

Chapitre II : Statique des fluides

1. Introduction :

La statique des fluides ou l'hydrostatique est la science qui étudie les conditions d'équilibre des fluides au repos.

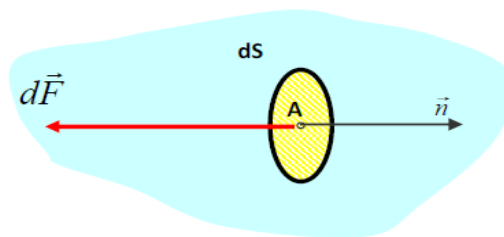
Autrement dit, en absence de mouvement entre les particules fluides.

Les seules forces existantes sont celles des forces de volume dues au poids et des forces de surface dues à la pression et s'exercent perpendiculairement à la surface.

2. Notion de pression en un point d'un fluide :

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface.

Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :



$$P_A = \frac{\|d\vec{F}\|}{dS}$$

Où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

$\vec{n}$: Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$d\vec{F}$: Force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

P_A : pression en A (en Pascal),

Sur la surface de centre A, d'aire dS , orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$, la force de pression élémentaire $d\vec{F}$ s'exprime par :

$$d\vec{F} = -P_A \cdot dS \cdot \vec{n}$$

Pression absolue et pression relative :

La pression absolue est définie par rapport à la pression dans le vide qui correspond à la pression nulle. La pression absolue minimale possible est donc zéro. Il est courant de mesurer la pression de liquide relativement à la pression atmosphérique (pression de l'air).

On parle alors de pression relative. De cette façon, la pression à la surface libre d'un liquide est égale zéro. Donc :

Pression absolue = Pression relative + pression atmosphérique

$$P_{abs} = P_{rel} + P_{atm}$$

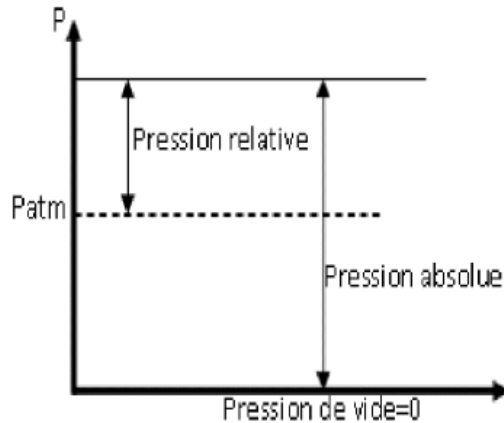


Figure II.1. Pression absolue et relative

3. Principe fondamentale de l'hydrostatique :

Le principe fondamentale de l'hydrostatique est présenté par :

$$F_B = P + F_A \Rightarrow P_B \times S = m \times g + P_A \times S$$

$$\Rightarrow (P_B \times S) - (P_A \times S) = \rho \times V \times g$$

$$\Rightarrow P_B - P_A = \rho \times \frac{V}{S} \times g = \rho \times h \times g$$

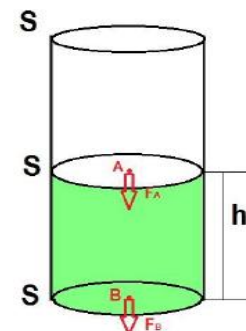


Figure II.2. Principe de l'hydrostatique

$$P_B - P_A = \rho \times g \times h$$

Donc, la différence de pression entre deux points d'un fluide en équilibre est donnée par la relation : $\Delta P = P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot h$

Avec : ρ est la masse volumique du fluide [kg/m³]

h est la dénivellation entre les deux points A et B [m]

g est l'accélération de la pesanteur (généralement 9,81 [N/kg])

ΔP est la différence de pression [Pa]

4. Théorème de Pascal :

Enoncée de la loi de pascal : la pression d'un fluide en un point est la même dans toutes les directions.

Donc on doit vérifier ça :

Supposons que le liquide exerce une pression p_x sur la surface $(dz \, dy)$, une pression p_z sur la surface $(dx \, dy)$ et une certaine pression p_s sur la surface $(ds \, dy)$ de l'élément. Donc l'intensité des forces de pression (s'appliquant de façon normale aux surfaces) est : $F_x = p_x (dz \, dy)$; $F_z = p_z (dx \, dy)$; $F_s = p_s (ds \, dy)$.

