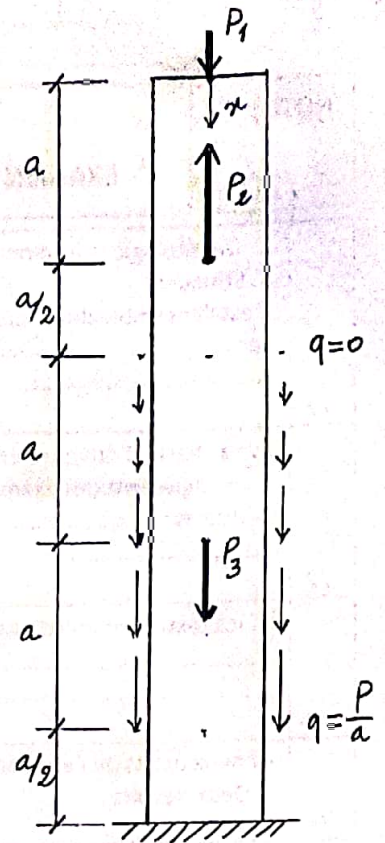


①

Exercice ①

Soit une barre de longueur $4a$ de section constante. La barre est soumise, aux charges concentrées P_1 , P_2 et P_3 et aussi une charge q répartie linéairement sur un tronçon de longueur $2a$. On donne: $P_1 = P$, $P_2 = 3P$ et $P_3 = 2P$. Construire le diagramme de l'effort normal E_n .

Solution

① Méthode "RDM"

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow P_1 - P_2 + P_3 + \int_{1.5a}^{3.5a} q(x) dx + R = 0 \quad (1)$$

On sait que la charge q varie linéairement

d'où $q(x) = \alpha x + \beta$ avec $q(1.5a) = 0$ et $q(3.5a) = \frac{P}{a}$

De cela, on peut obtenir la forme de $q(x)$ tel que :

$$q(x) = \frac{P}{a} \left(\frac{x}{2a} - \frac{3}{4} \right)$$

La charge équivalente à la charge répartie est :

$$\int_{1.5a}^{3.5a} q(x) dx = \int_{1.5a}^{3.5a} \frac{P}{a} \left(\frac{x}{2a} - \frac{3}{4} \right) dx = P$$

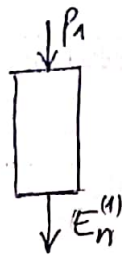
De l'équation (1), on peut déterminer la R à l'encastrement

$$R = -P_1 + P_2 - P_3 - P = -P \quad (\text{sens opposé à l'axe } x)$$

Section ① : $0 \leq x \leq a$

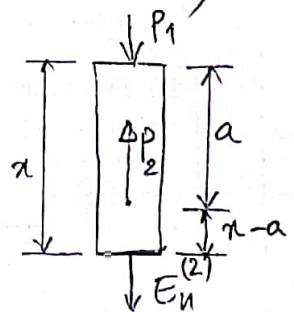
$$P_1 + E_n^{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow E_n^{(1)} = -P_1 = -P$$

Section ② : $a \leq x \leq 1.5a$

$$P_1 - P_2 + E_n^{(2)} = 0$$

$$\Rightarrow E_n^{(2)} = P_2 - P_1 = 2P$$



(2)

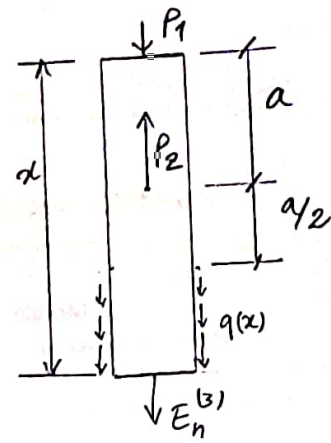
Section (3) : $1,5a \leq x \leq 2,5a$

$$P_1 - P_2 + E_n^{(3)} + \int_{1,5a}^x q(x) dx = 0$$

$$E_n^{(3)} = P_2 - P_1 - \int_{1,5a}^x q(x) dx$$

$$\int_{1,5a}^x q(x) dx = \int_{1,5a}^x \frac{P}{a} \left(\frac{x}{2a} - \frac{3}{4} \right) dx = \frac{P}{4} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{9}{4} \right]$$

$$E_n^{(3)} = P_2 - P_1 - \frac{P}{4} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{9}{4} \right] = \frac{P}{4} \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 3 \frac{x}{a} + \frac{23}{4} \right]$$

