaire, de la répartition des transits entre les divers éléments du réseau et plus généralement du calcul en module et en phase des tensions en tous les sommets du réseau.

Dans ce contexte, la modélisation simplifiée adoptée va permettre de simuler rapidement l'ensemble du système Production-Transport-Consommation.

- la première simplification majeure consiste à ne considérer que les grandeurs électriques à la pulsation correspondant à la fréquence fondamentale qui s'écartera peu de la fréquence nominale (50Hz ou 60 Hz).
- la seconde simplification consiste à se limiter à l'étude de circuits monophasés équivalents correspondant, soit à des régimes triphasés équilibrés, soit aux composantes directes, inverses et homopolaires des régimes déséquilibrés.

2. modélisation du réseau

2.1. Topologie nodale et topologie détaillée

- En topologie détaillée, un poste est représenté avec ses organes de coupure, tronçons de jeux de barre, départs,....
- La topologie nodale peut être définie par un graphe dont les sommets sont les nœuds électriques et les arêtes les ouvrages du réseau (lignes, câbles et transformateurs).

2.2. Modélisation des lignes et des câbles

Une ligne ou un câble, reliant deux nœuds i et k , est modélisé par un schéma en π comme suit :

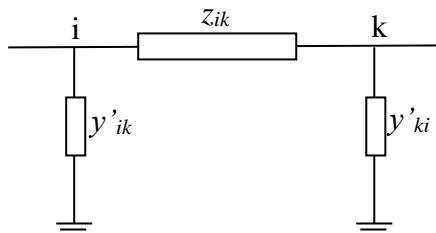


Figure 1. Modélisation des lignes et des câbles.

$$\bar{z}_{ik} = z_{ik} \exp(j\varepsilon_{ik}) = r_{ik} + jx_{ik}$$

$$\bar{y}_{ik} = \frac{1}{\bar{z}_{ik}}$$

$$\bar{y}'_{ik} = g_{ik} + jh_{ik}$$

Ce schéma en (figure 1) est symétrique, et l'on a de plus :

$$g_{ik} = g_{ki} = 0, \quad h_{ik} = h_{ki} = C_{ik}\omega/2$$

2.3. Modélisation des transformateurs

Un transformateur est classiquement représenté par un schéma comprenant un quadripôle en Γ associé à un transformateur parfait de rapport nominal $n_0 = n_1/n_2$, (n_1 : nombre de spires primaires et n_2 nombre de spires secondaires (figure 2.a).

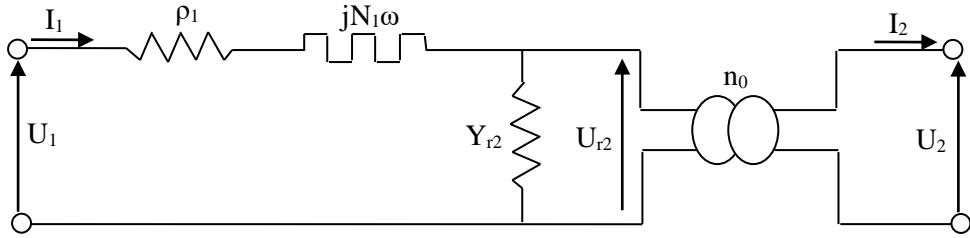


Figure 2.a. schéma en Γ d'un transformateur.

Avec :

L_1 et L_2 : coefficients d'induction propre de chaque enroulement.

M : coefficients d'induction mutuelle.

$$\rho_1 = R_1 + R_{r2}$$

$$R_{r2} = \left(\frac{M}{L_2}\right)^2 R_2 : \text{résistance secondaire ramenée au primaire.}$$

$$N_1 = L_1 - \frac{M^2}{L_2} : \text{inductance des fuites totales du transformateur ramenée au primaire.}$$

$$Y_{r2} = \frac{1}{R_{r2} + jL_{r2}\omega} : \text{admittance secondaire à vide.}$$

$$L_{r2} = \left(\frac{M}{L_2}\right)^2 L_2$$

$$U_{r2} = \left(\frac{M}{L_2}\right) U_2$$

$$\frac{M}{L_2} = \frac{n_1}{n_2} = n_0$$

Aussi en notant :

$$\bar{z}_s = \rho_1 + jN_1\omega$$

$$\bar{z}_d = \frac{1}{\bar{y}_d} \quad , \text{ avec } : \bar{Y}_{r2} = \bar{y}_d$$

Si $\bar{z}_d \gg \bar{z}_s$

Le schéma en Γ en figure 2.a devient comme suit (figure 2.b) :

