

Chapitre III : Dynamique des Fluides Incompressibles Parfaits

1. Introduction

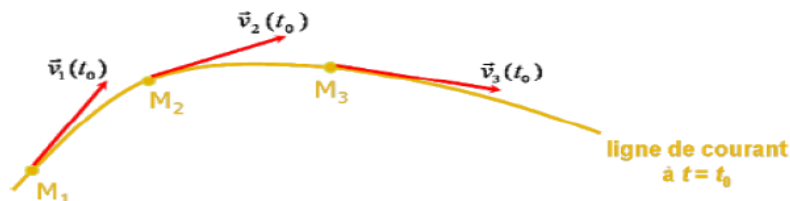
Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides **en mouvement**. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

Pour **simplifier** l'étude dans ce chapitre, on **néglige les frottements**. On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles, en particulier:

- ✓ L'équation de continuité (conservation de la masse).
- ✓ Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie).

1.1 Ligne de courant :

Une ligne de courant est une courbe dans le repère R, elle correspond aux trajectoires des particules qui la constituent.



2. Régimes d'écoulement

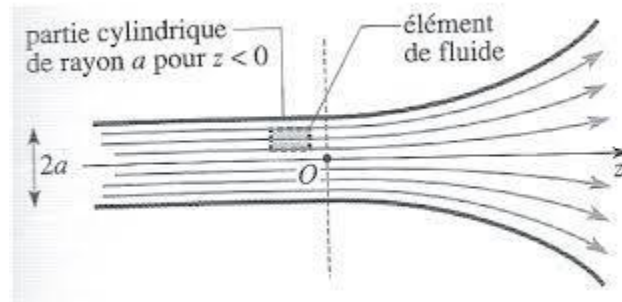
On distingue 05 régimes d'écoulements :

2.1 Permanent ($V_{\text{fluide}} = \text{cst}$ avec le temps dans le même point)

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si la vitesse des particules fluides est constante dans le temps dans le même point. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vitesses est uniforme dans l'espace.

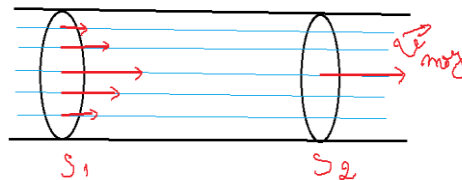
2.2 Stationnaire

Ligne de courant ne varier pas au cours du temps (c.a.d les particules du fluides suivant le même trajectoire)



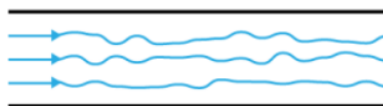
2.3 Laminaire :

Pour section S_1 plus on rapproche de la paroi la vitesse se démunie (à cause frottement des particules avec la paroi), donc on représente la vitesse du fluide par une vitesse moyenne. Donc un écoulement laminaire : écoulement rectiligne, le fluide s'écoule en filets parallèles à l'axe de la conduite, sans mélange. Donc les particules du fluide de la même section on la même vitesse.



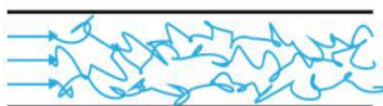
2.4 Intermédiaire :

L'écoulement est plus ou moins rectiligne, avec un peu de mélange (petits tourbillons).



2.5 Turbulent :

L'écoulement se fait avec de grands tourbillons, avec un mélange important.



3. Notion de Débit :

3.1. Débit massique :

Le débit massique Q_m est la quantité représentant la masse de fluide traversant la section S pendant un intervalle de temps :

$$Q_m = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot S \cdot v \text{ [kg/s]}$$

3.2. Débit volumique

Le débit volumique Q_v est la quantité représentant le volume de fluide traversant la section S pendant un intervalle de temps :

