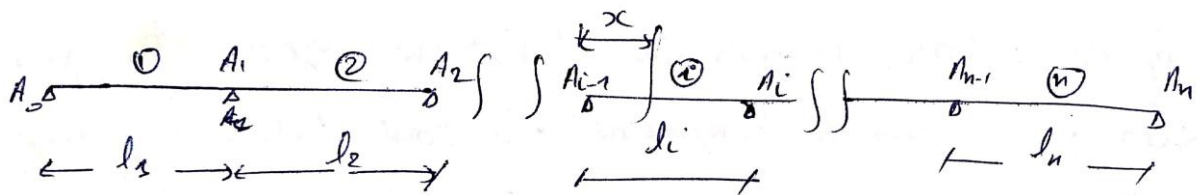


Les lignes d'influence des poutres continues

1. Définition

On considère une poutre droite continue à plan moyen, chargée dans son plan par des efforts qui lui sont normaux. Elle comporte « n » travées et repose donc sur « n+1 » appui A_0, A_1, \dots, A_n .

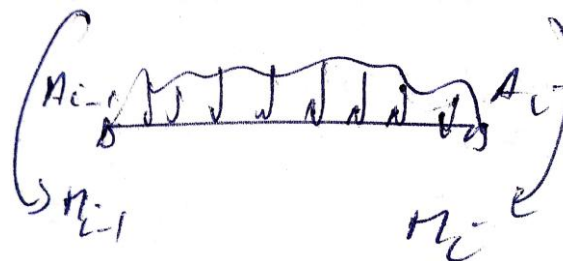
Une section de la $i^{\text{ème}}$ travée $A_{i-1}A_i$ de portée « l_i » sera définie par son abscisse comptée à partir de l'appui gauche A_{i-1} .



Cette poutre est un système hyperstatique degré (n-1) et il est d'usage de considérer les (n-1) moments sur appuis intermédiaire (notés M_1, M_2, \dots, M_{n-1}) comme étant les inconnus hyperstatiques du problème. Car si on connaît ces moments sur appuis, le moment fléchissant $M_i(x)$ et l'effort tranchant $T_i(x)$ dans une section (x) quelconque qui appartient à la $i^{\text{ème}}$ travée $A_{i-1}A_i$ ont pour expressions :

$$M_i(x) = M_{iso}(x) + M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i \cdot \frac{x}{l_i}$$

$$T_i(x) = T_{iso}(x) + \frac{1}{l_i} \cdot (M_i - M_{i-1})$$



$M_{iso}(x)$ Le moment fléchissant isostatique dans la travée « i » supposée simplement appuyée sous l'effet des charges extérieures.

$T_{iso}(x)$ L'effort tranchant isostatique dans la travée « i » supposée simplement appuyée sous l'effet des charges extérieures.

2. Rappels sur la méthode des trois moments

La mise en équation du problème conduit à un système linéaire de « n-1 » équation à « n-1 » inconnus que l'on met sous la forme

$$b_1 \cdot M_0 + (c_1 + a_2) \cdot M_1 + b_2 \cdot M_2 = w'_2 - w''_1$$

$$b_i \cdot M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) \cdot M_i + b_{i+1} \cdot M_{i+1} = w'_{i+1} - w''_i$$

$$b_{n-1} \cdot M_{n-2} + (c_{n-1} + a_n) \cdot M_{n-1} + b_n \cdot M_n = w'_n - w''_{n-1}$$

a_i, b_i, c_i Fonction des caractéristiques géométriques appelées fonction de souplesse, ils sont calculés par les formules :

$$a_i = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 \cdot \frac{dx}{E \cdot I_i(x)}$$

$$b_i = \int_0^{l_i} \frac{x}{l_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \cdot \frac{dx}{E \cdot I_i(x)}$$

$$c_i = \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 \cdot \frac{dx}{E \cdot I_i(x)}$$

Dans le cas particulier d'une poutre d'inertie constante, nous avons :

$$a_i = c_i = \frac{l_i}{3EI_i} \quad b_i = \frac{l_i}{6EI_i}$$

w'_i et w''_i Sont les angles de rotation à l'origine et à l'extrémité de la travée « i » supposée simplement appuyée sous les charges extérieures.

