Cours : Théorie des semi-groupes

pour les étudiants de première année master

Pr. Dalila Azzam-Laouir

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Université Mohamed Seddik Benyahia de Jijel

15 juin 2020

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 Introduction

Ce cours s'adresse aux étudiants de première année master : Analyse Fonctionnelle. Il a pour objectif de donner les définitions et les propriétés fondamentales des semi-groupes ainsi que leurs applications à la résolution des problèmes de Cauchy abstraits. Néanmoins, ce cours peut intéresser les étudiants d'autres disciplines de mathématiques, vu qu'on trouve plusieurs applications de cette théorie non seulement dans la théorie des EDP ou la théorie des processus stochastiques, mais les semi-groupes deviennent aujourd'hui un outil très puissant dans la résolution des équations intégro-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique et aussi dans la théorie du contrôle.
Les méthodes utilisant les semi-groupes sont également appliquées aujourd'hui dans la résolution des équations concrètes qui se produisent dans la dynamique de la population ou dans la théorie du transport.

Au cours de la préparation de ce manuscrit, je me suis essentiellement basée sur les références [4] et [1]. Les étudiants peuvent aussi consulter la référence [3].

CHAPITRE 2

Rappels

Dans le but de faciliter à l'étudiant la lecture et la compréhension des preuves des principaux théorèmes du chapitre 3, nous rappelons ici quelques notions de l'analyse fonctionnelle, en particulier, des opérateurs, mais sans aller loin dans les détails, vu que ces notions ont été déjà enseignées dans des modules prérequis.

2.1 Opérateurs linéaires bornés

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espace vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur. Pour $x \in E$, nous adoptons la notation Ax au lieu de A(x), pour son image. On note par $D(A)$ le domaine de définition de A, i.e.,

$$D(A) = \big\{x \in E : \ Ax \in F\big\} = \big\{x \in E : \ Ax \text{ existe}\big\}.$$

Définition 2.1.1. *L'opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est dit linéaire si $D(A)$ est un sous espace vectoriel de E et pour tous $x, y \in D(A)$, et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.*

On note par $Im(A)$ et Ker(A) l'image et le noyau de l'opérateur A, i.e.,

$$Im(A) = \big\{Ax : \ x \in D(A)\big\} \ \text{ et } \ \ker(A) = \big\{x \in D(A) : \ Ax = 0\big\}.$$

Théorème 2.1.1. *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *A est continu sur E ;*
2. *A est continu au point 0 ;*
3. *il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.*

Définition 2.1.2. *L'opérateur linéaire $A : E \longrightarrow F$ est dit borné, si pour tout sous ensemble borné M de E, $A(M)$ est un borné de F.*

Proposition 2.1.2. *L'opérateur linéaire $A : E \longrightarrow F$ est borné si et seulement si $A(\overline{B}_E)$ est un borné de F, où $\overline{B}_E$ est la boule unité fermée de E.*

Proposition 2.1.3. *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors A est borné si et seulement si A est continu.*

Par cette dernière proposition, on voit bien que les notions d'opérateur linéaire borné et d'opérateur linéaire continu sont équivalentes.

On note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus (bornés) définis sur E à valeurs dans F. Si $E = F$, on note cet espace $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$ et si $F = \mathbb{K}$, on note $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$, appelé le dual de E.

Proposition 2.1.4. *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu. Alors l'application $A \mapsto \sup_{x\in\overline{B}_E} \|Ax\|_F$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$, que l'on notera $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. De plus, nous avons*

$$\sup_{x\in\overline{B}_E} \|Ax\|_F = \sup_{x\in S_E} \|Ax\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \inf\big\{c \geq 0 : \ \|Ax\|_F \leq c\|x\|_E \ \forall x \in E\big\},$$

et

$$\|Ax\|_F \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \, \|x\|_E \ \ \forall x \in E.$$

Ici, S_E est la sphère unité de E.

2.2 Différents types de Convergence dans $\mathcal{L}(E,F)$

Soit $(A_n) \subset \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{L}(E,F)$.

2.2.1 Convergence en norme (uniforme)

Définition 2.2.1. *On dit que (A_n) converge en norme (ou uniformément) vers A sur E si*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Ceci se traduit par

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\overline{B}_E} \|A_n x - Ax\|_F = 0.$$

Remarquons que la convergence en norme de (A_n) vers A est équivalente à sa convergence uniforme sur la boule unité fermée de E, ou plus généralement sur toute partie bornée de E. D'où la terminologie de convergence en norme ou convergence uniforme.

2.2.2 Convergence ponctuelle

Définition 2.2.2. *On dit que (A_n) converge ponctuellement vers A si pour tout $x \in E$, $(A_n x)$ converge fortement dans F vers Ax, ie., pour tout $x \in E$*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\|_F = 0.$$

On dit aussi que (A_n) converge ponctuellement fortement vers A.

Remarque 2.2.1. *La convergence uniforme (en norme) implique la convergence ponctuelle forte.*
En effet, si (A_n) converge uniformément vers A, alors tout $x \in E$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\|_F = \lim_{n\to\infty} \|(A_n - A)x\|_F \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}} \|x\|_E = \|x\|_E \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Proposition 2.2.1. *Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ l'est aussi.*

Théorème 2.2.2 (Théorème de Banach-Steinhaus). *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(A_i)_{i\in J} \subset \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, $\sup\limits_{i\in J} \|A_i x\|_F < +\infty$. Alors*

$$\sup_{i\in J} \|A_i\|_{\mathcal{L}} < +\infty.$$

Autrement dit, il existe une constante $c \geq 0$ ($c = \sup\limits_{i\in J} \|A_i\|_{\mathcal{L}}$) telle que

$$\|A_i x\|_F \leq c\|x\|_E \quad \forall x \in E, \forall i \in J,$$

c'est à dire, qu'à partir d'estimations ponctuelles pour les opérateurs A_j, on peut en dégager une estimation uniforme.

Preuve.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit

$$O_k = \big\{x \in E : \sup_{i\in J} \|A_i x\|_F > k\big\},$$

et pour tout $i \in J$, posons

$$V_i^k = \big\{x \in E : \|A_i x\|_F > k\big\}.$$

Il est clair que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{i\in J} V_i^k = O_k$. En effet, pour tout $x \in \bigcup\limits_{i\in J} V_i^k$, il existe $i_0 \in J$ tel que $x \in V_{i_0}^k$, et donc $\|A_{i_0} x\|_F > k$, par suite

$$\sup_{i\in J} \|A_i x\|_F \geq \|A_{i_0} x\|_F > k,$$

i.e., $x \in O_k$. Montrons la deuxième inclusion. Soit $x \in O_k$, c'est à dire, $\sup_{i\in J} \|A_i x\|_F > k$, ceci implique l'existence de $\delta > 0$ tel que $\sup_{i\in J} \|A_i x\|_F > k + \delta$. Par la caractérisation de la borne supérieure, nous avons

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, i_\varepsilon \in J \text{ tel que } \|A_{i_\varepsilon} x\|_F > k + \delta - \varepsilon,$$

en particulier, pour $\varepsilon = \delta$, nous obtenons $\|A_{i_\delta} x\|_F > k$, i.e., $x \in V_{i_\delta}^k \subset \bigcup\limits_{i\in J} V_i^k$.
D'autre part, pour tout $i \in J$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, V_i^k est un ouvert de E. En effet, soit

$$\begin{aligned} g_i : \quad & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g_i(x) = \|A_i x\|_F. \end{aligned}$$

On sait que les applications A_i et $y \mapsto \|y\|_F$ sont continues, et don leur composition g_i et continue, de plus remarquons que

$$V_i^k = \big\{x \in E : g_i(x) > k\big\} = \big\{x \in E : g_i(x) \in]k, +\infty[\big\} = g_i^{-1}(]k, +\infty[),$$

comme $]k, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on conclut que V_i^k est un ouvert de E et par suite $O_k = \bigcup\limits_{i\in J} V_i^k$ est un ouvert de E.
Montrons maintenant qu'il existe un indice $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que O^{k_0} n'est pas dense dans E.

Supposons le contraire, i.e., pour tout $k \in \mathbb{N}$, O_k est dense dans E, par le théorème de Baire[1], $\overline{\bigcap_k O_k} = E$, il s'ensuit que $\bigcap_k O_k \neq \emptyset$. Soit alors, $x_0 \in \bigcap_k O_k$, ce qui est équivaut à

$$\sup_{i\in J} \|A_i x_0\|_F > k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

et ceci implique que $\sup_{i\in J} \|A_i x_0\|_F = +\infty$, ce qui contredit notre hypothèse. On conclut alors, l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{O_{k_0}} \neq E$.

$$\overline{O_{k_0}} \neq E \iff \exists\, x_1 \in E \text{ et } x_1 \notin \overline{O_{k_0}} \iff \exists\, x_1 \in E \text{ et } \exists\, r_1 > 0 \text{ tel que } B_E(x_1, r_1) \cap O_{k_0} = \emptyset,$$

$$\iff \forall y \in B_E(x_1, r_1), \|A_i y\|_F \leq k_0 \ \ \forall i \in J.$$

Soit $x \in S_E$ ($\|x\|_E = 1$), on a $\frac{r_1}{2}x + x_1 \in B(x_1, r_1)$, et donc $\|A_i(\frac{r_1}{2}x + x_1)\|_F \leq k_0$. D'où,

$$\begin{aligned} \|A_i x\|_F &= \left\| \frac{2}{r_1}\frac{r_1}{2} A_i x + \frac{2}{r_1} A_i x_1 - \frac{2}{r_1} A_i x_1 \right\|_F \leq \frac{2}{r_1} \left\| A_i \big(\frac{r_1}{2} x + x_1 \big) \right\|_F + \frac{2}{r_1} \|A_i x_1\|_F \\ &\leq \frac{2}{r_1} k_0 + \frac{2}{r_1} k_0 = \frac{4}{r_1} k_0. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante $m = \frac{4}{r_1} k_0$ tel que $\|A_i x\|_F \leq m$ pour tout $i \in J$, par suite

$$\sup_{x\in S_E} \|A_i x\|_F \leq m \ \ \forall i \in J \iff \|A_i\|_{\mathcal{L}} \leq m \ \ \forall i \in J \iff \sup_{i\in J} \|A_i\|_{\mathcal{L}} \leq m.$$

Ceci termine la preuve. □

2.3 Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

Avec le théorème de Banach Steinhaus, les théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé de Banach constituent les théorèmes fondamentaux de la théorie des opérateurs linéaires.

Théorème 2.3.1. ***(Théorème de l'application ouverte).*** *Soit E et F deux espaces de* ***Banach*** *et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ une application surjective. Alors T est une application ouverte, i.e., $T(V)$ est un ouvert de F pour tout ouvert V de E.*

Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$, avec $D(A)$ un sous espace vectoriel de E. On note par $Gr(A)$ le graphe de A, i.e., le sous ensemble de $E \times F$ défini par

$$Gr(A) = \big\{(x, Ax) : \ x \in D(A)\big\}.$$

[1]**Théorème de Baire**. Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Définition 2.3.1. *On dit que A est un opérateur fermé si son graphe est fermé dans $E \times F$. Autrement dit, pour toute suite $(x_n, y_n)_n \subset Gr(A)$ tel que $x_n \longrightarrow x$ et $y_n = Ax_n \longrightarrow y$ nous avons $x \in D(A)$ et $y = Ax$.*

Le théorème suivant concerne les opérateurs linéaires définis sur E tout entier.

Théorème 2.3.2 (Théorème du graphe fermé). *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors A est fermé si et seulement si A est continu.*

Théorème 2.3.3. *Si $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est un opérateur continu et $D(A)$ est un sous ensemble fermé de E. Alors A est fermé.*

Proposition 2.3.4. *Si l'opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est linéaire fermé. Alors A est continu si et seulement si $D(A)$ est fermé dans E.*

2.4 Opérateurs inversibles

Définition 2.4.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur. On dit que A est inversible s'il existe un opérateur $B : Im(A) \subset F \longrightarrow E$ tel que $AB = I_F$ et $BA = I_E$. Dans ce cas, on note $B = A^{-1}$ avec $A^{-1}y = x$ ssi $Ax = y$. De plus, nous avons $D(A^{-1}) = Im(A)$.*

Théorème 2.4.1. *Si F est un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijectif, alors A^{-1} est continu.*

Preuve.

Conséquence du théorème de l'application ouverte. □

Proposition 2.4.2. *Si $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est un opérateur linéaire injectif et fermé alors $A^{-1} : Im(A) \longrightarrow D(A)$ est fermé.*

Définition 2.4.2. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur $A^n : D(A^n) \subset E \longrightarrow E$ par*

$$A^0 = I,\ A^1 = A,\ A^2 = AA,\ \ldots, A^n = AA^{n-1},$$

avec

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) :\ A^{n-1}x \in D(A)\}\ \ \forall n \geq 1.$$

Remarquons que nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\|_{\mathcal{L}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}}^n$.

Proposition 2.4.3. *Soit E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|A\|_{\mathcal{L}} < 1$, alors $I - A$ est inversible et $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Preuve.

Nous avons

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \Big\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|_{\mathcal{L}}^n,$$

comme $\|A\|_{\mathcal{L}} < 1$, alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|_{\mathcal{L}}^n$ est convergente, et par suite la série $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ est absolument convergente, et donc elle est convergente puisque $\mathcal{L}(E)$ est complet. On conclut alors que $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$. D'autre part, nous avons

$$(I-A)(I + A + A^2 + \ldots + A^n) = (I + A + A^2 + \ldots + A^n)(I-A) = I - A^{n+1}$$

par passage à la limite, nous obtenons

$$(I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty}(I-A)A^n = I - \lim_{n\to\infty} A^{n+1} = I,$$

par suite, $(I-A)$ est inversible et $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$. □

Remarque 2.4.1. *Par la proposition précédente, il est clair que si $\|I - A\|_{\mathcal{L}} < 1$, alors A est inversible et $A^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (I-A)^n$.*

2.5 L'opérateur exponentiel

Soit E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$. Nous avons

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \Big\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|_{\mathcal{L}}^n = e^{\|A\|_{\mathcal{L}}},$$

et donc la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, c'est à dire c'est un élément de $\mathcal{L}(E)$. D'où la définition de l'exponentiel de A suivante.