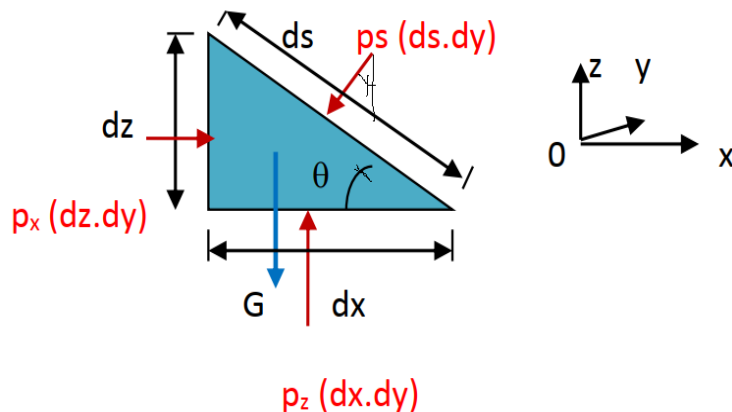


Figure II.3. Pression en un point d'un liquide au repos.

Etablissons la relation entre P_x , P_y , et P_s :

Selon la direction x :

$$\sum F_{Ox} = 0 \Rightarrow F_x - F_s \cdot \sin \theta = P_x \cdot dy \cdot dz - P_s \cdot ds \cdot dy \cdot \sin \theta$$

On a : $ds \cdot \sin \theta = dz \Rightarrow P_x = P_s$

Selon la direction z :

$$\sum F_{Oz} = 0 \Rightarrow F_z - F_s \cdot \cos \theta = P_z \cdot dx \cdot dy - P_s \cdot ds \cdot dy \cdot \cos \theta$$

On a : $ds \cdot \cos \theta = dx \Rightarrow P_z = P_s$

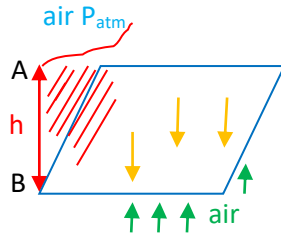
Donc : $P_x = P_s = P_z$

On peut vérifier que la pression exercée au sein d'un liquide en équilibre,

- est constante en tous points d'un même plan horizontal.
- est indépendante de la direction considérée.
- croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de sa surface libre.

5. Poussée d'un fluide sur une paroi verticale :✓ **Poussée d'un fluide sur une paroi Horizontale :**

➤ Pression par le fluide constante :

**P.F.S :**

$$P = \frac{F}{S} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot h$$

$$P_B = \rho \cdot g \cdot h + P_A$$

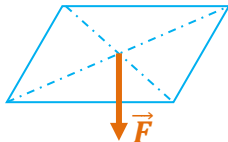
$$P_B = \rho \cdot g \cdot h + P_{\text{atm}}$$

$$F = P \times S$$

$$F = (\rho \cdot g \cdot h + P_{\text{atm}}) \times S$$

Résultante des forces (air en dessous)

$$F = \rho \cdot g \cdot h \times S$$

➤ **Poussée d'un fluide sur une paroi Verticale :**

Pression par le fluide variable :

P.F.S :

$$F = P \times S \text{ [N]}$$

$$P_C - P_A = \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2}$$

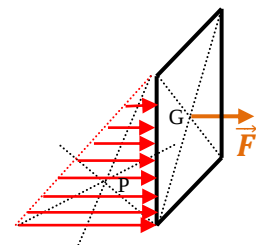
$$P_C = \rho \cdot g \cdot h + P_A$$

$$P_C = \rho \cdot g \cdot h + P_{\text{atm}}$$

$$F = (\rho \cdot g \cdot h + P_{\text{atm}}) \times S$$

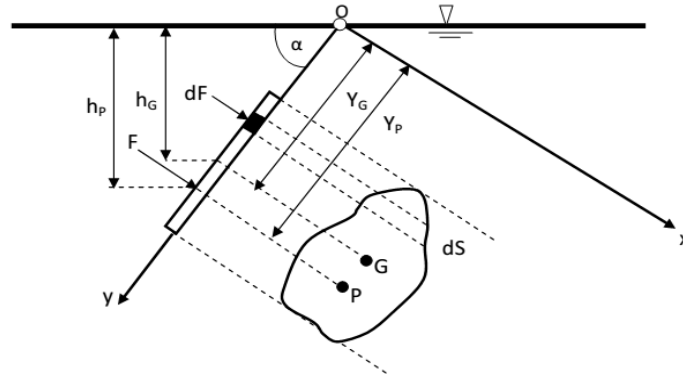
Résultante des forces :

$$F = \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2} \times S$$



✓ Poussée sur une paroi Horizontale :

Cette force est définie comme étant la force de pression exercée par un fluide au repos sur une surface de contact, cette force est toujours normale à la surface. Le calcul des forces hydrostatiques sur une surface quelconque plongée dans l'eau, consiste à déterminer l'intensité de la force et son point d'application.