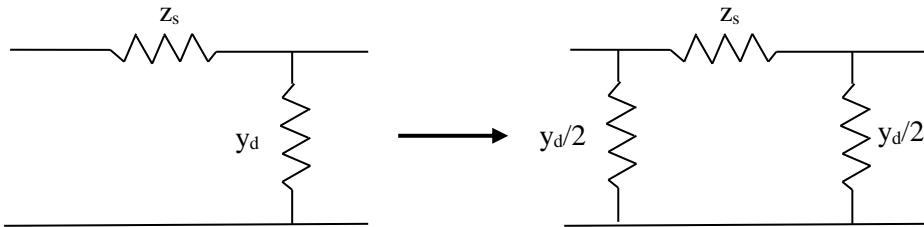


Figure 2.b. Schéma en Γ et π en du quadripôle équivalent du transformateur.

2.3.1. Modélisation des transformateurs avec régleurs en charge

Exemple : le régulateur en charge agit sur l'enroulement primaire

Si n'_1 désigne le nouveau nombre de spires primaires, le rapport de transformation devient :

$$n'_0 = tn_0, \quad \text{avec } t = n'_1/n_1$$

le transformateur peut être représenté par un schéma comprenant un quadripôle en Γ associé à deux transformateurs parfaits de rapport t et n_0 (figure 3) :

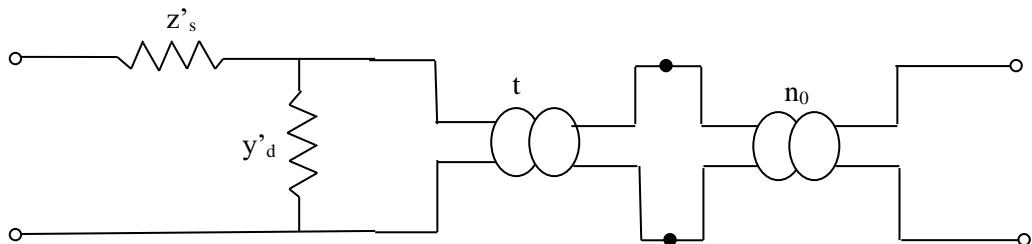


Figure 3. Schéma équivalent d'un transformateur avec régulateur en charge.

Avec :

$$\bar{z}'_s = t^2 \bar{z}_s \quad \text{et} \quad \bar{y}'_d = \bar{y}_d/t^2$$

En remplaçant le quadripôle en Γ par un schéma en π symétrique, et en sous-entendant le transformateur parfait de rapport n_0 (qui n'intervient pas dans les calculs si les impédances sont ramenées au primaire), on obtient le schéma équivalent de la figure 4.

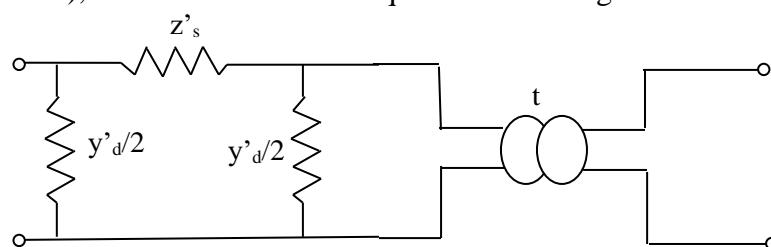


Figure 4. Schéma équivalent en π d'un transformateur avec régulateur en charge.

3. les équations du réseau

Nous examinons tout d'abord le cas où les transformateurs ne sont pas munis de régleurs en charge. Nous verrons ensuite quelles sont les modifications apportées par la présence de régleurs.

3.1 Equation matricielle

Considérons les grandeurs complexes suivantes :

\bar{I}_i : courant injecté au nœud i (i=1,....., n)

$\bar{V}_i = V_i \exp(j\theta_i)$: tension au nœud i

Le courant \bar{I}_i à pour expression en fonction de des tensions (voir le schéma équivalent en π):

$$\bar{I}_i = \bar{y}_{ii} \bar{V}_i + \sum_{k \in \alpha(i)} \bar{y}_{ik} (\bar{V}_i - \bar{V}_k), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Où $\alpha(i)$ désigne le sous ensemble des nœuds connectés au nœud i et où :

$$\bar{y}_{ii} = \sum_{k \in \alpha(i)} \bar{y}'_{ik} \quad \text{et} \quad \bar{y}_{ik} = \frac{1}{\bar{z}_{ik}} = y_{ik} \exp(-j\varepsilon_{ik}) \quad (2)$$