Définition 2.5.1. *L'exponentielle de l'opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est l'opérateur défini par*

$$\begin{array}{rcl} \exp : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ A & \longmapsto & \exp(A) = e^A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n. \end{array}$$

Proposition 2.5.1. *Soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$. Alors $e^{A+B} = e^A e^B$. En particulier, l'opérateur e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*

Preuve.

Par la formule du binôme de Newton, nous avons par un simple calcul

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{(n-k)!} B^{n-k} \\ &= A^0 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \Big) + \frac{1}{1!} A \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \Big) + \frac{1}{2!} A^2 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \Big) + \ldots + \frac{1}{n!} A^n \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \Big) + \ldots \\ &= e^A (e^B) = e^A e^B. \end{aligned}$$

En particulier, $e^{A-A} = e^{-A+A} = e^0 = I = e^A e^{-A} = e^{-A} e^A$ et donc e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. □

2.6 Résolvante et spectre d'opérateurs linéaires

Définition 2.6.1. *Soit E un espace de Banach complexe et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire.*
On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A s'il existe $x \in D(A)$ ($x \neq 0$) tel que $Ax = \lambda x$, i.e., $(A - \lambda I)x = 0$, et x est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Il est clair que si λ est une valeur propre de A alors $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.
On appelle spectre ponctuel de A, qu'on note $\sigma_p(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A, et on appelle spectre de A, qu'on note $\sigma(A)$, l'ensemble défini par

$$\sigma(A) = \big\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible} \big\}.$$

Clairement $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.
On appelle ensemble résolvant de A, qu'on note $\rho(A)$, l'ensemble défini par

$$\rho(A) = \big\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ (A - \lambda I) \text{ est inversible et } (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \big\}.$$

Si $A \in \mathcal{L}(E)$, alors $(A - \lambda I) \in \mathcal{L}(E)$ et donc si $(A - \lambda I)$ est inversible, son inverse appartient aussi à $\mathcal{L}(E)$, dans ce cas l'ensemble résolvant de A sera donné par

$$\rho(A) = \big\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ (A - \lambda I) \text{ est inversible} \big\},$$

et $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. L'application

$$\begin{array}{rcl} R_A : \rho(A) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \lambda & \longmapsto & R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} \end{array}$$

s'appelle la résolvante de A.

Proposition 2.6.1. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire fermé. Alors*

1. *$\rho(A)$ est un ensemble ouvert, et donc $\sigma(A)$ est fermé, et R_A est une application analytique sur $\rho(A)$.*
2. *Pour tous $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda)R_A(\lambda)R_A(\mu)$.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \rho(A)$, on a*

$$\frac{d^n R_A}{d\lambda^n}(\lambda) = (-1)^n n! R_A^{n+1}(\lambda).$$

Définition 2.6.2. *Soit E un espace de Banach complexe et soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On appelle rayon spectral de A, le nombre réel positif, qu'on note $r_\sigma(A)$, défini par*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}}^{\frac{1}{n}},$$

cette limite existe puisque $\|A^n\|_{\mathcal{L}}^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}}$.

Théorème 2.6.2. *Soit E un espace de Banach complexe et soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Alors l'ensemble*

$$B = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| > r_\sigma(A)\right\} \subset \rho(A),$$

de plus, pour chaque $\lambda \in B$,

$$R_A(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} A^{n-1}.$$

2.7 Fonctions à valeurs dans un espace de Banach (Fonctions abstraites)

En Analyse, nous sommes bien familiariasés avec les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, néanmoins, nous sommes souvent amenés à travailler avec des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, appelées fonctions abstraites. Dans cette section, on expose quelques propriétés de ces fonctions, en particulier leurs dérivation et intégration.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et J un intervalle de $\mathbb{R}$, et considérons une application $u : J \longrightarrow E$.

2.7.1 Limite et continuité

Définition 2.7.1 (Limite). *Soit $t_0 \in J$ et $u_0 \in E$. Alors, u_0 est la limite de $u(t)$ lorsque $t \to t_0$, et on écrit $\lim_{t \to t_0} u(t) = u_0$, si $\lim_{t \to t_0} \|u(t) - u_0\|_E = 0$.*

Définition 2.7.2 (Continuité). *On dit que u est continue au point t_0 si $\lim_{t \to t_0} u(t) = u(t_0)$, i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[,\ \|u(t) - u(t_0)\|_E < \varepsilon.$$

2.7.2 Différentiabilité et analycité des fonctions abstraites

Définition 2.7.3 (Dérivée). *On dit que u est dérivable au point $t_0 \in J$ (resp. dérivable à droite de t_0) (resp. dérivable à gauche de t_0) si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} \left(\textit{resp. } \lim_{h \downarrow 0} \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} \right) \left(\textit{resp. } \lim_{h \uparrow 0} \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} \right)$$

existe dans l'espace E. Dans ce cas, cette limite qui est un élément de E, est appelée dérivée (resp. dérivée à droite) (resp. dérivée à gauche) de u au point t_0 et est notée par $u'(t_0) = \frac{du}{dt}(t_0)$ (resp. $\frac{d^+u}{dt}(t_0)$) (resp. $\frac{d^-u}{dt}(t_0)$).
Ici la notation $h \downarrow 0$ veut dire que h tend vers 0 et $h > 0$, et $h \uparrow 0$ veut dire que h tend vers 0 et $h < 0$.

Remarque 2.7.1. *Comme $u'(t) \in E$, de la même manière, on peut définir les dérivées d'ordre supérieur de u, qu'on note $u^{(n)}(t_0) = \frac{du^n}{dt}(t_0)$, $n \geq 1$.*

Définition 2.7.4. *Si u est définie sur un certain domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$ à valeurs dans E. Alors u est dite analytique dans ce domaine si elle est dérivable en tout point de D.*

2.7.3 Intégration des fonctions abstraites

On note par μ la mesure de Lebesgue.

Définition 2.7.5. *On dit que la fonction $\theta : J \longrightarrow E$ est une fonction simple si elle est mesurable, et prend un nombre fini de valeurs.*

Remarque 2.7.2. *La fonction simple θ peut s'écrire sous la forme $\theta = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{1}_{J_k}$, où les éléments $x_k \in E$ sont distincts deux à deux, les ensembles $J_k \subset J$ sont mesurables et deux à* *deux disjoints, et pour tout k fixé, nous avons $J_k = \theta^{-1}(\{x_k\})$.*

$\mathbb{1}_{J_k}$ est la fonction caractéristique de J_k.

Remarque 2.7.3. *Si $E = \mathbb{R}$, une fonction simple est une fonction étagée.*

Définition 2.7.6. *Soit $\theta = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathbb{1}_{J_k}$, une fonction simple avec $\mu(J_k) < +\infty$ lorsque $x_k \neq 0$. Alors l'intégrale de θ sur J, notée $\int_J \theta(x)d\mu(x)$ ou $\int_J \theta(x)dx$ ou $\int_J \theta d\mu$, est définie par*

$$\int_J \theta(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(J_k).$$

Définition 2.7.7. *On dit que la fonction $f : J \longrightarrow E$ est mesurable s'il existe une suite de fonctions simples $(\theta_n)_n$, qui converge μ-presque partout vers f.*

Définition 2.7.8. *Une fonction mesurable $f : J \longrightarrow E$ est dite intégrable au sens le Bochner, s'il existe une suite de fonctions simples $(\theta_n)_n$ qui converge vers f μ-presque partout et tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_J \|\theta_n(x) - f(x)\|_E dx = 0.$$

Dans ce cas, on note $\int_J f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_J \theta_n(x)$. La suite (θ_n) est appelée suite approximante pour f.

Remarque 2.7.4. *La valeur $\lim\limits_{n\to\infty} \int_J \theta_n(x)$ est indépendante de la suite approximante $(\theta_n)_n$.*

Proposition 2.7.1. *Soit $f : J \longrightarrow E$ une fonction mesurable, alors f est intégrable au sens de Bochner si et seulement si $\int_J \|f(x)\|_E dx < +\infty$.*

Théorème 2.7.2. *Soit E et F deux espaces de Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur fermé. Si $f : J \longrightarrow E$ est une fonction intégrable au sens de Bochner avec $f(s) \in D(A)$ presque pour tout $s \in J$, et si $Af : J \longrightarrow F$ est intégrable au sens de Bochner, alors $\int_J f(s)ds \in D(A)$ et*

$$A\Big(\int_J f(s)ds\Big) = \int_J Af(s)ds.$$

Lemme 2.7.1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ une fonction continue et $t_0 \in [a,b[$ alors*

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(s)ds = f(t_0).$$

Nous terminons cette section par cette propriété de l'intégrale d'un opérateur à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E,F)$, E et F étant deux espaces de Banach.

Soit $A : [a,b] \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur intégrable au sens de Bochner. Pour tout $t \in [a,b]$, on pose

$$B(t) = \int_a^t A(s)ds.$$

Si pour tout $x \in E$, l'opérateur $t \longmapsto A(t)x$ est continu, alors pour tout $t \in [a,b]$, $B(t)$ est défini par

$$B(t)x = \int_a^t A(s)x\,ds \ \ \forall x \in E.$$

Si l'opérateur $t \longmapsto A(t)$ est continu, alors pour tout $t \in [a,b]$, $B(t) \in \mathcal{L}(E,F)$.

2.8 Espaces L^p

Pour tout $p \in [1,+\infty[$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est défini par

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \big\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ est mesurable et } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx < +\infty \big\},$$

et

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \big\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ est mesurable et} \, \exists\, c \geq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq c \ p.p \big\}.$$

Théorème 2.8.1. *Muni de la norme $\|\cdot\|_p$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach, avec*

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\|f\|_\infty = \inf \big\{ c \geq 0 : \ \ |f(x)| \leq c \ p.p \big\} \quad \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Définition 2.8.1. *On définit $C_c(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions réelles continues à support compact, i.e.,*

$$C_c(\mathbb{R}^n) = \big\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ est continue et} \, Supp(f) \text{ est compact} \big\},$$

où, $Supp(f)$ est le support de f défini par

$$Supp(f) = \overline{\big\{ x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq 0 \big\}}.$$

Théorème 2.8.2. *L'espace $C_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$, c'est à dire que toute fonction de $L^p(\mathbb{R}^n)$ on peut l'approximer par une fonction continue à support compact.*

Théorème 2.8.3. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Alors*

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x+h) - f(x) \right|^p dx = 0. \tag{2.8.1}$$

Preuve.

Commençons par montrer la relation (2.8.1) pour une fonction continue à support compact. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, et pour tout $h \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $\mathcal{T}_h : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$ tel que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_h(f)$ est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $\mathcal{T}_h(f)(x) = f(x+h)$.
Comme φ est à support compact, il existe $r > 0$ tel que $Supp(\varphi) \subset \overline{B}(0, r)$ (car un compact de $\mathbb{R}$ est borné fermé). Donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$, $supp(\mathcal{T}_h(\varphi)) \subset \overline{B}(0, r+1)$ (car $x \in supp(\mathcal{T}_h(\varphi)) \Rightarrow x + h \in Supp(\varphi)$). D'autre part, comme φ est continue, on a pour tout $x \in \overline{B}(0, r+1)$

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \leq \big(|\varphi(x+h)| + |\varphi(x)|\big)^p \leq \big(2 \sup_{y\in\mathbb{R}} |\varphi(y)|\big)^p = \big(2\|\varphi\|_C\big)^p,$$

et

$$\lim_{h\to 0} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p = |\varphi(\lim_{h\to 0}(x+h)) - \varphi(x)|^p = 0.$$

Donc, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il vient que

$$\lim_{h\to 0} \|\mathcal{T}_h(\varphi) - \varphi\|_p^p = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \, dx = \lim_{h\to 0} \int_{\overline{B}(0,r+1)} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \, dx = 0.$$

Ici, $\|\cdot\|_C$ est la norme de la convergence uniforme (norme de l'epace de Banach des fonctions réelles continues $C(\mathbb{R})$).
Maintenant, on suppose que $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, par le théorème de densité, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il exsite $\varphi_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R})$ tel que $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, et donc par le changement de variable ($y = x + h$), on trouve facilement que $\|\mathcal{T}_h(\varphi) - \mathcal{T}_h(\varphi_\varepsilon)\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, et par la première étape $\lim_{h\to 0} \|\mathcal{T}_h(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\|_p = 0$. Par conséquent, utilisant l'inégalité de Minkowski, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \|\mathcal{T}_h(\varphi) - \varphi\|_p &\leq \lim_{h\to 0} \Big(\|\mathcal{T}_h(\varphi) - \mathcal{T}_h(\varphi_\varepsilon)\|_p + \|\mathcal{T}_h(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\|_p + \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_p \Big) \\
&< \varepsilon + \lim_{h\to 0} \|\mathcal{T}_h(\varphi_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon\|_p = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ε étant arbitraire, on conclut que $\lim_{h\to 0} \|\mathcal{T}_h(\varphi) - \varphi\|_p = 0$. D'où le résultat cherché. $\square$

Théorème 2.8.4. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ici, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont indéfiniment différentiables.*

CHAPITRE 3

Semi-groupes

3.1 Semi-groupes d'opérateurs bornés

Dans toute la suite, on note par E un espace de Banach muni de sa norme $\|\cdot\|_E$, par $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs linéaires continus (opérateurs bornés) définis de E à valeurs dans E, muni de sa norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. Par I, on note l'identité de E, et par $\overline{B}_E$ sa boule unité fermée. La composition de deux opérateurs $A, B \in \mathcal{L}(E)$ sera notée AB au lieu de $A \circ B$.

Définition 3.1.1. *Soit $T : [0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(E)$ un opérateur. On dit que la famille $\{T(t) : t \geq 0\}$ est un semi-groupe si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *$T(0) = I$;*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s)\ \forall t, s \geq 0$.*

Si de plus

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t) = I, \quad i.e., \quad \lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} = 0, \tag{3.1.1}$$

on dit que le semi-groupe $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ est uniformément continu.

Voici quelques exemples.