$$w'_i = \int_0^{l_i} M_{iso}(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \cdot \frac{dx}{E \cdot I_i(x)}$$

$$w''_i = \int_0^{l_i} M_{iso}(x) \cdot \left(\frac{x}{l_i}\right) \cdot \frac{dx}{E \cdot I_i(x)}$$

3. Méthode des foyers

3.1 Méthode générale

La méthode consiste à charger successivement chaque travée, puis on superpose les effets de chargement de chaque travée. Cette méthode est donc très pratique pour construire les lignes d'influence. On suppose que la i^{eme} travée soit seule chargée, l'application de la formule des trois moments donne

$$(A) \begin{cases} M_0 = 0 \\ (c_1 + a_2).M_1 + b_2 = 0 \\ b_{i-2}.M_{i-3} + (c_{i-2} + a_{i-1}).M_{i-2} + b_{i-1}.M_{i-1} = 0 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} b_{i-1}.M_{i-2} + (c_{i-1} + a_i).M_{i-1} + b_i.M_i = w'_i \\ b_i.M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}).M_i + b_{i+1}.M_{i+1} = -w''_i \end{cases}$$

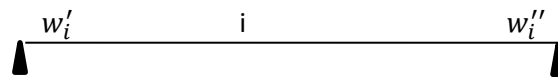
$$(C) \begin{cases} b_{i+1}.M_i + (c_{i+1} + a_{i+2}).M_{i+1} + b_{i+2}.M_{i+2} = 0 \\ b_{n-1}.M_{n-2} + (c_{n-1} + a_n).M_{n-1} = 0 \\ M_n = 0 \end{cases}$$

(A) Les moments à gauche de la travée « i » chargée

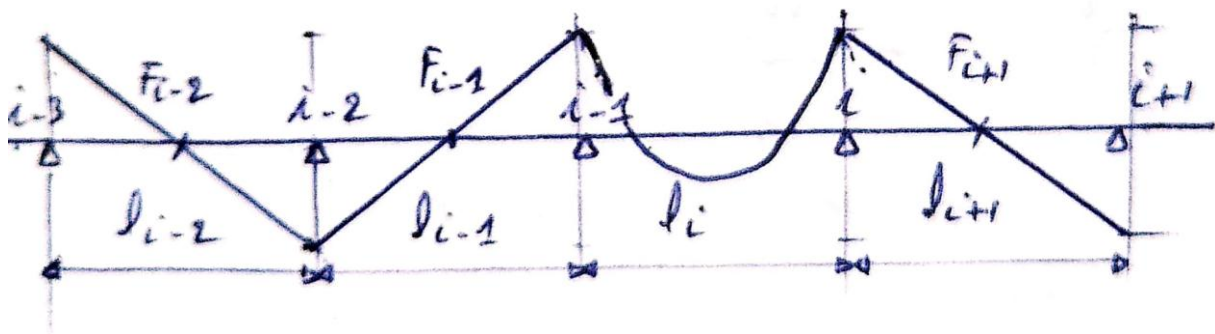
(B) Les moments de la travée « i » chargée

(C) Les moments à droite de la travée « i » chargée

w'_i et w''_i Rotation à gauche et à droite de la travée « i » chargée supposée isostatique



Pour (A) et (C) , les rotations sont nulles car la travée « i » est seule chargée



Seules les équations (B) possèdent un second membre non nul.

Les équations (A) montrent que les rapports $\frac{M_1}{M_2}, \frac{M_2}{M_3}, \dots, \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}}$ restent constants quelque soit le chargement de la travée « i », de même les équations (c) montrent également que les rapports $\frac{M_{n-1}}{M_{n-2}}, \frac{M_{n-2}}{M_{n-3}}, \dots, \frac{M_{i+1}}{M_i}$ sont constants.