Matriciellement les équations s'écrivent :

$$[\bar{I}] = [\bar{Y}] [\bar{V}] \quad (3)$$

Avec :

$$\bar{Y}_{ik} = G_{ik} + jH_{ik}$$

$$\bar{Y}_{ii} = G_{ii} + jH_{ii}$$

$$G_{ik} = -r_{ik} / z_{ik}^2$$

$$H_{ik} = -x_{ik} / z_{ik}^2$$

$$G_{ii} = \sum_{k \in \alpha(i)} (g_{ik} - G_{ik})$$

$$H_{ii} = \sum_{k \in \alpha(i)} (h_{ik} - H_{ik})$$

3.2 Relations exprimant les puissances actives et réactives en fonction des modules et des phases des tensions

Soit P_i la puissance réactive injectée au nœud i, et soit Q_i la puissance réactive injectée au nœud i. on a :

$$P_i - jQ_i = \bar{V}_i^* \bar{I}_i \quad (4)$$

D'où, en utilisant les expressions de \bar{I}_i et \bar{V}_i (définies plus haut), nous avons

$$P_i = \operatorname{Re} \left[\bar{V}_i^* (\bar{y}_{ii} \bar{V}_i + \sum_{k \in \alpha(i)} \bar{y}_{ik} (\bar{V}_i - \bar{V}_k)) \right] \quad (5)$$

$$Q_i = -\operatorname{Im} \left[\bar{V}_i^* (\bar{y}_{ii} \bar{V}_i + \sum_{k \in \alpha(i)} \bar{y}_{ik} (\bar{V}_i - \bar{V}_k)) \right] \quad (6)$$

On déduit :

$$P_i = V_i^2 \sum_{k \in \alpha(i)} (y_{ik} \cos \varepsilon_{ik} + g_{ik}) - V_i \sum_{k \in \alpha(i)} V_k y_{ik} \cos(\varepsilon_{ik} + \theta_i - \theta_k) \quad (7)$$

$$Q_i = V_i^2 \sum_{k \in \alpha(i)} (y_{ik} \sin \varepsilon_{ik} - h_{ik}) - V_i \sum_{k \in \alpha(i)} V_k y_{ik} \sin(\varepsilon_{ik} + \theta_i - \theta_k) \quad (8)$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme :

$$P_i = \sum_{k \in \alpha(i)} P_{ik} \quad , \quad Q_i = \sum_{k \in \alpha(i)} Q_{ik} \quad (9)$$

Où P_{ik} et Q_{ik} désignent respectivement les puissances active et réactive transitées par une ligne reliant les nœuds i et k. On a :

$$P_{ik} = V_i^2 (y_{ik} \cos \varepsilon_{ik} + g_{ik}) - V_i V_k y_{ik} \cos(\varepsilon_{ik} + \theta_i - \theta_k) \quad (10)$$

$$Q_{ik} = V_i^2 (y_{ik} \sin \varepsilon_{ik} - h_{ik}) - V_i V_k y_{ik} \sin(\varepsilon_{ik} + \theta_i - \theta_k) \quad (11)$$

$$P_{ki} = V_k^2 (y_{ik} \cos \varepsilon_{ik} + g_{ik}) - V_i V_k y_{ik} \cos(\varepsilon_{ik} + \theta_i - \theta_k) \quad (12)$$

$$Q_{ki} = V_k^2 (y_{ik} \sin \varepsilon_{ik} - h_{ik}) - V_i V_k y_{ik} \sin(\varepsilon_{ik} + \theta_i - \theta_k) \quad (13)$$

3.3. Prise en compte des régleurs en charge

Examinons le cas où la branche reliant les nœuds 1 et 2 est un transformateur muni de régleur en charge. Nous supposerons que l'indice 1 correspond au primaire et l'indice 2 au secondaire, et nous désignerons par t la position du régleur :

- Si le régleur est sur l'enroulement primaire, il suffit de remplacer V_1 par V_1/t dans les expressions de P_{12} , Q_{12} , P_{21} , Q_{21} .
- Si le régleur est sur l'enroulement secondaire, il suffit de remplacer V_2 par V_2/t dans les mêmes expressions

4. Calculs de la répartition

4.1. Définition

Soit $N = (1, \dots, n)$ l'ensemble des indices des nœuds du réseau, et soit U un sous ensemble de N . On suppose fixé le module de la tension pour tout nœud i appartenant à U :

$$V_i = V^o, \quad \forall i \in U$$

En l'absence de régleurs en charge, le problème peut se formuler ainsi :

Connaissant les injections de puissance active $P_i \quad \forall i \in N$ et les injections de puissance réactive

$Q_i, \forall i \notin U$, déterminer les valeurs $\theta_i, \forall i \in N$ et de $V_i, \forall i \notin U$.

