

La méthode de GUYON MASSONNET

1. Introduction

La méthode de GUYON-MASSONNET-BAREŠ est une méthode de répartition transversale des efforts. Elle repose sur la théorie des plaques orthotropes. Elle fut développée par Guyon dans le cas d'une dalle orthotrope à rigidité torsionnelle négligeable. En 1950 Massonet généralisa les relations trouvées par Guyon en introduisant l'effet de la torsion dans les calculs. En 1966, Massonet et Barrès publièrent un recueil de ces méthodes illustré par un nombre d'exemples.

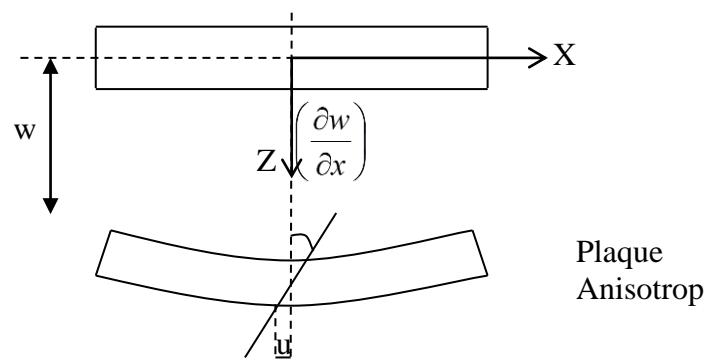
2. Principe de la méthode de GUYON MASSONNET :

Cette méthode vise à déterminer les efforts transitant dans un grillage de poutres soumis à un chargement quelconque, ponctuel ou réparti. Le système dalle-poutre discret est remplacé par un système uniforme composé d'une dalle anisotrope ou orthotrope ayant des caractéristiques constantes suivant chacun de ses axes transversal et longitudinal. Ce passage d'une répartition discrète de la rigidité, à une répartition continue, est l'hypothèse principale sur laquelle repose cette méthode. La deuxième hypothèse consiste à admettre que le coefficient de Poisson du matériau constitutif est nul. Cette hypothèse est plus ou moins contestable, mais, dans la mesure où le but de la méthode est de déterminer la répartition des efforts dans les différentes parties de la structure et où les variations de ces efforts ne sont pas très importantes, l'erreur qui en résulte peut être considérée comme négligeable.

3. Rappels sur la théorie des plaques :

Equation aux dérivées partielles des plaques :

- Dans le cas orthotrope :



Dans le cas de la plaque anisotrope, l'équation aux dérivées partielles s'écrit :

$$\left[\varphi_{11} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} - 4\varphi_{14} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - 2(\varphi_{12} + 2\varphi_{44}) \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 4\varphi_{24} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^4} - \varphi_{22} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + p(x, y) = 0$$

$$\varphi_{ik} = \frac{\partial^3 E_{ik}}{12}$$

Dans le cas *orthotrope*, le matériau de la dalle possède 03 plans de symétrie par rapport à ces propriétés élastiques, dans ce cas on peut mettre :

$$E_{11} = \frac{E_x}{1 - \mu_x \mu_y}; E_{22} = \frac{E_y}{1 - \mu_x \mu_y}; E_{12} = \frac{\mu_x \mu_y}{1 - \mu_x \mu_y}; E_{21} = \frac{\mu_y \mu_x}{1 - \mu_x \mu_y}$$

$$E_{44} = G; E_{14} = E_{41} = E_{24} = E_{42} = 0$$

Ou : E_x, E_y : les modules d'élasticité longitudinales dans les axes x, y.

μ_x, μ_y : Les coefficients de poisson.

G : Module de cisaillement.

L'équation aux dérivées partielles s'écrit :

$$\varphi_x \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varphi_y \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - p(x, y) = 0$$

Avec : $\varphi_x = \frac{E_x \cdot d^3}{12 \cdot (1 - \mu_x \mu_y)}$; $\varphi_y = \frac{E_y \cdot d^3}{12 \cdot (1 - \mu_x \mu_y)}$

$$H = \frac{d^3}{12 \cdot (1 - \mu_x \mu_y)} \cdot [E_x \mu_x + E_y \mu_y + 4G \cdot (1 - \mu_x \mu_y)]$$

- **Dans le cas isotrope :**

$E_x = E_y = E$; $\mu_x = \mu_y = \mu$: L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{\varphi}; \text{Avec : } \varphi = \frac{Ed^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$$

Une fois résolue l'équation fondamentale de la dalle c.-à-d. trouvé la fonction $w(x, y)$ pour une charge donnée, le problème est complètement déterminé.