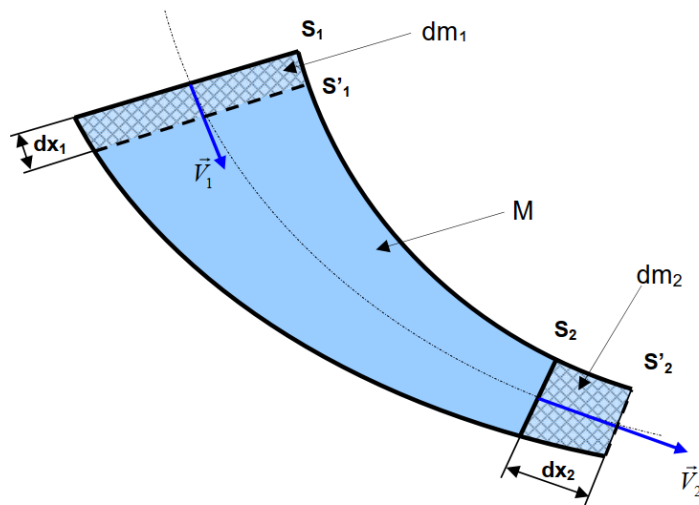
$$Q_v = \frac{dV}{dt} = \frac{S \cdot dl}{dt} = S \cdot v \text{ [m}^3\text{/s]}$$

De plus, le débit volumique peut être exprimé en fonction du débit massique comme suit :

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{\rho \cdot S \cdot v}{\rho} = S \cdot v \text{ [m}^3\text{/s]}$$

4. Équation de Continuité (Conservation du débit) :

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



On désigne par :

- ✓ S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t ,
- ✓ S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$,

✓ $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, les vectrices vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections

S_1 et S_2 de la veine.

✓ dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,

✓ dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ,

✓ dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ,

✓ M : masse comprise entre S_1 et S_2 ,

✓ dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 ,

✓ dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 ,

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1 + M)$

A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(M + dm_2)$.

Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$, en simplifiant par M on aura $dm_1 = dm_2$

Donc $\rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2$ ou encore $\rho_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2$,

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 \quad (1)$$

5. Théorème de Bernoulli (Cas d'un écoulement sans échange de travail) :

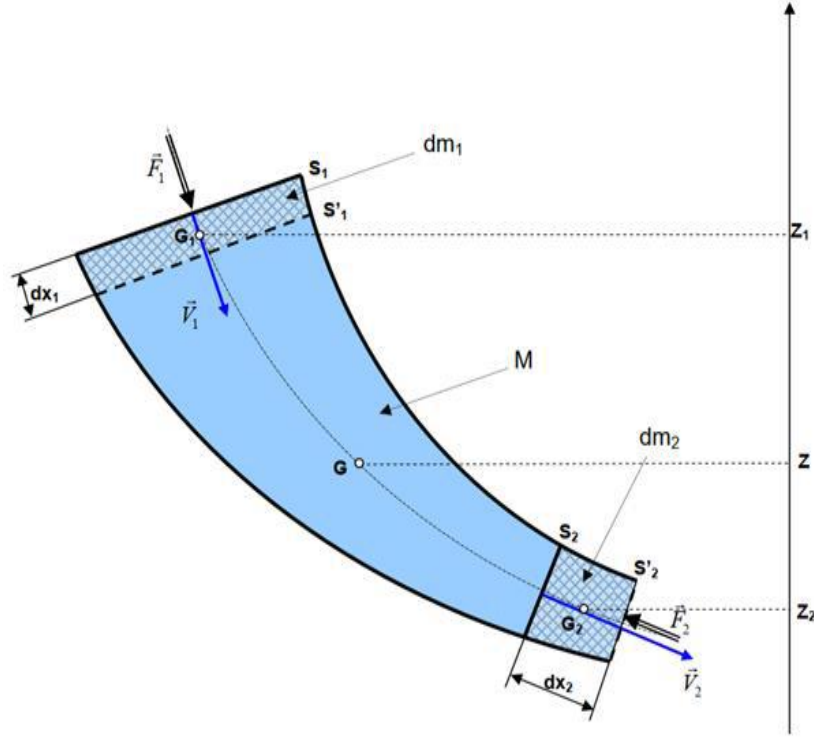
Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:

- ✓ Le fluide est parfait et incompressible.
- ✓ L'écoulement est permanent.
- ✓ L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe $\vec{Z}$ vertical dirigé vers le haut.

On note Z_1 , Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1 , dm_2 et M .

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .