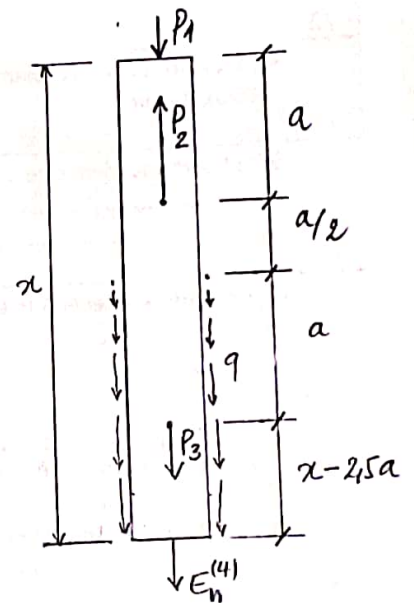


Section (4) : $2,5a \leq x \leq 3,5a$

$$P_1 - P_2 + P_3 + E_n^{(4)} + \int_{1,5a}^x q(x) dx = 0$$

$$E_n^{(4)} = P_2 - P_1 - P_3 - \int_{1,5a}^x q(x) dx$$

$$= - \frac{P}{4} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{9}{4} \right]$$

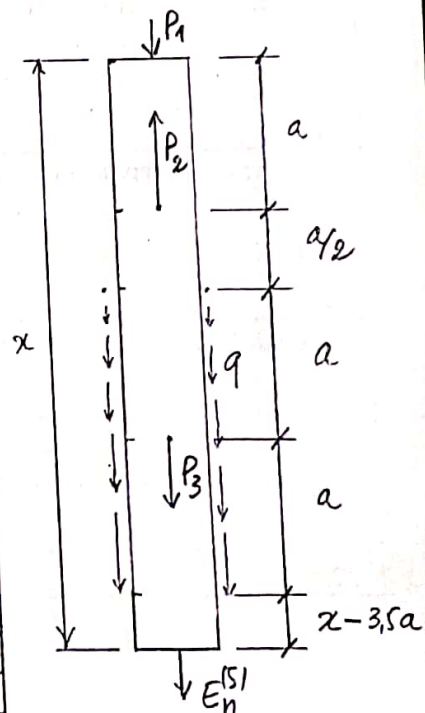


Section (5) : $3,5a \leq x \leq 4a$

$$P_1 - P_2 + P_3 + E_n^{(5)} + \int_{1,5a}^{3,5a} q(x) dx = 0$$

$$E_n^{(5)} = P_2 - P_1 - P_3 - \int_{1,5a}^{3,5a} q(x) dx$$

$$E_n^{(5)} = -P$$



Résumé

variable x	0	a ⁻	a ⁺	1,5a ⁻	1,5a ⁺	2,5a ⁻	2,5a ⁺	3,5a ⁻	3,5a ⁺	4a
fonction E _n	-P	-P	2P	2P	2P	7P/4	-P/4	-P	-P	-P
Loi de variation	constante	constante	parabolique	parabolique	constante					

(3)

② Méthode des éléments finis

La barre sera discrétisée par cinq éléments barres linéaires élastiques.

La relation d'équilibre d'un élément typique est donnée par l'expression (14) (voir le cours)

$$[K^{(e)}] \{U^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \{Q^{(e)}\} + \{P^{(e)}\}$$

avec: $[K^{(e)}] = \frac{1}{l_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{x_i}^{x_j} EA(x) dx$ est la matrice de rigidité de l'élément

$\{U^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$ est le vecteur des variables nodales

$\{F^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} -F_i \\ F_j \end{Bmatrix}$ est le vecteur des charges ponctuelles appliquées aux nœuds de l'élément

$\{Q^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} = \int_{x_i}^{x_j} q(x) \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} dx$ est le vecteur des

charges nodales équivalentes aux charges réparties.