Exemple 3.1.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et considérons l'opérateur $T : [0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R})$, où pour chaque $t \geq 0$, l'opérateur linéaire continu $T(t)$ est défini par*

$$\begin{aligned} T(t): \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto T(t)x = x\, e^{at}. \end{aligned}$$

Nous avons pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $T(0)x = x = I(x)$, et donc $T(0) = I$. D'autre part, pour tous $s, t \in [0,+\infty[$, et pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

$$T(t+s)x = xe^{a(s+t)} = xe^{as}e^{at} = T(t)(xe^{as}) = T(t)(T(s)x) = T(t)T(s)x,$$

c'est à dire $T(t+s) = T(t)T(s)$. Par suite $\{T(t):\ t \geq 0\}$ est un semi-groupe. Montrons qu'il est uniformément continu. En effet, nous avons

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} = \lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in \overline{B}_{\mathbb{R}}} |T(t)x - Ix| = \lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in \overline{B}_{\mathbb{R}}} |xe^{at} - x| \leq \lim_{t\downarrow 0} |e^{at} - 1| = 0.$$

Par conséquent, $\{T(t):\ t \geq 0\}$ est un semi-groupe uniformément continu. Remarquons, que pour $t \geq 0$ et pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $T(t)x_0$ est la solution du problème différentiel de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a\, y(t) \quad t > 0 \\ y'(0) = x_0. \end{cases}$$

Exemple 3.1.2. *Soit $B \in \mathcal{L}(E)$ et soit $T : [0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(E)$, tel que pour tout $t \geq 0$, $T(t) = e^{tB}$, où $e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tB)^k}{k!}$. Alors $\{T(t):\ t \geq 0\}$ est un semi-groupe uniformément continu. En effet, nous avons par la linéarité de B, pour tous $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} T(t)(\alpha x + \beta y) &= e^{tB}(\alpha x + \beta y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k(x) + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k(y) \\ &= \alpha e^{tB}(x) + \beta e^{tB}(y) = \alpha T(t)x + \beta T(t)y. \end{aligned}$$

Pour la continuité de $T(t)$, comme B est continu, alors pour tout $x \in E$,

$$\|Bx\|_E \leq \|B\|_{\mathcal{L}} \|x\|_E,$$

et donc

$$\|T(t)x\|_E = \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k(x) \Big\|_E \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|B\|_{\mathcal{L}}^k \|x\|_E = e^{t\|B\|_{\mathcal{L}}} \|x\|_E.$$

Par conséquent, $T(t) \in \mathcal{L}(E)$ *pour tout* $t \geq 0$*. D'autre part, pour tout* $x \in E$*, nous avons* $T(0)x = e^{0B}(x) = x = I(x)$*, d'où,* $T(0) = I$*, et pour tous* $s, t \in [0, +\infty[$

$$T(t+s) = e^{(t+s)B} = e^{(tB+sB)} = e^{tB}e^{sB} = T(t)T(s).$$

On conclut que $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ *est un semi groupe. Montrons maintenant, qu'il est uniformément continu. Nous avons pour tout* $t \geq 0$*,*

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} &= \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k - I \Big\|_{\mathcal{L}} = \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \Big\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|B\|_{\mathcal{L}}^k \\ &= t\|B\|_{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} \|B\|_{\mathcal{L}}^{k-1} \leq t\|B\|_{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \|B\|_{\mathcal{L}}^{k-1} = \big(t\|B\|_{\mathcal{L}}\big) e^{t\|B\|_{\mathcal{L}}}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} \leq \lim_{t \downarrow 0} \big(t\|B\|_{\mathcal{L}}\big) e^{t\|B\|_{\mathcal{L}}} = 0.$$

D'où le résultat.

Dans la suite, on va donner un exemple de semi-groupe non uniformément continu.

Exemple 3.1.3. *Considérons*

$$E = L^p(\mathbb{R}) = \Big\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ mesuarable et } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < +\infty \Big\}, \ p \in [1 + \infty[,$$

et soit $T : t \in [0, +\infty[\mapsto T(t) \in \mathcal{L}(E)$ *tel que pour tout* $t \geq 0$*, l'opérateur* $T(t)$ *est défini par,* $T(t) : \varphi \in E \mapsto T(t)\varphi \in E$ *avec*

$$\begin{aligned} T(t)\varphi : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & s \mapsto (T(t)\varphi)(s) = \varphi(t+s). \end{aligned}$$

Montrons que $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ *est un semi-groupe. Il clair que pour tout* $t \geq 0$*,* $T(t)$ *est un opérateur linéaire continu. D'autre part, pour tout* $\varphi \in E$ *et pour tout* $s \in \mathbb{R}$*,* $(T(0)\varphi)(s) = \varphi(s)$*, ceci implique que* $T(0)\varphi = \varphi$*, et donc* $T(0) = I$*. Pour voir la deuxième propriété, soient* $t, t' \in [0, +\infty[$*, alors pour tout* $\varphi \in E$ *et pour tout* $s \in \mathbb{R}$*, nous avons*

$$(T(t+t')\varphi)(s) = \varphi(t+t'+s) = (T(t)\varphi)(t'+s) = T(t)(\varphi(t'+s)) = T(t)(T(t')\varphi)(s),$$

il s'ensuit que $T(t+t')\varphi = T(t)T(t')\varphi$*, i.e.,* $T(t+t') = T(t)T(t')$*.*

Maintenant, pour montrer que notre semi-groupe n'est pas uniformément continu, considérons pour tout $t > 0$*, la fonction* $\varphi_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi_t(s) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{[0,t]}(s) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}} & si \ s \in [0,t] \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Nous avons

$$\|\varphi_t\|_E = \Big(\int_{\mathbb{R}} |\varphi_t(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_0^t (t^{-\frac{1}{p}})^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} = t\frac{1}{t} = 1, \tag{3.1.2}$$

i.e., $\varphi_t \in \overline{B}_E$*. D'autre part,*

$$\begin{aligned}\|T(t)\varphi_t - \varphi_t\|_E &= \Big(\int_{\mathbb{R}} |T(t)\varphi_t(s) - \varphi_t(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_t(t+s) - \varphi_t(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int_{-t}^{0} |\varphi_t(t+s)|^p ds + \int_0^t |\varphi_t(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Les relations (3.1.2) *et* (3.1.3) *impliquent que*

$$\sup_{\varphi\in\overline{B}_E} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E \geq \|T(t)\varphi_t - \varphi_t\|_E = 2^{\frac{1}{p}},$$

par conséquent,

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} = \lim_{t\downarrow 0} \sup_{\varphi\in\overline{B}_E} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E \geq 2^{\frac{1}{p}},$$

i.e., $\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} \neq 0$*, et ceci montre que le semi-groupe* $\{T(t):\ t \geq 0\}$ *n'est pas uniformément continu.*

Proposition 3.1.1. *Si* $\{T(t):\ t\geq 0\}$ *est un semi-groupe uniformément continu, alors pour tout* $t \geq 0$*, l'opérateur* $T(t)$ *est inversible.*

Preuve.

Comme le semi-groupe $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est uniformément continu alors,

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} = \lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - T(0)\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \in [0, \delta],\ \|T(t) - T(0)\|_{\mathcal{L}} < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$, $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} < 1$. Par la Remarque 2.4.1, on conclut que $T(t)$ est inversible pour tout $t \in [0, \delta]$. Soit maintenant $t > \delta$, on peut toujours trouver $t_1 \in [0, \delta[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $t = n\delta + t_1$, on aura alors

$$T(t) = T(n\delta + t_1) = T(n\delta)T(t_1) = (T(\delta))^n T(t_1),$$

et comme $T(\delta)$ et $T(t_1)$ sont inversibles, on conclut que $T(t)$ est inversible pour tout $t \in [0, +\infty[$.

$\square$

Remarque 3.1.1. *Si* $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ *est un semi-groupe uniformément continu, alors* $\{(T(t))^{-1} : \ t \geq 0\}$ *l'est aussi.*

En effet, pour tout $t \in I$*, posons* $S(t) = (T(t))^{-1}$*. Clairement,* $S(t) \in \mathcal{L}(E)$*. Montrons que* $\{S(t) : \ t \geq 0\}$ *est un semi groupe. Nous avons,*

$S(0)T(0) = (T(0))^{-1}T(0) = I$*, mais on sait que* $T(0) = I$*, alors* $S(0)I = I$*, i.e.,* $S(0) = I$*.*

Soient $s, t \in [0, +\infty[$*, nous avons*

$$\begin{aligned} T(t+s)S(s+t) = I &\iff (T(t)T(s))S(t+s) = I \\ &\iff S(s+t) = (T(t)T(s))^{-1} = (T(s))^{-1}(T(t))^{-1} = S(s)S(t). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\{S(t) : \ t \geq 0\}$ *est uniformément continu. Comme dans la preuve de la proposition précédente, on sait par la Remarque 2.4.1, que pour tout* $t \in]0, \delta[$*,*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(I - T(t))^n = I + \sum_{n=1}^{\infty}(I - T(t))^n \Longrightarrow S(t) - I = \sum_{n=1}^{\infty}(I - T(t))^n,$$

d'où

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|I - T(t)\|_{\mathcal{L}},$$

et comme $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ *est uniformément continu, on obtient*

$$\lim_{t \downarrow 0} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \downarrow 0} \|I - T(t)\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

On conclut que $\{(T(t))^{-1} : \ t \geq 0\}$ *est uniformément continu.*

Corollaire 3.1.1. *Si* $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ *est un semi-groupe uniformément continu, alors l'opérateur* $T : [0, +\infty[\longrightarrow E$ *est continu.*

Preuve.

Soit $t \in [0, +\infty[$. Montrons que $\lim_{h \to 0} \|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}} = 0$.

Si $h \downarrow 0$, alors

$$\|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}} = \|T(t)T(h) - T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|T(h) - I\|_{\mathcal{L}},$$

donc par la relation (3.1.1), nous obtenons

$$\lim_{h \downarrow 0} \|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}} \lim_{h \downarrow 0} \|T(h) - I\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Si $h \uparrow 0$, nous avons par la Proposition 3.1.1,

$$T(-h)T(t+h) = T(t) \Longrightarrow T(t+h) = (T(-h))^{-1}T(t),$$

d'où

$$\|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}} = \|(T(-h))^{-1}T(t) - T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|(T(-h))^{-1} - I\|_{\mathcal{L}},$$

comme $\{(T(t))^{-1} : \ t \geq 0\}$ est uniformément continu, on obtient

$$\lim_{h \uparrow 0} \|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}} \lim_{h \uparrow 0} \|(T(-h))^{-1} - I\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Par conséquent, T est continu. $\square$

On a vu à l'Exemple 3.1.1 que $\{e^{tB} : \ t \geq 0\}$ est un semi-groupe uniformément continu. La réciproque est la suivante.

Théorème 3.1.2. *Soit $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ un semi-groupe uniformément continu. Alors il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T(t) = e^{tB}$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve.

Comme le semi-groupe $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ est uniformément continu alors,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}} = \lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - T(0)\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall t \in]0, \delta[, \ \|T(t) - T(0)\|_{\mathcal{L}} < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$. Remarquons alors que l'opérateur $\frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)ds$ est inversible. En effet, nous avons

$$\Big\|\frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)ds - I\Big\|_{\mathcal{L}} = \Big\|\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \big(T(s) - T(0)\big)ds\Big\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \|T(s) - T(0)\|_{\mathcal{L}}\, ds < 1,$$

le résultat découle directement de la Remarque 2.4.1. Comme nous avons, pour tous $t \geq 0$

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(t+s)ds = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(t)T(s)ds = \Big(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)ds\Big)T(t),$$

alors

$$T(t) = \Big(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)ds\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(t+s)ds\Big) = \Big(\int_0^\delta T(s)ds\Big)^{-1}\Big(\int_0^\delta T(t+s)ds\Big),$$

par un simple changement de variable on obtient

$$T(t) = \Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}\Big(\int_t^{t+\delta} T(s)ds\Big). \tag{3.1.4}$$

Soit $h > 0$ et $t \geq 0$, en utilisant la relation (3.1.4) et les propriétés du semi-groupe, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{T(t+h)-T(t)}{h} &= T(t)\frac{T(h)-T(0)}{h}\\
&= T(t)\frac{1}{h}\Big[\Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}\Big(\int_h^{h+\delta} T(s)ds\Big) - \Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}\Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)\Big]\\
&= T(t)\frac{1}{h}\Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}\Big[\int_h^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\Big]\\
&= T(t)\frac{1}{h}\Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}\Big[\int_\delta^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds\Big],
\end{aligned}$$

ainsi, sachant que l'opérateur T est continu, par le Lemme 2.7.1, on aura

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(t+h)-T(t)}{h} &= T(t)\Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}\Big[\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_\delta^{h+\delta} T(s)ds - \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^{h} T(s)ds\Big]\\
&= T(t)\Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}[T(\delta)-T(0)],
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$T'(t) = \frac{dT(t)}{dt} = T(t)\Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}[T(\delta)-T(0)].$$

Posons

$$B = \Big(\int_0^{\delta} T(s)ds\Big)^{-1}[T(\delta)-T(0)].$$

Il est clair que $B \in \mathcal{L}(E)$, et par la relation $\frac{dT(t)}{dt} = T(t)B$ et $T(0) = I$, on obtient $T(t) = e^{tB}$. D'où le résultat. De plus, remarquons que dans ce cas nous avons

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{d(e^{tB})}{dt} = Be^{tB} = BT(t),$$

c'est à dire que le semi-groupe uniformément continu $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ satisfait la relation

$$\frac{dT(t)}{dt} = BT(t) = T(t)B, \tag{3.1.5}$$

ce qui montre que l'opérateur $t \mapsto T(t)$ est de classe C^1. $\square$

Définition 3.1.2 (Générateur infinitésimal). *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe* $\{T(t) :\ t \geq 0\}$*, l'opérateur linéaire* $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ *défini par*

$$D(A) = \{x \in E :\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x - x}{t}\ \textit{existe}\},$$

et pour $x \in D(A)$
$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(T(t) - T(0))x}{t}.$$