Compte tenu des équations établies précédemment, la solution de ce problème s'obtient en résolvant le système non linéaire :

$$P_i = V_i^2 \sum_{k \in \alpha(i)} (y_{ik} \cos \varepsilon_{ik} + g_{ik}) - V_i \sum_{k \in \alpha(i)} V_k y_{ik} \cos(\varepsilon_{ik} + \theta_i - \theta_k), \quad \forall i \in N \quad (14)$$

$$Q_i = V_i^2 \sum_{k \in \alpha(i)} (y_{ik} \sin \varepsilon_{ik} - h_{ik}) - V_i \sum_{k \in \alpha(i)} V_k y_{ik} \sin(\varepsilon_{ik} + \theta_i - \theta_k), \quad \forall i \notin U \quad (15)$$

1- Sa résolution permet de calculer $Q_i \forall i \in U$;

2- On en déduit aussi les puissances transitées P_{ik}, Q_{ik}, P_{ki} et Q_{ki} dans les lignes du réseau.

Les nœuds $i \in U$ sont appelés nœuds producteurs ou nœuds PV. En ces nœuds on connaît P_i et V_i et on cherche à déterminer θ_i et Q_i .

Les nœuds $i \notin U$ sont appelés nœuds consommateurs ou nœuds PQ. En ces nœuds on connaît P_i et Q_i et on cherche à déterminer θ_i et V_i .

Si le nombre de nœuds à tension tenu ($V_i = V^o, \forall i \in U$) est p , alors ce système comporte $2n-p$ inconnues.

Remarque :

Dans ce qui va suivre nous ferons les deux hypothèses suivantes :

- U est un ensemble vide ;
- le réseau ne comporte pas de transformateur avec régleurs en charge.

Le système à résoudre peut alors s'écrire sous la forme :

$$P_i = \varphi_i(\theta, V) \quad \forall i \in N \quad (16)$$

$$Q_i = \psi_i(\theta, V) \quad \forall i \in N \quad (17)$$

Où θ est un vecteur de composantes θ_i ($\forall i \in N$) et V est un vecteur de composantes V_i ($\forall i \in N$).

4.2. Résolution du système non linéaire

La méthode initialement utilisée était la méthode de Gauss-Seidel, qui a l'inconvénient de converger en un nombre d'itérations proportionnel à la taille du réseau. Actuellement, la méthode universellement adoptée est la méthode de Newton ou l'une des ses variantes (**voir TP**).

5. Approximation du courant continu

Pour planifier un réseau de transport, on considère généralement un très grand nombre de situation (valeurs de consommation, aléas affectant la disponibilité des ouvrages de production et de transport, ...). Pour cela, on utilise des méthodes de Monté-Carlo avec plusieurs milliers de tirages de situations, et sur chacune d'elles on va effectuer un calcul de

répartition afin de vérifier l'adéquation de la production à la consommation (calcul de défaillance) et les contraintes de transit sur report de charge. Cela nécessite un grand nombre de résolutions, et, si l'on conserve les équations complètes de répartition, le temps de calcul est beaucoup trop coûteux.

Par ailleurs, il faut remarquer qu'en pratique, la précision apportée par l'utilisation des équations complètes ne se justifie pas pour les études de planification du réseau compte tenu des incertitudes sur la connaissance des données.

Dans ce contexte un modèle simplifié apparaît suffisamment pertinent :

- Les transits actifs sont, sur les réseaux de lignes aériennes, surtout liés aux phases des tensions et peu aux modules, alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \gg \frac{\partial \varphi}{\partial V} ; \quad (18)$$

En l'absence de câbles souterrains, on suppose donc que le module de la tension est constant en chaque nœud : $V_i = V_k = V$.