4. Application de la théorie de la plaque orthotrope à des grillages de poutres :

Un grillage simple constitué, dans le sens y , de m poutres espacées les unes des autres de b_0 , et dans le sens x , de n entretoises espacées de l_0 .

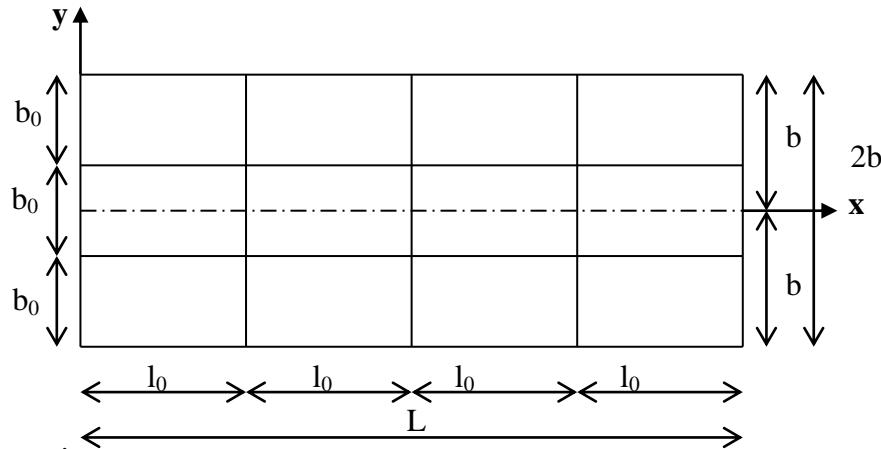


Figure : grillage des poutres

On substitue cette structure par une structure équivalente où les rigidités sont réparties d'une manière continue sur la longueur et sur la largeur.

Désignons par :

$B_P = EI_P$ la rigidité flexionnelle des poutres

$B_E = EI_E$ la rigidité flexionnelle des entretoises

$C_P = GI_{P_t}$ et $C_E = GI_{E_t}$ les rigidités à la torsion des poutres et entretoises avec

$G = E/2(1+\nu)$; ν coefficient de poisson.

Les rigidités flexionnelles par unité de longueur seront :

$$\rho_p = \frac{B_p}{b_0} ; \rho_E = \frac{B_E}{l_0} .$$

De même, les rigidités torsionnelles par unité de longueur sont : $\gamma_p = \frac{C_p}{b_0} ; \gamma_E = \frac{C_E}{l_0}$

Dans ce cas, l'équation différentielle d'un grillage dont les rigidités sont réparties de manière continue s'écrit :

$$\rho_p \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\gamma_p + \gamma_E) \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x, y)$$

Le grillage général constitue une construction intermédiaire entre la plaque orthotrope et le grillage simple (dont les répartitions sont continuées). Il doit satisfaire aussi bien l'équation de la dalle orthotrope que celle du grillage simple.

Pour un déplacement vertical (la déformée de la dalle) de la construction selon la surface $W=w(x,y)$, il naît des moments fléchissant par unité de longueur :

$$M_x = -\rho_p \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad M_y = -\rho_E \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

La géométrie montre que la torsion de la surface de déplacement W est donnée par l'expression $\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}$ et dans la construction naîtront donc les moments de torsion unitaires

$$M_{xy} = -\gamma_p \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad \text{et} \quad M_{yx} = -\gamma_E \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}$$

L'effort tranchant vertical Q_y se calcul suivant la formule

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

En remplaçant les valeurs de M_x et M_{xy} :

$$Q_y = -\rho_E \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \gamma_p \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \cdot \partial y}$$

5. Paramètres sans dimensions

5.1 Paramètre d'entretoisement

Il a été déduit par Guyon en calculant les grillages sans tenir compte de la torsion :

$$\theta = \frac{b}{l} \cdot \sqrt[4]{\frac{\rho_p}{\rho_E}}$$

Avec :

b : demi largeur active de la dalle

l : portée de la travée

Le paramètre θ détermine la souplesse de l'entretoisement, plus grand est θ , plus souple est l'entretoisement.

On considère que si $\theta \leq 0,3$ le tablier est indéformable, on applique donc la méthode des entretoises rigides (Methode de J. Courbon)

5.2 Paramètre de torsion

Dans la pratique, le coefficient de rigidité torsionnelle ($\gamma_P + \gamma_E$) est toujours compris entre les valeurs correspondant aux deux cas particuliers, celui de la dalle et celui du grillage simple.