Remarque 3.1.2. *Si* $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, alors* $D(A)$ *est un sous espace vectoriel de* E *et* A *peut être un opérateur linéaire non borné.*

Exemple 3.1.4. *Considérons le semi-groupe* $\{T(t) :\ t \geq 0\}$*, où pour tout* $t \geq 0$, $T(t) = e^{tB}$, $B \in \mathcal{L}(E)$ *et* $e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k$*, et cherchons son générateur infinitésimal* A*. Soit* $x \in E$*, nous avons*
$$\begin{aligned} \frac{T(t)x - x}{t} &= \frac{e^{tB}x - x}{t} = \frac{1}{t}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k x - x\Big) = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} B^k x \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} B^k x + Bx, \end{aligned}$$

par suite
$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = Bx,$$

donc cette limite existe pour tout $x \in E$*, i.e.,* $D(A) = E$ *et*
$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = Bx \ \ \forall x \in E,$$

c'est à dire le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{e^{tB} :\ t \geq 0\}$ *est égal à* B*.*

Exemple 3.1.5. *Considérons dans cet exemple*
$$E = \{f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} :\ f \text{ uniformément continue et bornée}\},$$

muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_C = sup_{x \in \mathbb{R}_+}|f(x)|$*. Prenons le semi-groupe de l'Exemple 3.1.3, et essayons de chercher son générateur infinitésimal* A*. On doit déterminer les fonctions* $\varphi \in E$*, pour lesquelles* $\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t}$ *existe dans* E*. Nous avons pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$
$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)\varphi(x) - \varphi(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\varphi(t + x) - \varphi(x)}{t},$$

et donc cette limite existe si φ *est dérivable, dans ce cas on aura*
$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)\varphi(x) - \varphi(x)}{t} = \varphi'(x).$$

Par suite, une condition nécessaire pour que $\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)\varphi-\varphi}{t}$ *existe dans* E*, est que* φ' *existe et appartient à* E*. Par conséquent*

$$D(A)\subset\{\varphi\in E:\ \varphi' \text{ existe et } \varphi'\in E\}. \tag{3.1.6}$$

Montrons que cette condition est suffisante, c'est à dire montrons l'inclusion inverse dans (3.1.6)*. Soit* $\varphi\in E$ *tel que* φ' *existe et* $\varphi'\in E$*, et donc* φ' *est uniformément continue, ce qui équivaut à*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,s\in\mathbb{R}_+,\ |s-x|\le\delta\Rightarrow|\varphi'(s)-\varphi'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1.7}$$

Donc, pout tout $t\in[0,\delta[$*, et pour tout* $x\in\mathbb{R}_+$*, si* $s\in[x,x+t]$ *ceci implique que* $|s-x|\le t<\delta$*, et par la relation* (3.1.7)*, on obtient* $|\varphi'(s)-\varphi'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$*, et donc*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\ \sup_{s\in[x,x+t]}|\varphi'(s)-\varphi'(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Ceci se traduit par

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall t\in[0,\delta[,\ \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\ \sup_{s\in[x,x+t]}|\varphi'(s)-\varphi'(x)|\le\varepsilon,$$

i.e.,

$$\lim_{t\downarrow 0}\ \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\ \sup_{s\in[x,x+t]}|\varphi'(s)-\varphi'(x)|=0. \tag{3.1.8}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t)\varphi-\varphi}{t}-\varphi'\right\|_C &= \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\frac{T(t)\varphi(x)-\varphi(x)}{t}-\varphi'(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t}-\varphi'(x)\right|\\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\frac{1}{t}\int_x^{x+t}\varphi'(s)ds-\varphi'(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\frac{1}{t}\int_x^{x+t}(\varphi'(s)-\varphi'(x))ds\right|\\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\frac{1}{t}\sup_{s\in[x,x+t]}|\varphi'(s)-\varphi'(x)|\int_x^{x+t}ds = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\ \sup_{s\in[x,x+t]}|\varphi'(s)-\varphi'(x)|.
\end{aligned}$$

Par la relation (3.1.8)*, nous obtenons*

$$\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{T(t)\varphi-\varphi}{t}-\varphi'\right\|_C\le\lim_{t\downarrow 0}\ \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\ \sup_{s\in[x,x+t]}|\varphi'(s)-\varphi'(x)|=0,$$

et $\varphi\in D(A)$*. Par conséquent*

$$D(A)=\{\varphi\in E:\ \varphi' \text{ existe et } \varphi'\in E\},$$

et pour tout $\varphi\in D(A)$

$$A\varphi=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)\varphi-\varphi}{t}=\varphi'.$$

Théorème 3.1.3. *Un opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si $D(A) = E$ et $A \in \mathcal{L}(E)$.*

Preuve.

Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t) : \ t \geq 0\}$. Comme dans la preuve du Théorème 3.1.2, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'opérateur $\int_0^\delta T(s)ds$ est inversible. Soit $t > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(T(t) - I)\int_0^\delta T(s)ds &= \frac{1}{t}\int_0^\delta (T(t) - I)T(s)ds = \frac{1}{t}\int_0^\delta (T(t)T(s) - T(s))ds \\ &= \frac{1}{t}\int_0^\delta T(t+s)ds - \frac{1}{t}\int_0^\delta T(s)ds, \end{aligned}$$

par un changement de variable dans la première intégrale du côté droit, on obtient

$$\frac{1}{t}(T(t) - I)\int_0^\delta T(s)ds = \frac{1}{t}\Big(\int_t^{t+\delta} T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds\Big).$$

par suite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(T(t) - I) &= \frac{1}{t}\Big(\int_t^{t+\delta} T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds\Big)\Big(\int_0^\delta T(s)ds\Big)^{-1} \\ &= \frac{1}{t}\Big(\int_\delta^{t+\delta} T(s)ds - \int_0^t T(s)ds\Big)\Big(\int_0^\delta T(s)ds\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.7.1, il s'ensuit que

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(T(t) - I) = \Big(T(\delta) - T(0)\Big)\Big(\int_0^\delta T(s)ds\Big)^{-1},$$

ceci implique que pour tout $x \in E$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \Big(T(\delta) - T(0)\Big)\Big(\int_0^\delta T(s)ds\Big)^{-1}(x),$$

c'est à dire que cette limite existe pour tout $x \in E$, et donc $D(A) = E$ et

$$A = \Big(T(\delta) - T(0)\Big)\Big(\int_0^\delta T(s)ds\Big)^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

Pour l'implication inverse, considérons un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ et $D(A) = E$, et montrons qu'il est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.

Posons pour tout $t \geq 0$

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k A^k}{k!}.$$

Par l'Exemple 3.1.2, on sait que $\{T(t) : \ t \geq 0\}$ est un semi-groupe uniformément continu, et par l'exemple 3.1.4, son générateur infinitésimal est égal à A. D'où le résultat. $\square$

Remarque 3.1.3. *Par la preuve du théorème précédent, on voit bien que si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, alors*

$$\lim_{t\downarrow 0}\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\|_{\mathcal{L}}=0.$$

3.2 Semi-groupes fortement continus (C_0-semi-groupes)

Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ un espace de Banach.

Définition 3.2.1. *Un semi-groupe $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est dit fortement continu ou C_0-semi-groupe si pour tout $x\in E$, $\lim_{t\downarrow 0}T(t)x=x$, i.e.,*

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)x-x\|_E=0.$$

Remarque 3.2.1. *Tout semi-groupe uniformément continu est un C_0-semi-groupe mais l'inverse est faux.*

En effet, supposons que le semi-groupe $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est uniformément continu, alors

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}}=0\Longleftrightarrow\lim_{t\downarrow 0}\sup_{y\in\overline{B}_E}\|T(t)y-y\|_E=0,$$

c'est à dire

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)y-y\|_E=0\ \ \forall y\in\overline{B}_E.$$

Soit $x\in E\setminus\{0\}$, et soit $y=\frac{x}{\|x\|}\in\overline{B}_E$, donc $\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)y-y\|_E=0$, i.e.,

$$\lim_{t\downarrow 0}\left\|T(t)\frac{x}{\|x\|}-\frac{x}{\|x\|}\right\|_E=0\Longleftrightarrow\frac{1}{\|x\|}\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)x-x\|_E=0\Longleftrightarrow\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)x-x\|_E=0,$$

ce qui montre que $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est un C_0-semi-groupe.
Pour voir que l'inverse n'est pas vrai, reprenons l'Exemple 3.1.3. On a vu que le semi-groupe $\{T(t):\ t\geq 0\}$ n'est pas uniformément continu. Montrons par contre qu'il est fortement continu. Soit $\varphi\in E=L^p(\mathbb{R})$, $p\in[1,+\infty[$. Nous avons

$$\|T(t)\varphi-\varphi\|_E^p=\|T(t)\varphi-\varphi\|_p^p=\int_{\mathbb{R}}\left|T(t)\varphi(s)-\varphi(s)\right|^p ds=\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi(t+s)-\varphi(s)\right|^p ds,$$

et donc par le Théorème 2.8.3,

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E = 0,$$

c'est à dire $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ *est un* C_0*-semi-groupe.*

Une caractérisation des C_0*-semi-groupes est la suivante.*

Théorème 3.2.1. *Soit* $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ *un* C_0*-semi-groupe. Alors il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0. \tag{3.2.1}$$

Preuve.

On commence par montrer l'existence de $\delta > 0$ et $M \geq 1$ tel que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq M \quad \forall t \in [0, \delta]. \tag{3.2.2}$$

Supposons le contraire, i.e., supposons l'existence d'un C_0-semi-groupe $\{S(t) :\ t \geq 0\}$ tel que pour tout $\delta > 0$ et $M \geq 1$, il existe $\bar{t} \in [0, \delta]$ tel que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}} > M$. En particulier pour $\delta = \frac{1}{n}$ et $M = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tel que

$$\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}} > n. \tag{3.2.3}$$

D'autre part, comme $\{S(t) :\ t \geq 0\}$ est un C_0-semi-groupe, nous avons pour tout $x \in E$, $\lim_{n\to\infty} S(t_n)x = x$, et donc l'ensemble $\{S(t_n)x :\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est borné. Par le théorème de Banach Steinhaus, il s'ensuit que l'ensemble $\{S(t_n) :\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est aussi borné, ce qui est en contradiction avec (3.2.3). D'où, l'existence de de $\delta > 0$ et $M \geq 1$ tel que (3.2.2) est vérifiée. Soit maintenant $t \in [0, +\infty[$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $t' \in [0, \delta[$ tel que $t = n\delta + t'$, et donc

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} = \|T(n\delta)T(t')\|_{\mathcal{L}} = \|(T(\delta))^n T(t')\|_{\mathcal{L}} \leq \|T(\delta)\|_{\mathcal{L}}^n \|T(t')\|_{\mathcal{L}} \leq M^n M,$$

mais comme $n = \frac{t-t'}{\delta} \leq \frac{t}{\delta}$, nous obtenons

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq MM^{\frac{t}{\delta}} = Me^{\ln M^{\frac{t}{\delta}}} = Me^{t\frac{\ln M}{\delta}} = Me^{\omega t},$$

avec $\omega = \frac{\ln M}{\delta} \geq 0$. Ainsi nous avons démontré la relation (3.2.1). $\square$

Remarque 3.2.2. *1) On dit que* $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ *est un* C_0*-semi-groupe de type* (M, ω).

2) Si $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ *est uniformément continu et* A *est son générateur infinitésimal, on sait que pour tout* $t \geq 0$, $T(t) = e^{tA}$, *alors la relation* (3.2.1) *est vérifiée pour* $M = 1$ *et* $\omega = \|A\|_{\mathcal{L}}$, *c'est à dire que le semi-groupe uniformément continu est de type* $(1, \|A\|_{\mathcal{L}})$.

Définition 3.2.2. *On dit que le* C_0*-semi-groupe* $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ *est un semi-groupe de contractions s'il est de type* $(1, 0)$, *i.e.,*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Corollaire 3.2.1. *Soit* $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ *un* C_0*-semi-groupe de type* (M, ω). *Alors l'application* $(t, x) \longmapsto T(t)x$ *définie de* $[0, +\infty[\times E$ *à valeurs dans* E, *est continue.*

Preuve.

Soit $(t_0, x_0) \in [0, +\infty[\times E$. Pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times E$, nous avons :

Si $t > t_0$

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - T(t_0)x_0\|_E &\leq \|T(t)x - T(t)x_0\|_E + \|T(t)x_0 - T(t_0)x_0\|_E \\
&= \|T(t)(x - x_0)\|_E + \|T(t)x_0 - T(t_0)x_0\|_E \\
&\leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|x - x_0\|_E + \|T(t)x_0 - T(t_0)x_0\|_E \\
&= \|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|x - x_0\|_E + \|T(t_0)T(t - t_0)x_0 - T(t_0)x_0\|_E \\
&\leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|x - x_0\|_E + \|T(t_0)\|_{\mathcal{L}}\|T(t - t_0)x_0 - x_0\|_E,
\end{aligned}$$

Par la relation (3.2.1), nous obtenons

$$\|T(t)x - T(t_0)x_0\|_E \leq Me^{t\omega}\|x - x_0\|_E + Me^{t_0\omega}\|T(t - t_0)x_0 - x_0\|_E,$$

comme $\{T(t) :\ t \geq 0\}$ est un C_0-semi-groupe, nous avons

$$\lim_{t \downarrow t_0} \|T(t - t_0)x_0 - x_0\|_E = 0,$$

par conséquent

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,x_0)} \|T(t)x - T(t_0)x_0\|_E \leq \lim_{(t,x)\to(t_0,x_0)} Me^{t\omega}\|x - x_0\|_E + Me^{t_0\omega} \lim_{t\downarrow t_0} \|T(t - t_0)x_0 - x_0\|_E = 0.$$

Si $t < t_0$

$$\begin{aligned}\|T(t)x - T(t_0)x_0\|_E &\leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|x - x_0\|_E + \|T(t)x_0 - T(t)T(t_0 - t)x_0\|_E \\ &\leq \|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|x - x_0\|_E + \|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|T(t_0 - t)x_0 - x_0\|_E \\ &\leq Me^{t\omega}\big(\|x - x_0\|_E + \|T(t_0 - t)x_0 - x_0\|_E\big),\end{aligned}$$

par la même manière nous obtenons

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,x_0)} \|T(t)x - T(t_0)x_0\|_E = 0,$$

d'où le résultat. $\square$

Dans la suite, nous allons donné quelques propriétés des C_0-semi-groupes.