$\{P^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \int_{x_i}^{x_j} F_v A \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} dx$ est le vecteur des charges nodales équivalentes au poids de l'élément.

Appliquons l'expression (14) aux cinq éléments finis

Element ① $x_i = 0$, $x_j = a$, $l_1 = a$, $A_1 = A$, $q = 0$, $F_v = c \tau$

$$\frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ -P_2/2 \end{Bmatrix} + \frac{F_v A a}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \{Q^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Element ② $x_i = a$, $x_j = 1,5a$, $l_2 = a/2$, $A_2 = A$, $q = 0$, $F_v = c \tau$

$$\frac{2EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_2/2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{F_v A a}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \{Q^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(4)

Elément ③ $x_i = 1,5a$, $x_j = 2,5a$, $l_3 = a$, $A_3 = A$, $q = q(x)$, $F_v = c\bar{u}$

$$\{Q^{(3)}\} = \int_{1,5a}^{2,5a} \frac{q(x)}{a} \begin{Bmatrix} 2,5a - x \\ x - 1,5a \end{Bmatrix} dx = \frac{P}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P/2 \end{Bmatrix} + \frac{P}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{F_v A a}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Elément ④ $x_i = 2,5a$, $x_j = 3,5a$, $l_4 = a$, $A_4 = A$, $q = q(x)$, $F_v = c\bar{u}$

$$\{Q^{(4)}\} = \int_{2,5a}^{3,5a} \frac{q(x)}{a} \begin{Bmatrix} 3,5a - x \\ x - 2,5a \end{Bmatrix} dx = \frac{P}{12} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{P}{12} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix} + \frac{F_v A a}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Elément ⑤ $x_i = 3,5a$, $x_j = 4a$, $l_5 = a/2$, $A_5 = A$, $q = 0$, $F_v = c\bar{u}$

$$\frac{2EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix} + \frac{F_v A a}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \{Q^{(5)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

↑ la réaction à l'encastrement

Assemblage

$$\frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1+2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ -P_2 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix} + \frac{P}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{F_v A a}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

⑤

La condition au limite du problème est $U_6 = 0$ (déplacement nul à l'encastrement)
Après introduction de la condition au limite, on obtient le système suivant:

$$\frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \frac{P}{12} \begin{bmatrix} 12 \\ -36 \\ 1 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix} + \frac{F_v A a}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \frac{EA}{a} (-2U_5) = R + \frac{F_v A a}{4} \rightarrow R = -\frac{2EA}{a} U_5 - \frac{F_v A a}{4}$$

Après résolution de ce système d'équations, on obtient :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{qa^2}{12EA} \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 14 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{F_v a^2}{8E} \begin{bmatrix} 64 \\ 60 \\ 55 \\ 39 \\ 15 \end{bmatrix} \stackrel{(F_v=0)}{\downarrow} \frac{Pa}{12EA} \begin{bmatrix} -10 \\ -22 \\ -10 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La réaction à l'encastrement est : $R = -qa - 4F_v A a$

Les contraintes $\sigma^{(i)} = \frac{E_e}{l_e} (u_j - u_i)$

$$\sigma^{(1)} = \frac{E}{a} (u_2 - u_1) = -\frac{P}{A} - \frac{F_v a}{2}$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{2E}{a} (u_3 - u_2) = \frac{2P}{A} - \frac{5F_v a}{4}$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{E}{a} (u_4 - u_3) = \frac{23P}{12A} - 2F_v a$$

$$\sigma^{(4)} = \frac{E}{a} (u_5 - u_4) = -\frac{7P}{12A} - 3F_v a$$

$$\sigma^{(5)} = \frac{2E}{a} (u_6 - u_5) = -\frac{P}{2A} - \frac{15F_v a}{4}$$

Les efforts normaux (longitudinaux)

$$E_n^{(1)} = -P$$

$$E_n^{(2)} = 2P$$

$$E_n^{(3)} = \frac{23P}{12}$$

$$E_n^{(4)} = -\frac{7P}{12}$$

$$E_n^{(5)} = -P$$

le poids de la barre est négligé

Diagramme de l'effort normal

(6)