Si l'on pose $\gamma_P + \gamma_E = 2 \cdot \alpha \cdot \sqrt[2]{\rho_P \cdot \rho_E}$, l'effet de torsion est caractérisé par le paramètre α dont la valeur, pour couvrir le domaine entier entre les deux cas particuliers précités, variera de 0 à 1 c.-à-d. ($0 \leq \alpha \leq 1$).

$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2 \cdot \sqrt[2]{\rho_P \cdot \rho_E}}$$

Par ces deux paramètres θ et α , le comportement de la construction est complètement défini.

6. Flexion longitudinale des poutres

Sous l'effet d'une charge linéaire repartie sur une parallèle à l'axe X d'abscisse E sous la loi sinusoïdale telle que

$$P(x) = P_1 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{L}$$

Où P_1 est la valeur constante du chargement.

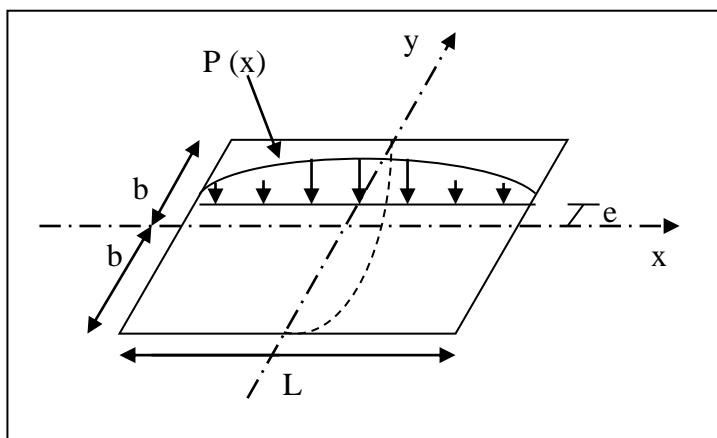


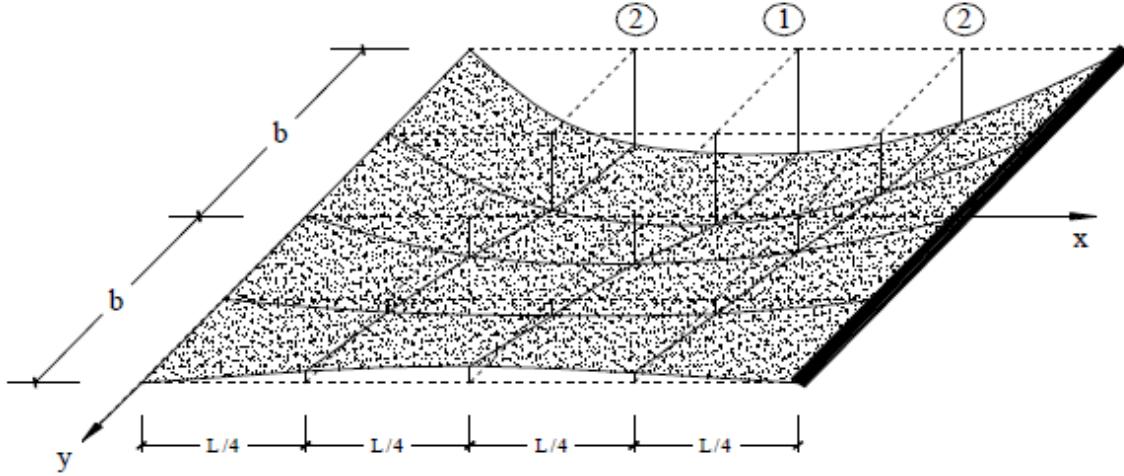
Figure : forme de la déformé du pont et la charge appliquée.

la construction prend une déformée $W(x,y)$ donnée par la formule suivante:

$$w(x, y) = w(y) \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{L}$$

Si la charge était uniformément repartie sur la largeur $2b$, cette dernière devient cylindrique de forme :

$$w_0(x) = w_0 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{L}$$



Le rapport des déplacements d'un point dans les deux cas désigne le coefficient de répartition transversale $K(y)$ telle que :

$$K(y) = \frac{w(x, y)}{w_0(x)} = \frac{w_y}{w_0}$$

Il résulte que le coefficient k dépend

- De la valeur du paramètre d'entretoisement θ
- De la valeur du paramètre de torsion α
- De l'excentricité relative (e/b)
- De la charge linéaire
- De l'ordonnée relative (y/b) du point considéré de la construction

$$M_0(x) = -\rho_P \cdot \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = w_0 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \rho_P \cdot \sin \frac{\pi x}{l} = w_0(x) \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \rho_P$$

$$M(x, y) = -\rho_P \cdot \frac{d^2 w(x, y)}{dx^2} = w(y) \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \rho_P \cdot \sin \frac{\pi x}{l} = w(x, y) \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \rho_P$$