Théorème 3.2.2. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t) : \ t \geq 0\}$. Alors*

1) pour tout $x \in E$ et pour tout $t \geq 0$

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x.$$

2) Pour tout $x \in E$ et pour tout $t > 0$, nous avons

$$\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A) \quad et \quad A\Big(\int_0^t T(s)x\, ds\Big) = T(t)x - x.$$

3) Pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$, nous avons $T(t)x \in D(A)$. De plus, la fonction $t \longmapsto T(t)x$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4) Pour tout $x \in D(A)$ et tous $s, t \in [0, +\infty[$ $(s \leq t)$,

$$\int_s^t AT(\tau)x\, d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

Preuve.

1) est conséquence immédiate du Corollaire 3.2.1 et Lemme 2.7.1.

2) Soient $x \in E$, $t > 0$ et $h > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{T(h) - I}{h}\Big(\int_0^t T(s)x\, ds\Big) &= \frac{1}{h}T(h)\int_0^t T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\, ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\, ds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\, ds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\, ds,\end{aligned}$$

et donc, utilisant la relation 1), nous obtenons

$$\begin{aligned} A\Big(\int_0^t T(s)x\,ds\Big) &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)-I}{h}\Big(\int_0^t T(s)x\,ds\Big)\\ &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds\\ &= T(t)x - T(0)x = T(t)x - x. \end{aligned}$$

3) Soit $x \in D(A)$ et $t \geq 0$. Pour montrer que $T(t)x \in D(A)$, on doit montrer que

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \quad \text{existe.}$$

Nous avons

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = T(t)\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax,$$

et cette limite existe car $x \in D(A)$. Montrons maintenant que la fonction $t \longmapsto T(t)x$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. En effet, nous avons montré que

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

c'est à dire

$$\frac{d^+}{dt}(T(t)x) = T(t)Ax = AT(t)x.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{h\uparrow 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} &= \lim_{h\uparrow 0}\frac{T(t+h)x - T(t+h)T(-h)x}{h}\\ &= \lim_{h\uparrow 0}T(t+h)\frac{(x - T(-h)x)}{h} = \lim_{h\uparrow 0}T(t+h)\frac{(T(-h)x - x)}{-h}, \end{aligned}$$

par le Corollaire 3.2.1, il s'ensuit

$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

c'est à dire

$$\frac{d^-}{dt}(T(t)x) = T(t)Ax = AT(t)x.$$

On conclut que la fonction $t \longmapsto T(t)x$ et de classe C^1 et

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = T(t)Ax = AT(t)x.$$

4) Soit $x \in D(A)$ et $s, t \in [0, +\infty[$ $(s \leq t)$. Nous avons

$$\int_s^t AT(\tau)x\,d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau = \int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x\,d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

□

Deux propriétés importantes du générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe est la densité de son domaine et la fermeture de son graphe.

Théorème 3.2.3. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t) :\ t \geq 0\}$. Alors $D(A)$ est dense dans E et A est fermé.*

Preuve.

Montrons dans un premier temps que $\overline{D(A)} = E$, i.e.,

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, y_\varepsilon \in D(A) \text{ tel que } \|x - y_\varepsilon\|_E < \varepsilon. \tag{3.2.4}$$

Soit alors $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, par le théorème précédent, on sait que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(s)x\,ds \in D(A) \ \text{ et } \ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(s)x\,ds = T(0)x = x.$$

En posant $y_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon T(s)x\,ds$, nous retrouvons la relation (3.2.4), et donc $\overline{D(A)} = E$.
Montrons maintenant que A est fermé. Soit (x_n, y_n) une suite du graphe de A, c'est à dire $(x_n) \subset D(A)$ et $y_n = Ax_n$, tel que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. On doit montrer que (x, y) est dans le graphe de A. Nous avons par 4) du Théorème 3.2.2,

$$\int_0^t T(s)Ax_n\,ds = T(t)x_n - x_n,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}(T(t)x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,ds,$$

or, on sait par le Théorème 3.2.1 que pour tout $s \in [0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T(s)Ax_n\|_E \leq \|T(s)\|_{\mathcal{L}}\|Ax_n\|_E \leq Me^{ws}\|Ax_n\|_E,$$

et comme (Ax_n) est une suite convergente donc $(\|Ax_n\|_E)$ est bornée. Par suite, on peut untiliser le théorème de la convergence domminée de Lebesgue, pour conclure que

$$\lim_{n\to\infty}(T(t)x_n - x_n) = \int_0^t \lim_{n\to\infty} T(s)Ax_n\,ds = \int_0^t T(s)y\,ds,$$

i.e.,

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\,ds,$$

nous obtenons alors

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds=T(0)y=y.$$

Ceci montre que $x\in D(A)$ et $Ax=y$, d'où le résultat. □

Théorème 3.2.4. *Si $A: D(A)\subset E\longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal de deux C_0-semi-groupes $\{T(t):\ t\geq 0\}$ et $\{S(t):\ t\geq 0\}$, alors $T(t)=S(t)$ pour tout $t\geq 0$.*

Preuve.

Soient $x\in D(A)$, $t>0$ et soit $f:[0,t]\longrightarrow E$ la fonction définie par

$$f(s)=S(t-s)T(s)x\quad\forall s\in[0,t].$$

Par 3) du Théorème 3.2.2, la fonction f est différentiable et

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \frac{d}{ds}\big(S(t-s)T(s)x\big)=-\frac{d}{ds}(S(t-s)(T(s)x)+S(t-s)\frac{d}{ds}T(s)x\\
&= -A(S(t-s)T(s)x)+S(t-s)AT(s)x\\
&= -(S(t-s)AT(s)x)+S(t-s)AT(s)x=0,
\end{aligned}$$

ceci implique que f est constante sur $[0,t]$, et donc $f(0)=f(t)$, i.e., $S(t)x=T(t)x$ pour tout $x\in D(A)$ et pour tout $t\geq 0$. Mais pour avoir l'égalité des deux semi-grroupes, cette relation doit être vérifiée pour tout $x\in E$. En effet, par le théorème précédent, on sait que $\overline{D(A)}=E$. On aura alors, pour tout $x\in E$, il existe une suite $(x_n)\subset D(A)$ tel que $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. Alors $S(t)x_n=T(t)x_n$, et donc $\lim_{n\to\infty}S(t)x_n=\lim_{n\to\infty}T(t)x_n$, i.e., $S(t)x=T(t)x$ pour tout $x\in E$. On conclut que $S(t)=T(t)$ pour tout $t\in[0,+\infty[$. □

3.3 Théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida est connu comme le plus important résultat dans la théorie des C_0-semi-groupes, il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire engendre un C_0-semi-groupe de contractions.

Rappelons que pour un opérateur linéaire $A: D(A)\subset E\longrightarrow E$, on note par $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de A et par R_A sa résolvante, i.e., pour $\lambda\in\rho(A)$, $R_A(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$.

Théorème 3.3.1 (Hille-Yosida). *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions si et seulement si*

(i) $\overline{D(A)} = E$ *et* A *est fermé.*

(ii) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > 0$

$$\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Preuve.

1) Condition nécessaire. On suppose que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions, et on montre qu'il vérife (i) et (ii). Par le Théorème 3.2.3, on sait que $\overline{D(A)} = E$ et A est fermé. Donc, il nous reste à montrer (ii). Soit $\lambda > 0$ et soit $x \in E$. Posons

$$J(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt, \tag{3.3.1}$$

en fait, J est la transformée de Laplace de la fonction T. Vérifions tout d'abord que $J(\lambda)$ est bien définie, c'est à dire que l'intégrale dans la relation (3.3.1) est convergente. Soient $a, b \in [0, +\infty[$ $(a \leq b)$, comme notre semi-groupe est de contractions, nous avons

$$\begin{aligned} \Big\| \int_a^b e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \Big\|_E &\leq \int_a^b e^{-\lambda t} \|T(t)\|_{\mathcal{L}} \|x\|_E\, dt \leq \int_a^b e^{-\lambda t} \|x\|_E\, dt \\ &= \|x\|_E \int_a^b e^{-\lambda t} dt = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda} \|x\|_E, \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{a \to 0,\, b \to \infty} \Big\| \int_a^b e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \Big\|_E \leq \frac{\|x\|_E}{\lambda}.$$

Par conséquent, $J(\lambda)$ est bien définie. D'autre part, il est clair que $J(\lambda) \in \mathcal{L}(E)$ car $T(t) \in \mathcal{L}(E)$. De plus, comme $\|J(\lambda)x\|_E \leq \frac{\|x\|_E}{\lambda}$, il s'ensuit que $\|J(\lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda}$.

Dans la suite on va montrer que $J(\lambda) = R_A(\lambda)$. En effet, soit $h > 0$ et soit $x \in E$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I)J(\lambda)x &= \frac{1}{h} T(h) J(\lambda)x - \frac{1}{h} J(\lambda)x \\ &= \frac{1}{h} T(h) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x\, dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\ &= \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \\ &= \frac{1}{h}(e^{\lambda h} - 1) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt - \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_0^{h} e^{-\lambda t} T(t)x\, dt, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(T(h)-I)J(\lambda)x &= \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt - T(0)x\\ &= \lambda J(\lambda)x - x.\end{aligned}$$

Par la définition du générateur infinitésimal, on conclut que

$$J(\lambda)x \in D(A) \quad \text{et} \quad A(J(\lambda)x) = \lambda J(\lambda)x - x = (\lambda J(\lambda) - I)x,$$

i.e., $AJ(\lambda) = \lambda J(\lambda) - I$, ceci implique que

$$(\lambda I - A)J(\lambda) = I. \tag{3.3.2}$$

D'autre part, soit $x \in D(A)$, en utilisant 3) du Théorème 3.2.2 et une intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned}J(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)Ax\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}(T(t)x)\,dt\\ &= \left[e^{-\lambda t}T(t)x\right]_0^{+\infty} + \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\\ &= -x + \lambda J(\lambda)x,\end{aligned}$$

d'où

$$J(\lambda)Ax = \lambda J(\lambda)x - x \Longrightarrow (\lambda J(\lambda) - J(\lambda)A)x = x \Longrightarrow (\lambda J(\lambda) - J(\lambda)A) = I,$$

i.e.,

$$J(\lambda)(\lambda I - A) = I. \tag{3.3.3}$$

Par (3.3.2) et (3.3.3), on conclut que $J(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R_A(\lambda)$, c'est à dire $\lambda \in \rho(A)$ et donc $]0, +\infty[\subset \rho(A)$, de plus $\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda}$.

Condition suffisante. Pour montrer la suffisance, on a besoin de la définition et lemmes suivants.

Définition 3.3.1. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés (i) et (ii) du Théorème 3.3.1. Soit $\lambda > 0$. On appelle l'approximation Yosida de A l'opérateur $A_\lambda : E \longrightarrow E$, défini par*

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda A R_A(\lambda).$$

Lemme 3.3.1. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés (i) et (ii) du Théorème 3.3.1. Alors*

1⌋ $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R_A(\lambda)x = x$, *pour tout* $x \in E$.

2⌋ $A_\lambda x = \lambda^2 R_A(\lambda)x - \lambda x$, *pour tout* $x \in E$.

3⌋ $\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda x = Ax$, *pour tout* $x \in D(A)$.

Preuve.

1⌋ Soit $x \in D(A)$ et $\lambda > 0$. Montrons que $\lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x + (\lambda I - A)^{-1}Ax$. En effet, posons $y = (\lambda I - A)^{-1}x$, et donc $x = (\lambda I - A)y = \lambda y - Ay$. D'où,

$$\begin{aligned} x + (\lambda I - A)^{-1}Ax &= \lambda y - Ay + (\lambda I - A)^{-1}A(\lambda y - Ay) \\ &= \lambda y - Ay + (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)Ay \\ &= \lambda y - Ay + Ay = \lambda y = \lambda(\lambda I - A)^{-1}x, \end{aligned}$$

d'où l'égalité cherchée. Par suite,

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x\|_E = \|(\lambda I - A)^{-1}Ax\|_E \leq \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}}\|Ax\|_E \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|_E,$$

et donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x\|_E = 0$, i.e., $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda R_A(\lambda)x = x$.
Soit maintenant $x \in E$. Par la densité de $D(A)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in D(A)$ tel que $\|x - y_\varepsilon\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \|\lambda R_A(\lambda)x - x\|_E &\leq \|\lambda R_A(\lambda)x - \lambda R_A(\lambda)y_\varepsilon\|_E + \|\lambda R_A(\lambda)y_\varepsilon - y_\varepsilon\|_E + \|x - y_\varepsilon\|_E \\ &\leq \lambda\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}}\|x - y_\varepsilon\|_E + \|x - y_\varepsilon\|_E + \|\lambda R_A(\lambda)y_\varepsilon - y_\varepsilon\|_E \\ &< \lambda\frac{1}{\lambda}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \|\lambda R_A(\lambda)y_\varepsilon - y_\varepsilon\|_E = \|\lambda R_A(\lambda)y_\varepsilon - y_\varepsilon\|_E + \varepsilon, \end{aligned}$$

comme $y_\varepsilon \in D(A)$, alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R_A(\lambda)y_\varepsilon - y_\varepsilon\|_E = 0$, il s'ensuit que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R_A(\lambda)x - x\|_E < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, i.e., $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R_A(\lambda)x - x\|_E = 0$.
2⌋ Soit $x \in E$ et $\lambda > 0$. Nous avons par définition, $A_\lambda x = \lambda A(\lambda I - A)^{-1}x$. Posons $y = (\lambda I - A)^{-1}x$, i.e., $x = \lambda y - Ay$ et donc $Ay = \lambda y - x$, on obtient alors

$$A_\lambda x = \lambda Ay = \lambda(\lambda y - x) = \lambda^2 y - \lambda x = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1}x - \lambda x.$$

D'où le résultat.