Soit un élément de surface de la plaque dS , la pression qui s'exerce sur cet élément est :

$$P = \rho \cdot g \cdot h$$

La force de poussée exercée sur l'élément sera :

$$dF = P \cdot dS = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS$$

Donc la force de poussée totale sur la plaque sera :

$$F = \int dF = \int \rho \cdot g \cdot h \cdot dS$$

Avec : $h = y \cdot \sin \alpha$, Donc $F = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int y \cdot dS$

Et S est la surface.

Le terme $\int y \cdot dS$ représente le moment statique de la surface par rapport à l'axe Ox :

$$\int y \cdot dS = y_G \cdot S$$

Avec y_G cordonnée du centre de gravité.

Donc, l'expression de G devient :

$$F = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot y_G \cdot S$$

Tant que la profondeur du centre de gravité de la surface est donnée par : $h_G = y_G \sin \alpha$

Donc l'expression finale de F devient :

$$F = \rho \cdot g \cdot h_G \cdot S$$

Le point d'application de la force résultante F (la poussée) est appelé: le centre de poussée. La position de ce point est définie par la position du barycentre des surfaces élémentaires (dS) pondérées par la pression sur chaque surface, ce qui revient à calculer le moment équivalent des forces de pression, c-à-d:

$$y_p \cdot F = \int y \cdot dF = \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int y^2 \cdot dS$$

Donc ;

$$y_p = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \alpha \int y^2 \cdot dS}{\rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot y_G \cdot S} = \frac{\int y^2 \cdot dS}{y_G \cdot S}$$

Le terme $I_x = \int y^2 \cdot dS$ représente le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe Ox.

Selon le théorème de Huygens : $I_x = I_{xG} + y_G^2 S$

I_{xG} est le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité, dans ce cas :

$$y_p = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G \cdot S}$$

Cette équation démontré que le point d'application de la force de poussée F se trouve toujours plus bas que le centre de gravité d'une distance égale à :

$$\frac{I_{Gx}}{y_G \cdot S}$$

La profondeur du centre de poussée par rapport à la surface libre est présenté par :

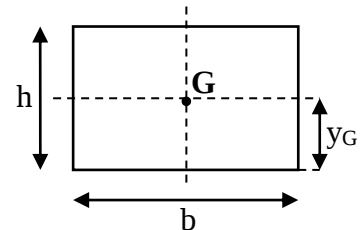
$$h_P = y_p \cdot \sin \alpha$$

Pour une plaque plane avec une forme de rectangle :

La surface est donnée par : $S = b \cdot h$

Le centre de gravité est donnée par :

$$y_G = \frac{h}{2}$$



Et le moment d'inertie :

$$I_{xG} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

6. Théorème d'Archimède :

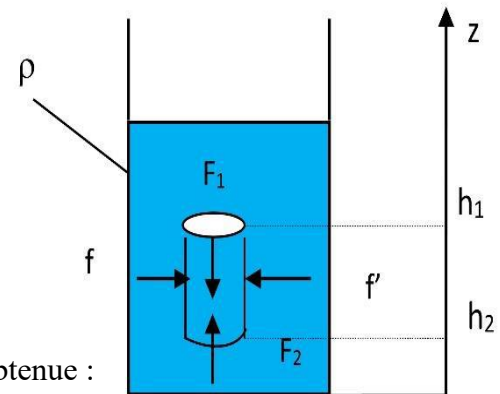
Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps). Il résulte de ce théorème que si le poids d'un corps placé dans une masse fluide est inférieur au poids de son volume du fluide, le corps flotte.

Si l'on examine le comportement d'un cylindre de longueur L et de section S, immergé dans un fluide de masse volumique ρ dans le champ de pesanteur terrestre, ce cylindre est soumis à plusieurs forces :

- ✓ des forces radiales de pression qui s'exercent sur la paroi verticale et qui sont diamétralement opposées et s'annulent deux à deux (f et f').
- ✓ sur la surface inférieure s'exerce une force verticale normale à S, dirigée vers le haut et d'intensité $F_B = P_B.S$
- ✓ sur la surface supérieure s'exerce une force verticale normale à S dirigée vers le bas et d'intensité $F_H = P_H.S$

La poussée d'Archimède est la résultante de toutes ces forces.

Si ces forces sont projetées sur l'axe Oz, la résultante suivante est obtenue :



$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_H + \vec{F}_B = (P_B - P_H).S = \rho.g.S.(h_2 - h_1) = \rho.g.V$$