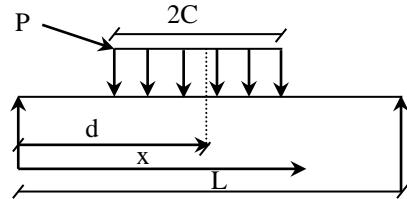
$$k(y) = \frac{w(x, y)}{w_0(x)} = \frac{M(x, y)}{M_0(x)}$$

donc le moment dans un point (x, y) est donnée par la relation

$$M(x, y) = k(y) \cdot M_0(x)$$

7. Développement en série de fourrier des différentes charges

7.1 Cas d'une charge répartie sur une distance 2C



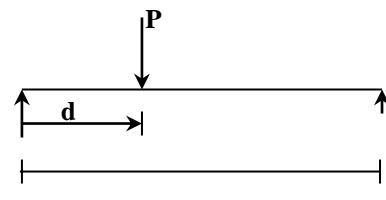
$$P_m = \frac{4 \cdot P}{m \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot d}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot c}{l}\right)$$

7.2 Cas d'une charge uniformément répartie

$$d=c=L/2$$

$$P_m = \frac{4 \cdot P}{m \cdot \pi} \cdot \sin^2\left(\frac{m \cdot \pi}{2}\right)$$

7.3 Cas de charges concentrées



$$P_m = \frac{2 \cdot P}{l} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot d}{l}\right)$$

8. Application pratique de la méthode de Guyon Massonet

Cette méthode consiste pour chaque effort à tracer les lignes d'influence de son coefficient de répartition transversale et cela pour différentes excentricités des charges.

$$e = \left\{ \pm b; \pm \frac{3b}{4}; \pm \frac{b}{2}; \pm \frac{b}{4}; 0 \right\} \text{ et pour les 9 sections de la largeur de la dalle ;}$$

$$y = \left\{ \pm b; \pm \frac{3b}{4}; \pm \frac{b}{2}; \pm \frac{b}{4}; 0 \right\}.$$

On déplacera les charges de façon à obtenir les plus grandes ordonnées et on retiendra pour le calcul des efforts, les excentricités qui donnent les plus grandes valeurs des coefficients.

Dans le cas de pont à poutres multiples, la section d'étude sera imposée par la position de la poutre, on tracera les lignes d'influence des différentes excentricités de charge et on retiendra la section qui donne les plus grandes valeurs des coefficients.

8.1 Calcul du moment fléchissant

Le moment fléchissant est donnée par la formule suivante

$$M(x) = k_{am} \cdot M_0(x)$$

$M_0(x)$: le moment moyen par poutre dans la section d'abscisse « x »

$M(x)$: le moment total dans la section d'abscisse « x »

k_{am} coefficient de répartition moyen

8.1.1 Le moment moyen $M_0(x)$

- Pour un pont à poutres

$$M_0(x) = \frac{M(x)}{n}$$

n : le nombre de poutres

- Pour un pont dalle

$$M_0(x) = \frac{M(x)}{2b}$$

2b la largeur active du pont

8.1.2 Calcul du coefficient de répartition moyen

Sur la base de calculs d'un grand nombre de cas, Massonet a déterminé dans des tableaux les valeurs des coefficients K_0 et K_1 pour θ compris entre 0.05 et 5.00 et selon les différentes excentricités de charges ($e = \pm b; \pm 3b/4; \pm b/2; \pm b/4; 0$) et pour les sections de la largeur de la dalle ($y = 0; y = b/4; y = b/2; y = 3b/4; y = b$) .

Pour un calcul rigoureux de K_α , il est nécessaire d'appliquer les formules d'interpolation établies par Sattler et qui dépendent aussi de la valeur de θ :

$$\text{si } 0 < \theta \ll 0,1 \quad k_\alpha = k_0 + (k_1 - k_0) \cdot \alpha^{0,05}$$

$$\text{si } 0,1 < \theta \ll 1 \quad k_\alpha = k_0 + (k_1 - k_0) \cdot \alpha^\beta$$

$$\text{si } \theta > 1 \quad k_\alpha = k_0 + (k_1 - k_0) \cdot \alpha^{0,5}$$

Où

$$\beta = 1 - e^{\frac{0,065-\theta}{0,663}}$$

Dans le cas où θ calculée ne figure pas dans le tableau on doit faire une interpolation, et si la poutre en question se trouve entre deux sections dont les lignes d'influence sont connues on peut aussi faire une interpolation.