A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + M \cdot g \cdot Z) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$

A l'instant $t' = (t + dt)$ le fluide de masse $(M + dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (M \cdot g \cdot Z + dm_2 \cdot g \cdot Z_2) + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dm \cdot V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures ».

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{forces \text{ de pression}} = F dx_1 - F dx_2$$

$$\Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 \text{ en simplifiant on obtient :}$$

$$dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} dm_2$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0 \quad (2)$$

L'unité de chaque terme de la relation (2) est le joule par kilogramme (J/kg).

D'après la relation (2) on peut alors écrire :

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g(z_2) = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g(z_1)$$

5. Théorème de Bernoulli (Cas d'un écoulement avec échange de travail) :

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2 . Cette machine est caractérisée par une puissance nette $\mathbf{P}_{net}$ échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre $\mathbf{P}_a$ et un certain rendement η . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

✓ Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a}$$

Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

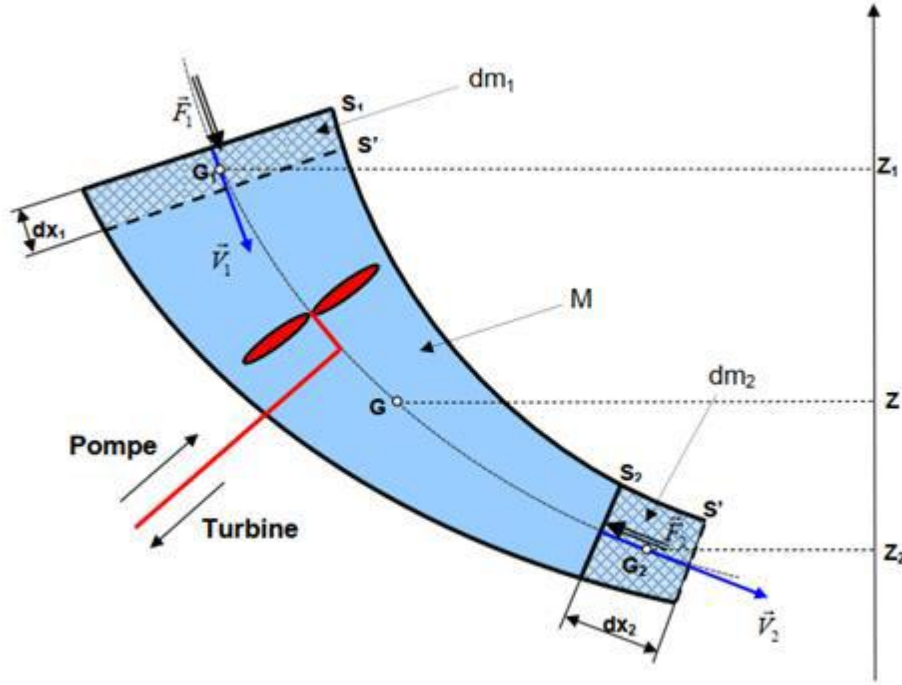
$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}}$$

Entre les instant t et $t' = (t+dt)$, le fluide a échangé un travail net $W_{net} = P_{net} \cdot dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .

A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 Son énergie mécanique est

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot g \cdot Z_1 + M \cdot g \cdot Z) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm \cdot V^2}{2}$$



A l'instant $t' = (t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est: $E'_{mec} = E'_{pot} - E'_{cin} = (M \cdot g \cdot Z + dm_2 \cdot g \cdot Z_2) + \int_{S'_1}^{S'_2} \frac{dm \cdot V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures », en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique

$$E'_{mec} - E_{mec} = F dx_1 - F dx_2 + P_{net} \cdot dt$$

$\Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + P_{net} \cdot dt = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + P_{net} \cdot dt$ en simplifiant on aura :

$$dm_2 \cdot g \cdot Z_2 + \frac{1}{2} dm_2 \cdot V_2^2 - dm_1 \cdot g \cdot Z_1 - \frac{1}{2} dm_1 \cdot V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} dm_2 + P_{net} \cdot dt$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{Q_m} \quad (3)$$

Où : $Q_m = \frac{dm}{dt}$