3⌋ Soit $x \in D(A)$ et $\lambda > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x - Ax\|_E &= \|\lambda A R_A(\lambda)x - Ax\|_E = \|A\lambda R_A(\lambda)x - Ax\|_E \\ &= \|A(\lambda R_A(\lambda)x - x)\|_E \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \|\lambda R_A(\lambda)x - x\|_E, \end{aligned}$$

il s'ensuit par 1⌋,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|A_\lambda x - Ax\|_E \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \lim_{\lambda \to +\infty} \|\lambda R_A(\lambda)x - x\|_E = 0,$$

et donc $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax$. Ceci termine la preuve du Lemme. □

Lemme 3.3.2. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire satisfaisant (i) et (ii) du Théorème 3.3.1. Alors pour tout $\lambda > 0$, A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\lambda} :\ t \geq 0\right\}$, satisfaisant*

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}} \leq 1 \quad \forall t \geq 0,$$

de plus, pour tout $x \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$, nous avons

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_E \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_E.$$

Preuve.

On sait que $A_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ et $D(A_\lambda) = E$, donc par le Théorème 3.1.3, A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\lambda} :\ t \geq 0\right\}$. D'autre part, utilisant 2⌋ du Lemme 3.3.1, nous avons

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}\right\|_{\mathcal{L}} &= \left\|e^{t\lambda^2 R_A(\lambda) - t\lambda I}\right\|_{\mathcal{L}} \leq \left\|e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)}\right\|_{\mathcal{L}} \left\|e^{-t\lambda I}\right\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq e^{t\lambda^2 \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}}}\, e^{-\lambda t} \leq e^{t\lambda^2 \frac{1}{\lambda}}\, e^{-\lambda t} = 1, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}} \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Soit $x \in E$ et soient $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$, par un calcul simple, et utilisant cette dernière estimation, nous avons

$$\begin{aligned}
\Big\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \Big\|_E &= \Big\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\big(e^{stA_\lambda} \big(e^{(1-s)tA_\mu} x \big) \big) ds \Big\|_E \\
&= \Big\| \int_0^1 \Big(tA_\lambda e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x - tA_\mu e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x \Big) ds \Big\|_E \\
&\leq \int_0^1 \Big\| tA_\lambda e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x - tA_\mu e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} x \Big\|_E ds \\
&= t \int_0^1 \Big\| e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x) \Big\|_E ds \\
&\leq t \Big\| A_\lambda x - A_\mu x \Big\|_E .
\end{aligned}$$

D'où,

$$\Big\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \Big\|_E \leq t \Big\| A_\lambda x - A_\mu x \Big\|_E .$$

□

On revient maintenant à la preuve de la condition suffisante de notre théorème, c'est à dire on suppose que A vérifie les hypothèses (i) et (ii) et on montre qu'il est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe. Par le Lemme 3.3.3, on sait que pour tout $x \in D(A)$ et $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$, nous avons

$$\Big\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \Big\|_E \leq t \Big\| A_\lambda x - A_\mu x \Big\|_E \leq t \Big\| A_\lambda x - Ax \Big\|_E + t \Big\| A_\mu x - Ax \Big\|_E ,$$

et comme $\lim\limits_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax$, nous obtenons

$$\lim_{\lambda, \mu \to \infty} \Big\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \Big\|_E = 0,$$

ceci implique que la suite $(e^{tA_\lambda} x)_\lambda$ est une suite de Cauchy dans E, et donc elle converge dans E, i.e., il existe un opérateur linéaire continu $T(t) : D(A) \longrightarrow E$ tel que pour tout $x \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x = T(t)x,$$

et cette convergence est uniforme sur les sous ensembles compacts de $[0, +\infty[$. De plus, toujours par le Lemme 3.3.3, nous avons

$$\|T(t)x\|_E \leq \lim_{\lambda \to \infty} \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}} \|x\|_E \leq \|x\|_E ,$$

i.e.,

$$\|T(t)x\|_E \leq \|x\|_E \quad \forall x \in D(A).$$

Remarquons aussi que pour tous $s, t \in [0, +\infty[$ et tout $x \in D(A)$

$$T(0)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^0 x = x, \tag{3.3.4}$$

et

$$\begin{aligned} T(t)T(s)x &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}(T(s)x) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}(\lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}x) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}(e^{tA_\lambda}x) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = T(t+s)x. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Par la densité de $D(A)$ dans E, on peut prolonger l'opérateur $T(t)$ à E tout entier. En effet, on considère l'opérateur $S(t) : E \longrightarrow E$ défini comme suit :
Si $x \in D(A)$, $S(t)x = T(t)x$.
Si $x \in E \setminus D(A)$, on utilise le fait que $\overline{D(A)} = E$, donc il existe une suite $(x_n) \subset D(A)$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Alors, on prend $S(t)x = \lim_{n\to\infty} T(t)x_n$. Il est clair que $S(t) \in \mathcal{L}(E)$. De plus, par les relations (3.3.4) et (3.3.5), il est clair que $S(0)x = x$ pour tout $x \in E$, c'est à dire $S(0) = I$, et pour $s, t \in [0, +\infty[$, $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ pour tout $x \in E$, c'est à dire $S(t+s) = S(t)S(s)$. On conclut alors que $\big\{S(t) :\ t \geq 0\big\}$ est un semi-groupe. D'autre part, si $x \in D(A)$

$$\|S(t)x\|_E = \|T(t)x\|_E \leq \|x\|_E.$$

Si $x \notin D(A)$

$$\begin{aligned} \|S(t)x\|_E &= \|\lim_{n\to\infty} T(t)x_n\|_E = \lim_{n\to\infty} \|T(t)x_n\|_E \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\|x_n - x\|_E + \|x\|_E) = \|x\|_E, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\|S(t)x\|_E \leq \|x\|_E \quad \forall x \in E,$$

ceci clairement montre que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}} \leq 1.$$

De plus, si $x \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x = S(t)x.$$

Si $x \notin D(A)$, alors $S(t)x = \lim_{n\to\infty} T(t)x_n$ avec $(x_n) \subset D(A)$ et $x_n \to x$. D'où

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\|_E &\leq \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_n\|_E + \|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\|_E + \|S(t)x_n - S(t)x\|_E \\
&\leq \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}}\|x_n - x\|_E + \|e^{tA_\lambda}x_n - T(t)x_n\|_E + \|S(t)\|_{\mathcal{L}}\|x_n - x\|_E \\
&\leq 2\|x_n - x\|_E + \|e^{tA_\lambda}x_n - T(t)x_n\|_E.
\end{aligned}$$

Or,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\|_E < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour $n \geq n_0$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\|_E < \varepsilon + \lim_{\lambda\to\infty} \|e^{tA_\lambda}x_n - T(t)x_n\|_E = \varepsilon.$$

On conclut que $\lim_{\lambda\to\infty} \|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\|_E = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = S(t)x \quad \forall x \in E. \tag{3.3.6}$$

On montre dans la suite que $\{S(t) :\ t \geq 0\}$ est un C_0-semi-groupe. Soit $t \geq 0$ et soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - x\|_E &\leq \|S(t)x - e^{tA_\lambda}x\|_E + \|e^{tA_\lambda}x - x\|_E \\
&\leq \|S(t)x - e^{tA_\lambda}x\|_E + \|e^{tA_\lambda} - I\|_{\mathcal{L}}\|x\|_E,
\end{aligned}$$

comme, par (3.3.6), $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = S(t)x$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \lambda_0 > 0,\ \forall \lambda > 0,\ \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \|S(t)x - e^{tA_\lambda}x\|_E < \varepsilon,$$

d'autre part, comme $\{e^{tA_\lambda} :\ t \geq 0\}$ est un semi-groupe uniformément continu, alors

$$\lim_{t\downarrow 0} \|e^{tA_\lambda} - I\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

Par conséquent, pour $\lambda \geq \lambda_0$

$$\lim_{t\downarrow 0} \|S(t)x - x\|_E < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

c'est à dire

$$\lim_{t\downarrow 0} \|S(t)x - x\|_E = 0.$$

Ceci montre que $\{S(t):\ t\geq 0\}$ est un C_0-semi-groupe.

En fin, il nous reste à montrer que son générateur infinitésimal est égal à A.

Soit $B : D(B)\subset E\longrightarrow E$ le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{S(t):\ \ t\geq 0\}$. Nous allons montrer que $A=B$. Soit $x\in D(A)$ et $t>0$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}A_\lambda x-S(t)Ax\|_E &\leq \|e^{tA_\lambda}A_\lambda x-e^{tA_\lambda}Ax\|_E+\|e^{tA_\lambda}Ax-S(t)Ax\|_E\\ &\leq \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}}\|A_\lambda x-Ax\|+\|e^{tA_\lambda}Ax-S(t)Ax\|_E,\end{aligned}$$

comme $\lim_{\lambda\to\infty}A_\lambda x=Ax$, et par (3.3.6), $\lim_{\lambda\to\infty}e^{tA_\lambda}Ax=S(t)Ax$, on obtient

$$\lim_{\lambda\to\infty}e^{tA_\lambda}A_\lambda x=S(t)Ax.$$

D'où,

$$\begin{aligned}S(t)x-x &= \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x-x)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x\,ds\\ &= \int_0^t\lim_{\lambda\to\infty}e^{sA_\lambda}A_\lambda x\,ds=\int_0^t S(s)Ax\,ds,\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)x-x}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)Ax\,ds\\ \Rightarrow\ &Bx=S(0)Ax=Ax\quad\text{et}\quad x\in D(B),\end{aligned}$$

c'est à dire, $Ax=Bx$ et $D(A)\subset D(B)$. Pour conclure, il nous reste à montrer que $D(B)\subset D(A)$. Comme B est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions, par la condition nécessaire du Théorème de Hille-Yosida, $1\in\rho(B)$, i.e, $(I-B)$ est inversible et $(I-B)^{-1}\in\mathcal{L}(E)$ et nous avons $(I-B)^{-1}(E)=D(B)$. D'autre part, comme $Ax=Bx$ pour tout $x\in D(A)$, on obtient $(I-B)(D(A))=(I-A)(D(A))$, et par (ii), nous avons $(I-A)(D(A))=E$, et donc $(I-B)(D(A))=E$, i.e., $(I-B)^{-1}(E)=D(A)$. Par conséquent, $D(A)=D(B)$, c'est dire $A=B$. Ceci termine la preuve du Théorème de Hille-Yosida. □

Remarque 3.3.1. *En utilisant les mêmes arguments dans la preuve de la condition nécessaire du Théorème de Hille-Yosida, on peut montrer que si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions, alors*

$$D=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \mathcal{R}e(\lambda)>0\}\subset\rho(A),$$

et pour tout $\lambda \in D$,

$$\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\mathcal{R}e(\lambda)},$$

où $\mathcal{R}e(\lambda)$ *est la partie réelle de* λ.

Dans la suite, nous allons donner une généralisation du théorème de Hille-Yosida caractérisant le générateur infinitésimal d'un C_0*-semi-groupe de type* (M, ω). *Nous commençons par le lemme suivant qui va nous être utile dans la preuve du théorème principal.*

Lemme 3.3.3. *Soit* $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ *un opérateur linéaire tel que* $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ *et*

$$\left\|\lambda^n (R_A(\lambda))^n\right\|_{\mathcal{L}} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; \forall \lambda > 0. \tag{3.3.7}$$

Alors il existe une norme $|\cdot|$ *sur* E, *tel que*

$$\|x\|_E \leq |x| \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E, \tag{3.3.8}$$

et

$$\left|\lambda R_A(\lambda)x\right| \leq |x| \quad \forall x \in E, \; \forall \lambda > 0. \tag{3.3.9}$$

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Définissons la fonction

$$\begin{aligned} |\cdot|_\alpha : \quad E &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto |x|_\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|\alpha^n (R_A(\alpha))^n x\right\|_E. \end{aligned}$$

Par (3.3.7), nous avons pour tout $x \in E$,

$$|x|_\alpha \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|\alpha^n (R_A(\alpha))^n\right\|_{\mathcal{L}} \|x\|_E \leq M\|x\|_E,$$

et

$$|x|_\alpha \geq \left\|\alpha^0 (R_A(\alpha))^0 x\right\|_E = \|Ix\|_E = \|x\|_E.$$

D'où,

$$\|x\|_E \leq |x|_\alpha \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E. \tag{3.3.10}$$

D'autre part,

$$\left|\alpha R_A(\alpha)x\right|_\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\alpha^n (R_A(\alpha))^n \alpha R_A(\alpha)x\|_E = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\alpha^{n+1} (R_A(\alpha))^{n+1} x\|_E \leq |x|_\alpha,$$

i.e.,

$$\Big|\alpha R_A(\alpha)x\Big|_\alpha \leq |x|_\alpha. \tag{3.3.11}$$

Montrons dans la suite que

$$\Big|\lambda R_A(\lambda)x\Big|_\alpha \leq |x|_\alpha \quad \forall \lambda \in]0, \alpha]. \tag{3.3.12}$$

Par la Propostion 2.6.1, on sait que

$$R_A(\lambda) - R_A(\alpha) = (\alpha - \lambda)R_A(\alpha)R_A(\lambda) \quad \forall \lambda, \alpha \in \rho(A).$$

Donc pour tout $x \in E$,

$$R_A(\lambda)x = R_A(\alpha)x + (\alpha - \lambda)R_A(\alpha)R_A(\lambda)x = R_A(\alpha)\big(x + (\alpha - \lambda)R_A(\lambda)x\big),$$

et donc

$$\Big|R_A(\lambda)x\Big|_\alpha = \Big|R_A(\alpha)\big(x + (\alpha - \lambda)R_A(\lambda)x\big)\Big|_\alpha,$$

utilisant (3.3.11), nous obtenons

$$\Big|R_A(\lambda)x\Big|_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}\Big|x + (\alpha - \lambda)R_A(\lambda)x\Big|_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}|x|_\alpha + \big(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\big)\Big|R_A(\lambda)x\Big|_\alpha,$$

c'est à dire

$$\frac{\lambda}{\alpha}\Big|R_A(\lambda)x\Big|_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}|x|_\alpha,$$

par conséquent,

$$\Big|\lambda R_A(\lambda)x\Big|_\alpha \leq |x|_\alpha,$$

et donc notre relation (3.3.12) est démontrée.