On définit les rapports focaux par les grandeurs :

$$\varphi_k = \frac{-M_{k-1}}{M_k} \quad \text{et} \quad \varphi'_k = \frac{-M_k}{M_{k-1}}$$

Les rapports focaux sont calculés par les relations de récurrence suivantes :

Rapport focaux de gauche	Rapports focaux de droite
$\varphi_1 = 0$ $\frac{b_2}{\varphi_2} = c_1 + a_2 - b_1 \cdot \varphi_1$ <hr/> $\frac{b_n}{\varphi_n} = c_{n-1} + a_n - b_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}$	$\varphi'_n = 0$ $\frac{b_{n-1}}{\varphi'_{n-1}} = c_{n-1} + a_n - b_n \cdot \varphi'_n$ <hr/> $\frac{b_1}{\varphi'_1} = c_1 + a_2 - b_2 \cdot \varphi'_2$

Pour une poutre d'inertie constante, on établit facilement

$$\begin{cases} \frac{1}{\varphi_{i+1}} = 2 + \frac{l_i}{l_{i+1}} \cdot (2 - \varphi_i) \\ \frac{1}{\varphi'_i} = 2 + \frac{l_{i+1}}{l_i} \cdot (2 - \varphi'_{i+1}) \end{cases}$$

Les équations (B) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{\varphi_i} \cdot M_{i-1} + M_i = \frac{w'_i}{b_i} \\ M_{i-1} + \frac{1}{\varphi'_i} \cdot M_i = -\frac{w''_i}{b_i} \end{cases}$$

La solution des équations (B) conduit à :

$$\begin{cases} M_{i-1} = \frac{1}{b_i} \cdot \frac{\left(\frac{w'_i}{\varphi_i}\right) + w''_i}{\left(\frac{1}{\varphi_i \cdot \varphi'_i}\right) - 1} \\ M_i = \frac{-1}{b_i} \cdot \frac{w'_i + \left(\frac{w''_i}{\varphi'_i}\right)}{\left(\frac{1}{\varphi_i \cdot \varphi'_i}\right) - 1} \end{cases}$$

4. Lignes d'influence

Supposons que la charge unité $P=1$ se trouve dans une section d'abscisse α sur une des travées contiguës à l'appui « A_i », la solution des équations (B) donne :

- lorsque la force $P=1$ se trouve dans la travée « i »

$$M_i(\alpha) = \frac{-1}{b_i} \cdot \frac{w'_i + \left(\frac{w''_i}{\varphi'_i}\right)}{\left(\frac{1}{\varphi_i \cdot \varphi'_i}\right) - 1}$$

- Lorsque la force $P=1$ se trouve dans la travée « $i+1$ »

$$M_i(\alpha) = \frac{1}{b_{i+1}} \cdot \frac{\left(\frac{w'_{i+1}}{\varphi'_{i+1}}\right) + w''_{i+1}}{\left(\frac{1}{\varphi_{i+1} \cdot \varphi'_{i+1}}\right) - 1}$$

- Dans le cas particulier ou la travée « 1 » est chargée, le moment à l'appui A_1 se calcule par la formule

$$M_1(\alpha) = -\frac{\varphi'_1 \cdot w''_1}{b_1}$$

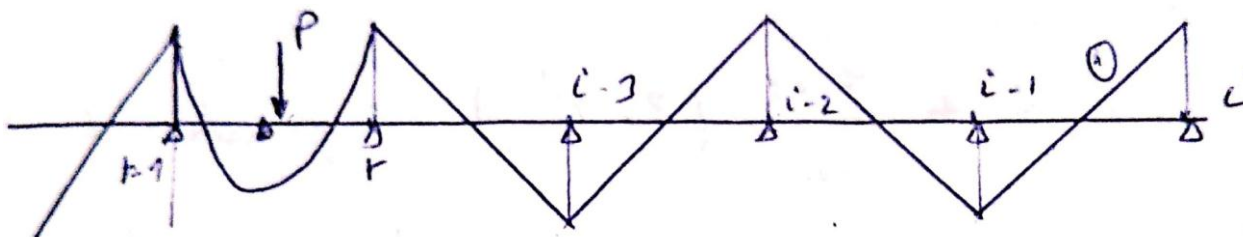
- Dans le cas particulier ou la travée « n » est chargée, le moment à l'appui A_{n-1} se calcule par la formule

$$M_{n-1}(\alpha) = -\frac{w'_n \cdot \varphi_n}{b_n}$$

Supposons maintenant que la charge unité $P=1$ ne se trouve pas sur une travée contiguës à l'appui A_i , nous avons :