- Seules les phases varient alors, mais avec de faibles différences entre les sommets voisins. On considère donc :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_i - \theta_k) &\approx \theta_i - \theta_k \\ \cos(\theta_i - \theta_k) &\approx 1 - \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_k)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Sous ces conditions les équations ((14) et (15)) pour P_i et Q_i , s'écrivent :

$$P_i = V^2 \sum_{k \in \alpha(i)} g_{ik} + V^2 \sum_{k \in \alpha(i)} \left[x_{ik}(\theta_i - \theta_k) + \frac{1}{2} r_{ik}(\theta_i - \theta_k)^2 \right] / z_{ik} \quad (20)$$

$$Q_i = -V^2 \sum_{k \in \alpha(i)} h_{ik} - V^2 \sum_{k \in \alpha(i)} \left[r_{ik}(\theta_i - \theta_k) - \frac{1}{2} x_{ik}(\theta_i - \theta_k)^2 \right] / z_{ik} \quad (21)$$

Aussi, le rapport r_{ik}/x_{ik} est négligeable pour les transformateurs et de l'ordre de 1/4 en moyenne pour les lignes de transport. Par ailleurs $\frac{1}{2}(\theta_i - \theta_k)^2$ est très petit devant $\cos(\theta_i - \theta_k)$, le déphasage entre deux sommets voisins étant généralement assez inférieur à 10 degrés.

Dans l'expression de P_i , le terme $\frac{r_{ik}}{2}(\theta_i - \theta_k)^2$ est par suite négligeable devant le terme $x_{ik}(\theta_i - \theta_k)$.

De plus les termes g_{ik} (ils correspondent aux pertes actives à vide dans le transformateur) sont toujours très petits. Enfin on peut remplacer x_{ik}/z_{ik}^2 par sa valeur approchée $1/x_{ik}$. Avec ces approximations, P_i peut être simplifié et devient :

$$P_i = V^2 \sum_{k \in \alpha(i)} \frac{(\theta_i - \theta_k)}{x_{ik}} \quad (22)$$

De la même façon, la puissance P_{ik} transittée dans la branche (i, k) peut s'écrire :

$$P_{ik} = V^2 \frac{(\theta_i - \theta_k)}{x_{ik}} \quad (23)$$

Qui est l'expression de la loi d'Ohm.

Remarque : il est à noter que les hypothèses faites pour obtenir ces deux dernières équations (22) et (23) correspondent à un réseau en régime de fonctionnement normal, en excluant les phénomènes limites comme l'écoulement de tension ou les très forts transits.

Les équations (22) et (23) peuvent être présentées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} P_i = V^2 \sum_{k \in \alpha(i)} \frac{(\theta_i - \theta_k)}{x_{ik}} \\ P_{ik} = V^2 \frac{(\theta_i - \theta_k)}{x_{ik}} \end{cases} \quad (24)$$

C'est l'approximation dite des courants continus.

6. Du calcul de la répartition de puissance l'optimisation sous contraintes

Pour toute une classe d'applications, le calcul de répartition à injection de puissance fixée ne répond que partiellement à un phénomène plus général comportant une exigence d'optimisation : par exemple assurer une alimentation correcte de la clientèle et une bonne répartition de la puissance en minimisant les coûts de production par des centrales qui ont chacune un coût marginal particulier, fonction de la puissance fournie ou en optimisant le plan de tension de façon à respecter les contraintes sur les matériels, à éviter les risques d'instabilité de tension, à minimiser les pertes Joule ou les moyens de compensation réactive.

Dans les études d'exploitation et de planification des réseaux électriques, on est amené à résoudre des problèmes d'optimisation consistant à minimiser une fonction des variables P , Q , θ et V , tout en respectant les équations du réseau (P_i et Q_i).

Si l'on ne tient pas compte des contraintes de sécurité, un tel problème s'écrit sous la forme d'un programme mathématique non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } F(P_g, Q_g, \theta, V) \text{ sous les conditions :} \\ P_i = P_{gi} - D_i = \varphi_i(\theta, V), \quad i = 1, \dots, n \\ Q_i = Q_{gi} - E_i = \psi_i(\theta, V), \quad i = 1, \dots, n \\ r_i(P_{gi}, Q_{gi}, V_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ h_j(\theta, V_i) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Dans lequel :

- F : la fonction objectif ;
- P_{gi} : représente la puissance active fournie par les groupes de production situés au nœud i ;
- Q_{gi} : représente la puissance réactive fournie ou absorbée par les groupes de production et les moyens de compensations (condensateurs, selfs...) situés au nœud i ;
- D_i et E_i : représentent respectivement les consommations active et réactive au nœud i ;
- $r_i(P_{gi}, Q_{gi}, V_i) \leq 0$: représente des contraintes locales par exemple, des bornes de tensions ou des contraintes qui limitent le fonctionnement des groupes de production situés au nœud i (borne de puissance active, angle interne, limite de courant stator, ...) ;
- $h_j(\theta, V_i) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$: représente les limites de transit dans les m ouvrages de transport du réseau (lignes, transformateurs).