Maintenant, par les relations (3.3.10) et (3.3.12), nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in]0, \alpha]$

$$\Big\|\lambda^n (R_A(\lambda))^n x\Big\|_E \leq \Big|\lambda^n (R_A(\lambda))^n x\Big|_\alpha \leq \Big|\lambda^{n-1} (R_A(\lambda))^{n-1} x\Big|_\alpha \leq \ldots \leq |x|_\alpha,$$

par suite,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\|\lambda^n (R_A(\lambda))^n x\Big\|_E \leq |x|_\alpha,$$

i.e.,

$$|x|_\lambda \leq |x|_\alpha \quad \forall x \in E,\ \forall \lambda \in]0, \alpha],$$

on conclut que la suite réelle $(|x|_\alpha)_\alpha$ es croissante, et donc elle est convergente. Définissons alors la fonction

$$\begin{aligned} |\cdot|: \quad E &\longrightarrow [0,+\infty[\\ x &\longmapsto |x| = \lim_{\alpha\to+\infty} |x|_\alpha. \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que $|\cdot|$ est une norme sur E. De plus, nous avons par la relation (3.3.10)

$$\|x\|_E \leq \lim_{\alpha\to+\infty} |x|_\alpha \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E,$$

i.e,

$$\|x\|_E \leq |x| \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E,$$

et pour tout $x \in E$ et tout $\lambda > 0$, nous avons par la relation (3.3.12)

$$\Big|\lambda R_A(\lambda)x\Big| = \lim_{\alpha\to\infty} \Big|\lambda R_A(\lambda)x\Big|_\alpha \leq \lim_{\alpha\to\infty} |x|_\alpha = |x|.$$

Le Lemme est donc bien démontré. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et démontrer le théorème principal.

Théorème 3.3.2 (Feller-Miyadera-Phillips). *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire. Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\big\{T(t):\ t \geq 0\big\}$ de type (M,ω), si et seulement si*

(i) A est fermé et $D(A)$ est dense dans E.

(ii) $]\omega,+\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > \omega$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Big\|(R_A(\lambda))^n\Big\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}. \tag{3.3.13}$$

Preuve.

✓ On suppose dans un premier temps que $\omega = 0$.

1) <u>Condition nécessaire</u>. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} |||\cdot|||: \quad E &\longrightarrow [0,+\infty[\\ x &\longmapsto |||x||| = \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\|_E. \end{aligned}$$

Clairement, $|||\cdot|||$ est une norme sur E. D'autre part, comme $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est de type $(M,0)$, alors $\|T(t)\|_{\mathcal{L}}\leq M$ pour tout $t\geq 0$, ceci implique que pour tout $x\in E$,

$$|||x|||\leq \sup_{t\geq 0}\|T(t)\|_{\mathcal{L}}\|x\|_E\leq M\|x\|_E.$$

De l'autre côté,

$$|||x|||\geq \|T(t)x\|_E \quad \forall t\geq 0,$$

en particulier pour $t=0$, on trouve $|||x|||\geq \|x\|_E$, i.e.,

$$\|x\|_E\leq |||x|||\leq M\|x\|_E \quad \forall x\in E, \tag{3.3.14}$$

c'est à dire $\|\cdot\|_E$ et $|||\cdot|||$ sont deux normes équivalentes sur E. De plus, pour tout $t\geq 0$,

$$|||T(t)x|||=\sup_{s\geq 0}\|T(s)(T(t)x)\|_E=\sup_{s\geq 0}\|T(t+s)x\|_E\leq \sup_{\tau\geq 0}\|T(\tau)x\|_E=|||x|||,$$

ceci nous donne

$$|||T(t)|||_{\mathcal{L}}\leq 1 \quad \forall t\geq 0,$$

c'est à dire que $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est un C_0-semi groupe de contractions sur $(E,|||\cdot|||)$. Par le théorème de Hille-Yosida, on conclut que A est fermé, $D(A)$ est dense dans E, $]0,+\infty[\subset \rho(A)$ et

$$|||R_A(\lambda)|||_{\mathcal{L}}\leq \frac{1}{\lambda}. \tag{3.3.15}$$

Utilisant les relations (3.3.14) et (3.3.15), nous obtenons

$$\|\lambda^n(R_A(\lambda))^n x\|_E\leq |||\lambda^n(R_A(\lambda))^n x|||\leq \lambda^n|||(R_A(\lambda))^n|||_{\mathcal{L}}|||x|||\leq \lambda^n\frac{1}{\lambda^n}|||x|||\leq M\|x\|_E,$$

On en déduit alors que

$$\|\lambda^n(R_A(\lambda))^n\|_{\mathcal{L}}\leq M,$$

i.e.,

$$\|(R_A(\lambda))^n\|_{\mathcal{L}}\leq \frac{M}{\lambda^n}.$$

Comme la norme $|||\cdot|||$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_E$, on conclut que A est fermé et $D(A)$ est dense dans $(E,\|\cdot\|_E)$. D'où la nécessité dans le cas $\omega=0$.

2) <u>Condition suffisante</u>. Supposons que (i) et (ii) sont satisfaites et montrons que A est le

générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de type $(M, 0)$. Par le Lemme 3.3.3, il existe une norme $|\cdot|$ sur E équivalente à la norme $\|\cdot\|_E$, i.e.,

$$\|x\|_E \leq |x|_E \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E,$$

et

$$\Big|\lambda R_A(\lambda)x\Big| \leq |x| \Longrightarrow \Big|R_A(\lambda)\Big|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda} \quad \forall x \in E, \ \forall \lambda > 0.$$

Donc sur $(E, |\cdot|)$, A satisfait les hypothèses du théorème de Hille-Yosida, par suite, il est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $\big\{T(t) : \ t \geq 0\big\}$, mais comme

$$\|T(t)x\|_E \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E,$$

on conclut que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq M$, c'est à dire que $\big\{T(t) : \ t \geq 0\big\}$ est de type $(M, 0)$ sur $(E, \|\cdot\|_E)$. D'où le résultat.

✓ Supposons maintenant que $\omega > 0$.

On sait que si $\big\{T(t) : \ t \geq 0\big\}$ est un C_0-semi-groupe de type (M, ω) et A son générateur infinitésimal alors $\big\{T(t)e^{-\omega t} : \ t \geq 0\big\}$ est un C_0-semi-groupe de type $(M, 0)$ et $A - \omega I$ est son générateur infinitésimal. Donc par la première étape, $A - \omega I$ est fermé, à domaine dense dans E, $]0, +\infty[\subset \rho(A - \omega I)$ et

$$\Big\|(R_{A-\omega I}(\lambda))^n\Big\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{M}{\lambda^n} \quad \forall \lambda > 0,$$

en particulier pour $(\lambda - \omega)$ pour tout $\lambda > \omega$, on trouve

$$\Big\|(R_{A-\omega I}(\lambda - \omega))^n\Big\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \forall \lambda > \omega. \tag{3.3.16}$$

Mais, remarquons que $A - \omega I$ est fermé si et seulement si A est fermé, que $D(A - \omega I) = D(A)$ et que

$$R_{A-\omega I}(\lambda) = (\lambda I - (A - \omega I))^{-1} = ((\lambda + \omega)I - A)^{-1} = R_A(\lambda + \omega),$$

et donc

$$R_{A-\omega I}(\lambda - \omega) = R_A(\lambda - \omega + \omega) = R_A(\lambda),$$

en remplaçant dans (3.3.16), on trouve

$$\Big\|(R_A(\lambda))^n\Big\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \forall \lambda > \omega. \tag{3.3.17}$$

Il reste à montrer que $]0,+\infty[\subset \rho(A-\omega I) \Longleftrightarrow]\omega,+\infty[\subset \rho(A)$. En effet, soit $\lambda \in]\omega,+\infty[$, i.e., $\lambda-\omega \in]0,+\infty[$ et donc $\lambda-\omega \in \rho(A-\omega I)$, ceci équivaut à $((\lambda-\omega)I-(A-\omega I))$ est inversible, i.e., $(\lambda I - A)$ est inversible et donc $\lambda \in \rho(A)$. Ceci termine la preuve du théorème.

$\square$

3.4 Théorème de Lumer-Phillips

Le Théorème de Lumer-Phillips représente une reformulation du Théorème de Hille-Yosida souvent utilisée dans les applications des C_0-semi-groupes.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach (réel ou complexe) et $(E', \|\cdot\|_{E'})$ son dual topoloqique. On note par $\langle\cdot,\cdot\rangle$, leur produit de dualité, i.e., pour tout $f \in E'$ et tout $x \in E$, $\langle f, x\rangle = f(x)$. L'application de dualité entre E et E', $J : E \longrightarrow \mathcal{P}(E')$, est définie par

$$J(x) = \left\{x' \in E' : \langle x', x\rangle = \|x\|_E^2 = \|x'\|_{E'}^2\right\} \quad \forall x \in E.$$

Par le théorème de Hahn-Banach [1], *$J(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in E$.*

Définition 3.4.1. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire. On dit que A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$, il existe $x' \in J(x)$ tel que $\mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle \leq 0$.*

Nous commençons par une proposition qui nous sera utile par la suite. Sa preuve se base sur des propriétés de la topologie faible, une notion qui est, pour le moment, inconnue pour les étudiants du master 1, donc ils peuvent ne considérer dans leur lecture que le résultat de la proposition.*

Proposition 3.4.1. *L'opérateur linéaire $A : D(A) \longrightarrow E$ est dissipatif si et seulement si*

$$\lambda\|x\|_E \leq \|(\lambda I - A)x\|_E \quad \forall x \in D(A),\ \forall \lambda > 0. \tag{3.4.1}$$

Preuve.

[1] **Théorème de Hahn-Banach**. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|_E$

Supposons que A est dissipatif, pour tout $x \in D(A)$, il existe $x' \in J(x)$ tel que $\mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle \leq 0$. Alors pour tout $\lambda > 0$, nous avons en utilisant la définition de J,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\langle x', \lambda x - Ax\rangle &= \lambda \mathcal{R}e\langle x', x\rangle - \mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle = \lambda\langle x', x\rangle - \mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle \\ &= \lambda\|x\|_E^2 - \mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle, \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \lambda\|x\|_E^2 &= \mathcal{R}e\langle x', \lambda x - Ax\rangle + \mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle \leq \mathcal{R}e\langle x', \lambda x - Ax\rangle \\ &\leq \|x'\|_{E'}\|\lambda x - Ax\|_E = \|x\|_E\|\lambda x - Ax\|_E, \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda\|x\|_E \leq \|(\lambda I - A)x\|_E.$$

D'où la condition nécessaire.

Supposons maintenant que la relation (3.4.1) est vérifiée et montrons que A est dissipatif. Soit $x \in D(A)$. Pour tout $\lambda > 0$, soit $y'_\lambda \in J(\lambda x - Ax)$, i.e.,

$$\langle y'_\lambda, \lambda x - Ax\rangle = \|y'_\lambda\|_{E'}^2 = \|\lambda x - Ax\|_E^2. \tag{3.4.2}$$

Si $\lambda x - Ax = 0$, par la relation (3.4.1), on déduit que $x = 0$, et donc $\mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle = \mathcal{R}e\langle x', 0\rangle = 0$ pour tout $x' \in J(x)$, c'est à dire que A est dissipatif.
Si $\lambda x - Ax \neq 0$, par (3.4.2), $y'_\lambda \neq 0$. Soit $z'_\lambda = \frac{y'_\lambda}{\|y'_\lambda\|_{E'}}$ ($z'_\lambda \in \overline{B}_{E'}$). Alors nous avons, une autre fois par (3.4.2),

$$\langle z'_\lambda, \lambda x - Ax\rangle = \frac{1}{\|y'_\lambda\|_{E'}}\langle y'_\lambda, \lambda x - Ax\rangle = \frac{1}{\|y'_\lambda\|_{E'}}\|y'_\lambda\|_{E'}^2 = \|y'_\lambda\|_{E'} = \|\lambda x - Ax\|_E.$$

Utilisant cette dernière égalité et (3.4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda\|x\|_E &\leq \langle z'_\lambda, \lambda x - Ax\rangle = \mathcal{R}e\langle z'_\lambda, \lambda x - Ax\rangle = \lambda \mathcal{R}e\langle z'_\lambda, x\rangle - \mathcal{R}e\langle z'_\lambda, Ax\rangle \\ &\leq \lambda\|z'_\lambda\|_{E'}\|x\|_E - \mathcal{R}e\langle z'_\lambda, Ax\rangle = \lambda\|x\|_E - \mathcal{R}e\langle z'_\lambda, Ax\rangle, \end{aligned}$$

cette dernière inégalité clairement montre que

$$\mathcal{R}e\langle z'_\lambda, Ax\rangle \leq 0, \tag{3.4.3}$$

et que

$$\lambda \mathcal{R}e\langle z'_\lambda, x\rangle \geq \lambda\|x\|_E + \mathcal{R}e\langle z'_\lambda, Ax\rangle \geq \lambda\|x\|_E - \|z'_\lambda\|_{E'}\|Ax\|_E = \lambda\|x\|_E - \|Ax\|_E,$$

i.e.,

$$\mathcal{R}e\langle z'_\lambda, x\rangle \geq \|x\|_E - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|_E. \tag{3.4.4}$$