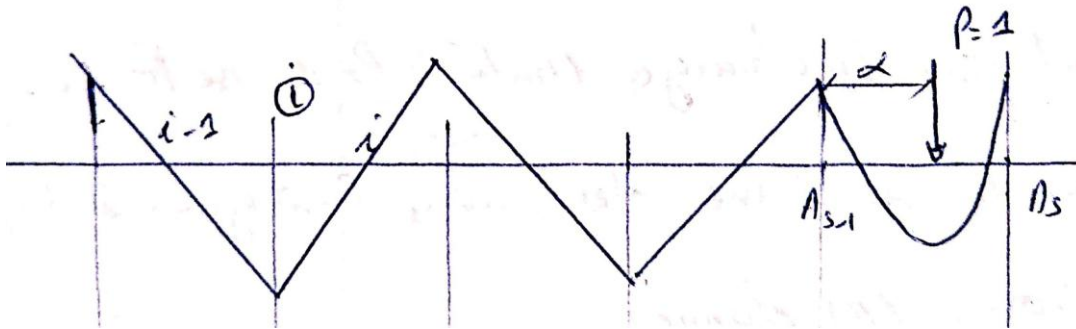
- lorsque P est appliqué à une travée $A_{r-1} A_r$ ($r < i$)

$$M_i(\alpha) = (-1)^{i-r} \cdot \varphi'_i \cdot \varphi'_{i-1} \dots \dots \varphi'_{r+1} \cdot M_{r+1}(\alpha)$$



- Lorsque P est appliqué à la travée $A_{s-1}A_s$ avec ($s > i+1$)

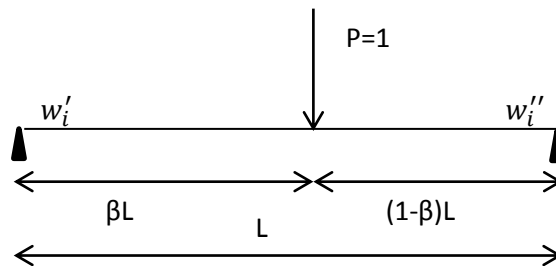
$$M_i(\alpha) = (-1)^{s-i-1} \cdot \varphi_{i+1} \cdot \varphi_{i+2} \dots \varphi_{s-1} \cdot M_{s-1}(\alpha)$$



Les rotations à l'origine et aux bords d'une poutre sur deux appuis simples sous l'effet d'une charge unité appliquée à l'abscisse « βL » sont :

$$w'_i = -\frac{l^2}{6EI} \cdot \beta \cdot (1 - \beta) \cdot (2 - \beta)$$

$$w''_i = \frac{l^2}{6EI} \cdot \beta \cdot (1 - \beta^2)$$



La fonction d'influence $M_{iso}(\alpha, x)$ du moment fléchissant dans une section X d'abscisse « x » de la travée « i » ($A_{i-1}A_i$) a pour expression

$$M_i(\alpha, x) = M_{iso}(\alpha, x) + M_{i-1}(\alpha) \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i(\alpha) \cdot \frac{x}{l_i}$$

La fonction d'influence de l'effort tranchant dans une section X d'abscisse « x » de la travée « i » ($A_{i-1}A_i$) a pour expression

$$T_i(\alpha, x) = T_{iso}(\alpha, x) + \frac{1}{l_i} \cdot (M_i(\alpha) - M_{i-1}(\alpha))$$

$M_{iso}(\alpha, x)$ et $T_i(\alpha, x)$ Étant nuls lorsque la charge unité se trouve sur une travée autre que la travée ($A_{i-1}A_i$)

5. Application 1

Construire la ligne d'influence du moment fléchissant à l'appui (A2) de la poutre continue ayant 04 travées de portée « L » et de rigidité constante