- *Pour les charges concentrées*

$$k_{\alpha m} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i \cdot K_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i}$$

P_i la charge

K_i l'ordonnée correspondant à la charge P_i

- *Pour les charges reparties*

$$k_{\alpha m} = \frac{S}{d}$$

S : surface de la ligne d'influence sous la charge de largeur « 1 »

L : largeur de la charge repartie

8.2 Calcul des efforts tranchant

L'effort tranchant est donnée par la formule suivante

$$T(x) = \varepsilon_{am} \cdot T_0(x)$$

$T_0(x)$: l'effort tranchant moyen par poutre dans la section d'abscisse « x »

$T(x)$: l'effort tranchant total dans la section d'abscisse « x »

ε_{am} Coefficient de répartition moyen

8.2.1 L'effort tranchant moyen

- **Pour un pont à poutres**

$$T_0(x) = \frac{T(x)}{n}$$

n : le nombre de poutres

- **Pour un pont dalle**

$$T_0(x) = \frac{T(x)}{2b}$$

$2b$ la largeur active du pont

8.2.2 Le coefficient de répartition moyen ε_{am}

A partir des tableaux des ε_0 et ε_1 donnés par Guyon pour les différentes valeurs de θ , on détermine les tableaux donnant des ε_0 et ε_1 pour la valeur de θ de notre structure.

On applique les mêmes étapes que pour la détermination du coefficient K_α , sauf que ε_α est obtenu par les formules suivantes :

$$\text{Si : } |Y| + |e| \leq 3b/4 \Rightarrow \varepsilon_\alpha = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \cdot \alpha$$

$$\text{Si : } |Y| + |e| > 3b/4 \Rightarrow \varepsilon_\alpha = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

8.2.3 Pour les réactions ($X=0.L$) $\bar{\varepsilon}_{\alpha m}$

$$R = T(0) = \bar{\varepsilon}_\alpha \cdot T_0(0)$$

- Détermination des coefficients de répartition transversale $\bar{\varepsilon}_\alpha$

On applique les mêmes étapes que pour la détermination du coefficient ε_α , mais par les formules suivantes : les tableaux de ε_1 sont remplacés par les tableaux de $\bar{\varepsilon}_1$

$$\text{Si : } |Y| + |e| \leq 3b/4 \quad \text{on a : } \bar{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_0 + (\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_0) \cdot \alpha$$

$$\text{Si : } |Y| + |e| > 3b/4 \quad \text{on a : } \bar{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_0 + (\bar{\varepsilon}_1 - \varepsilon_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

8.3 Calcul des moments fléchissant transversaux (dans les entretoises)

Le moment fléchissant par unité de largeur d'entretoise c'est-à-dire par unité de longueur dans le grillage est exprimé, pour une charge sinusoïdale, par la relation:

$$M_{ym}(x, y) = \mu_{am} \cdot P_m \cdot b \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{l}\right)$$

Le coefficient μ (θ , α , e , y) dépend des valeurs du paramètre d'entretoisement θ , du paramètre de torsion α , de l'excentricité e et de la charge et de l'ordonnée y de la section faite dans l'entretoise dans laquelle on cherche l'effet.

La détermination des coefficients μ_α se fera comme suit :

$$\text{si } \theta < 1 \quad \mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \cdot \alpha^\beta$$

$$\text{si } \theta > 1 \quad \mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \cdot \alpha^{0,5}$$

Où

$$\beta = 1 - e^{\frac{0,065-\theta}{0,663}}$$

Pour (1)

La détermination des coefficients μ_1 , μ_0 correspondant aux valeurs de θ et 3θ , se fera par interpolation (Tableaux de Guyon Massonet).

Dans le cas de calcul du moment transversal, chaque charge appliquée doit être développée en série de FOURIER, et pour plus de précision, on gardera que les trois premiers termes harmoniques impairs ($m=1,3$ et 5).

Remarque :

- Pour le poids propre, $\mu_\alpha = 0$
- Si $5\theta > 2$, on peut se limiter aux deux premiers termes impairs ($m = 1$ et 3)

Et c'est notre cas, car $5\theta = 2,68 > 2$, donc on se limitera à $m = 1,3$.