Comme $(z'_\lambda)_\lambda \subset \overline{B}_{E'}$, et sachant que $\overline{B}_{E'}$ est faiblement* compacte, on peut extraire une sous suite $(z'_{\lambda_k})_k$ convergeant faiblement* vers un élément $z' \in \overline{B}_{E'}$, c'est à dire pour tout $\zeta \in E$,

$$\lim_{k\to\infty} \langle z'_{\lambda_k}, \zeta\rangle = \langle z', \zeta\rangle,$$

en particulier,

$$\lim_{k\to\infty} \langle z'_{\lambda_k}, x\rangle = \langle z', x\rangle,$$

passant à la limite dans (3.4.3) et dans (3.4.4), nous obtenons

$$\mathcal{R}e\langle z', Ax\rangle \leq 0$$

et

$$\mathcal{R}e\langle z', x\rangle \geq \|x\|_E.$$

D'autre part,

$$\mathcal{R}e\langle z', x\rangle \leq \|z'\|_{E'}\|x\|_E = \|x\|_E,$$

ces deux dernières inégalités donnent

$$\mathcal{R}e\langle z', x\rangle = \|x\|_E. \tag{3.4.5}$$

Si on note par $\mathcal{I}m(w)$, la partie imaginaire d'un nombre complexe w, alors par ce qui précede, nous avons

$$|\langle z', x\rangle|^2 \leq \big(\|z'\|_{E'}\|x\|_E\big)^2 = \|x\|_E^2,$$

i.e.,

$$\big(\mathcal{R}e\langle z', x\rangle\big)^2 + \big(\mathcal{I}m\langle z', x\rangle\big)^2 \leq \|x\|_E^2,$$

et donc par (3.4.5),

$$\|x\|_E^2 + \big(\mathcal{I}m\langle z', x\rangle\big)^2 \leq \|x\|_E^2,$$

on conclut que $\mathcal{I}m\langle z', x\rangle = 0$, et par suite

$$\langle z', x\rangle = \mathcal{R}e\langle z', x\rangle = \|x\|_E.$$

En prenant $x' = \|x\|_E\, z'$, nous obtenons

$$\langle x', x\rangle = \langle \|x\|_E\, z', x\rangle = \|x\|_E \langle z', x\rangle = \|x\|_E^2,$$

et

$$\|x'\|_{E'} = \|x\|_E \|z'\|_{E'} = \|x\|_E.$$

En conclusion

$$\langle x', x\rangle = \|x\|_E^2 = \|x'\|_{E'}^2,$$

ceci montre que $x' \in J(x)$. Nous avons obtenu l'existence de $x' \in J(x)$ tel que

$$\mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle = \|x\|_E \mathcal{R}e\langle z', Ax\rangle \leq 0,$$

ce qui montre que A est dissipatif. La preuve de la proposition est ainsi terminée. $\square$

Théorème 3.4.2. ***(Lumer-Phillips)*** *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire tel que $\overline{D(A)} = E$. Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur E si et seulement si*

(a) A est dissipatif.

(b) Il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda I - A$ est surjectif.

De plus, si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions, alors $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, et $\mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle \leq 0$ pour tout $x \in D(A)$ et tout $x' \in J(x)$.

Preuve.

Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $\{T(t) : \ t \geq 0\}$. Par le Théorème de Hille-Yosida, nous avons $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et donc $(\lambda I - A)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Il reste à montrer que A est dissipatif.

Soit $x \in D(A)$ et $x' \in J(x)$, i.e., $\langle x', x\rangle = \|x'\|_{E'}^2 = \|x\|_E^2$. Alors $\langle x', x\rangle = \mathcal{R}e\langle x', x\rangle$, et comme le semi-groupe est de contractions, $\|T(t)x\|_E \leq \|x\|_E$ pour tout $t > 0$. D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}e\langle x', T(t)x - x\rangle &= \mathcal{R}e\langle x', T(t)x\rangle - \mathcal{R}e\langle x', x\rangle = \mathcal{R}e\langle x', T(t)x\rangle - \|x\|_E^2 \\
&\leq \left|\langle x', T(t)x\rangle\right| - \|x\|_E^2 \leq \|x'\|_{E'}\|T(t)x\|_E - \|x\|_E^2 \\
&\leq \|x'\|_{E'}\|x\|_E - \|x\|_E^2 = \|x\|_E^2 - \|x\|_E^2 = 0,
\end{aligned}$$

par suite

$$\frac{1}{t}\mathcal{R}e\langle x', T(t)x - x\rangle \leq 0,$$

en passant à la limite sur t, il vient que

$$\mathcal{R}e\Big\langle x', \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}\Big\rangle = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathcal{R}e\langle x', T(t)x-x\rangle \leq 0,$$

c'est à dire

$$\mathcal{R}e\langle x', Ax\rangle \leq 0,$$

ce qui montre que A est dissipatif.

Maintenant, on suppose que A vérifie les propriétés (a) et (b), et on montre qu'il est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions. Comme A est dissipatif, par la Proposition 3.4.1,

$$\lambda\|x\|_E \leq \|(\lambda I - A)x\|_E \quad \forall x \in D(A),\ \forall \lambda > 0. \tag{3.4.6}$$

D'un autre côté, par (b), on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $(\alpha I - A)$ est surjectif et par la relation (3.4.6),

$$\alpha\|(\alpha I - A)^{-1}x\|_E \leq \|(\alpha I - A)(\alpha I - A)^{-1}x\|_E = \|x\|_E,$$

i.e.,

$$\|(\alpha I - A)^{-1}x\|_E \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|_E,$$

on conclut que $(\alpha I - A)^{-1}$ est un opérateur borné et donc il est fermé, et par suite A est fermé.

Montrons dans la suite que $(\lambda I - A)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Posons

$$K = \big\{\lambda \in]0, +\infty[:\ (\lambda I - A) \text{ est surjectif}\big\} \subset]0, +\infty[.$$

Il est clair que K est un ensemble non vide car il contient α. Pour notre but, on doit montrer que $K =]0, +\infty[$. Soit $\lambda \in K$, c'est à dire $(\lambda I - A)$ est surjectif, et en utilisant la relation (3.4.6), il vient que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\|_E \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|_E, \tag{3.4.7}$$

i.e., $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, ce qui implique que $\lambda \in \rho(A)$ et donc $K = \rho(A)\cap]0, +\infty[$. Par la Propostion 2.6.1, on sait que $\rho(A)$ est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, d'où, pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \in \rho(A)$, et donc il existe un voisinage $V_\lambda \subset \mathbb{C}$ de λ tel que $V_\lambda \subset \rho(A)$, i.e., $V_\lambda\cap]0, +\infty[\subset \rho(A)\cap]0, +\infty[= K$. Clairement, $U_\lambda = V_\lambda\cap]0, +\infty[$ est un voisinage de λ dans

$]0,+\infty[$, et ceci implique que K est un ouvert de $]0,+\infty[$.

Montrons que K est aussi un fermé de $]0,+\infty[$. Soit $(\lambda_n)_n \subset K$ tel que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \in]0,+\infty[$. On doit montrer que $\lambda \in K$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_n I - A)$ est surjectif, on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in E,\ \exists\, x_n \in D(A) \text{ tel que } y = (\lambda_n I - A)x_n = \lambda_n x_n - Ax_n. \tag{3.4.8}$$

En utilisant les relations (3.4.6) et (3.4.8), on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n \|x_n\|_E \leq \|(\lambda_n I - A)x_n\|_E = \|y\|_E,$$

i.e.,

$$\|x_n\|_E \leq \frac{1}{\lambda_n}\|y\|_E.$$

Comme $(\lambda_n)_n$ est convergente dans $]0,+\infty[$, donc elle est bornée, il existe une constante $k > 0$, tel que $\lambda_n \leq k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'en suit

$$\|x_n\|_E \leq \frac{1}{k}\|y\|_E = c.$$

En utilisant alors les relations (3.4.6) et (3.4.8) une deuxième fois, nous avons pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\lambda_m \|x_n - x_m\|_E &\leq \|(\lambda_m I - A)(x_n - x_m)\|_E = \|\lambda_m x_n - Ax_n - (\lambda_m x_m - Ax_m)\|_E \\
&= \|\lambda_m x_n - Ax_n - y\|_E = \|\lambda_m x_n - \lambda_n x_n + \lambda_n x_n - Ax_n - y\|_E \\
&= \|\lambda_m x_n - \lambda_n x_n + y - y\|_E = |\lambda_m - \lambda_n|\|x_n\|_E \leq c|\lambda_m - \lambda_n|,
\end{aligned}$$

ceci nous donne

$$\|x_n - x_m\|_E \leq \frac{1}{\lambda_m} c|\lambda_m - \lambda_n| \leq \frac{1}{k} c|\lambda_m - \lambda_n|,$$

sachant que $(\lambda_n)_n$ est convergente, et donc est une suite de Cauchy, on conclut que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E et donc elle converge vers un élément $x \in E$. Par (3.4.8),

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n - y = \lambda x - y,$$

et comme A est fermé, on conclut que $x \in D(A)$ et $Ax = \lambda x - y$, i.e., pour tout $y \in E$, il existe $x \in D(A)$ tel que $y = (\lambda I - A)x$, ceci implique que $(\lambda I - A)$ est surjectif et donc $\lambda \in K$. Par conséquent K est un sous ensemble ouvert et fermé de $]0,+\infty[$. Sachant que les sous ensembles ouverts et fermés à la fois dans $]0,+\infty[$ sont $]0,+\infty[$ lui même et lensemble vide et sachant que $K \neq \emptyset$, on conclut que $K =]0,+\infty[$, et donc $]0,+\infty[\subset \rho(A)$ et par (3.4.7)

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Par le théorème de Hille-Yosida, A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contrations. Ceci achève la preuve. □

3.5 Un exemple d'application du théorème de Hille-Yosida

On donne dans la suite un exemple d'application du théorème de Hille-Yosida qui montre que le Laplacien avec les conditions aux limites de Dirichlet, est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contractions sur $L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$.

Exemple 3.5.1. *Considérons l'espace $L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_0^\pi f(x)g(x)dx \quad \forall f, g \in L^2([0,\pi],\mathbb{R}),$$

et de sa norme

$$\|f\|_{L^2} = \Big(\int_0^\pi |f(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f \in L^2([0,\pi],\mathbb{R}).$$

Soit l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset L^2(]0,\pi[,\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$ défini par

$$D(A) = H_0^1(]0,\pi[) \cap H^2(]0,\pi[)$$

$$Au = u'' \quad \forall u \in D(A).$$

Pour montrer que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contractions sur $L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$, on va utiliser le théorème de Hille-Yosida, donc on doit montrer que le domaine de A est dense, A est fermé, $]0,+\infty[\subset \rho(A)$ et $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda}$. En effet, par le Théorème 3.2.2, on sait que pour tout $h \in L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$, il existe $(h_n) \subset C^\infty(]0,\pi[) \cap L^\infty(]0,\pi[)$ tel que $h_n \longrightarrow h$. Mais, on sait que $C^\infty(]0,\pi[) \cap L^\infty(]0,\pi[) \subset H_0^1(]0,\pi[) \cap H^2(]0,\pi[)$ et donc $(h_n) \subset H_0^1(]0,\pi[) \cap H^2(]0,\pi[) = D(A)$, et par suite $D(A)$ est dense dans $L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$. Maintenant, on va montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ est bijectif, c'est à dire on doit montrer que pour tout $f \in L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$, il existe un unique $u \in D(A)$ tel que $f = (\lambda I - A)(u) = \lambda u - Au = \lambda u - u''$. Comme $u \in D(A) \subset H_0^1(]0,\pi[)$ ceci implique

que $u(0) = u(\pi) = 0$*. Donc, ceci revient à montrer que pour tout* $\lambda > 0$ *et pour tout* $f \in L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$*, le problème*

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in D(A)$*. On sait que la solution générale de l'équation différentielle* $\lambda u - u'' = f$ *est de la forme*

$$u(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x f(y) e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} dy - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x f(y) e^{\sqrt{\lambda}(y-x)} dy.$$

Par les conditions aux limites, on obtient $c_1 + c_2 = 0$ *et*

$$c_1 e^{\pi\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\pi\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(y) e^{\sqrt{\lambda}(\pi-y)} dy - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(y) e^{\sqrt{\lambda}(y-\pi)} dy = 0,$$

et donc c_1 *et* c_2 *sont déterminées d'une façon unique, par suite la solution* u *est unique, i.e.,* $(\lambda I - A)$ *est bijectif et* $u = (\lambda I - A)^{-1} f$*. D'autre part, sachant, que pour tout* $f \in L^2(]0,\pi[,\mathbb{R})$ *et tout* $x \in]0,\pi[$*,* $\lambda u(x) - u''(x) = f(x)$*, avec* $u = (\lambda I - A)^{-1} f$*, alors on obtient, en multipliant cette équation par* $u(x)$*,*

$$\lambda (u(x))^2 - u''(x) u(x) = f(x) u(x),$$

en intégrant sur $]0,\pi[$*,*

$$\lambda \int_0^\pi (u(x))^2 dx - \int_0^\pi u''(x) u(x) dx = \int_0^\pi f(x) u(x) dx,$$

une intégration par parties sur la deuxième intégrale, donne

$$\lambda \int_0^\pi (u(x))^2 dx + \int_0^\pi (u'(x))^2 dx = \int_0^\pi f(x) u(x) dx,$$

i.e.,

$$\lambda \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 = \langle f, u \rangle_{L^2},$$

ceci implique que

$$\lambda \|u\|_{L^2}^2 \leq \langle f, u \rangle_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} |u\|_{L^2},$$

par conséquent

$$\lambda \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2},$$

comme $u = (\lambda I - A)^{-1} f$*, il vient que*

$$\|(\lambda I - A)^{-1} f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2},$$

ceci implique que $(\lambda I - A)^{-1}$ *est continu et*

$$\sup_{f \in \overline{B}_{L^2}} \|(\lambda I - A)^{-1} f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{f \in \overline{B}_{L^2}} \|f\|_{L^2} = \frac{1}{\lambda},$$

i.e.,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

En conclusion, comme $(I - A)^{-1}$ *est continu, alors* $(I - A)$ *est continu et donc* A *est fermé. De plus, comme pour tout* $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ *est bijectif et* $(\lambda I - A)^{-1}$ *est continu, alors* $]0, +\infty[\subset \rho(A)$. *Ceci finit la preuve.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] *D. D. S. Ferreira, Semi-groupes de contractions. Master 2 (recherche). http ://www.iecl.univ-lorraine.fr/ David.Dos-Santos-Ferreira/teaching/M2/Semigroupes.pdf*

[2] *X. Gourdon, Analyse. Ellipses (2008).*

[3] *A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer Verlag, New York, Berlin, (1983).*

[4] *I. I. Vrabie, C_0-Semigroups and applications. Mathematics Studies. 191, North-Holland, Elsevier, (2003).*