Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Master 1 : Analyse Fonctionelle
Module : Théorie des semi-groupes
Pr. D. Azzam-Laouir

Solution de la série de TD N°1

2019-2020

Exercice 1.
1) Comme pour tout $t \geq 0$, $T(t) \in \mathcal{L}(E)$ alors $S(t) \in \mathcal{L}(E)$, et nous avons
(i) $S(0) = T(0)e^0 = T(0) = I$.
(ii) Pour tous $s, t \in [0, +\infty[$,

$$S(t+s) = T(t+s)e^{-\omega(t+s)} = T(t)T(s)e^{-\omega s}e^{-\omega t} = T(t)e^{-\omega t}(T(s)e^{-\omega s}) = S(t)S(s).$$

Donc $\{S(t) : \ t \geq 0\}$ est un semi-groupe. D'autre part, pour tout $t \geq 0$

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}} = \|T(t)e^{-\omega t}\|_{\mathcal{L}} = e^{-\omega t}\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq e^{-\omega t}Me^{\omega t} = M,$$

c'est à dire que $\{S(t) : \ t \geq 0\}$ est de type $(M, 0)$.
Maintenant, pour tout $x \in E$

$$\lim_{t\downarrow 0} S(t)x = \lim_{t\downarrow 0} T(t)e^{-\omega t}x = \lim_{t\downarrow 0} e^{-\omega t} \lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x.$$

Par suite $\{S(t) : \ t \geq 0\}$ est un C_0-semi-groupe de type $(M, 0)$.
2) Soit $x \in E$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)e^{-\omega t}x - x}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)e^{-\omega t}x - e^{-\omega t}x}{t} + \lim_{t\downarrow 0} \frac{e^{-\omega t}x - x}{t} \\ &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}e^{-\omega t} + \lim_{t\downarrow 0} \frac{e^{-\omega t} - 1}{-\omega t}(-\omega x) \\ &= Ax - \omega x = (A - \omega I)x \end{aligned}$$

donc cette limite existe si $x \in D(A)$, par conséquent, si on pose B le générateur infinitésimal de $\{S(t) : \ t \geq 0\}$, on aura $D(B) = D(A)$ et $B = A - \omega I$.

Exercice 2.
1) Il est clair que pour tout $t \geq 0$, $T(t) \in \mathcal{L}(E)$, et nous avons pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0, 1]$
(i) $T(0)f(x) = f(x) \Longleftrightarrow T(0)f = f \Longleftrightarrow T(0) = I$.
(ii) Pour tous $s, t \in [0, +\infty[$

$$(T(t+s)f)(x) = \begin{cases} f(x+t+s) & si \ x+t+s \leq 1 \\ 0 & si \ x+t+s > 1 \end{cases} = \begin{cases} T(t)f(x+s) & si \ x+t+s \leq 1 \\ 0 & si \ x+t+s > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (T(t)T(s)f)(x) & si\ x+t+s \leq 1 \\ 0 & si\ x+t+s > 1 \end{cases}$$

et donc $T(t+s)f = T(t)T(s)f$, i.e., $T(t+s) = T(t)T(s)$, c'est à dire $\big\{T(t) :\ t \geq 0\big\}$ est un semi-groupe. D'autre part, pour tout $f \in E$,

$$\lim_{t\downarrow 0} \Big\|T(t)f - f\Big\|_C = \lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in[0,1]} \Big|T(t)f(x) - f(x)\Big| = \lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in[0,1]} \Big|f(t+x) - f(x)\Big| = 0$$

car par le théorème de Heine, on sait que toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. Par suite, $\big\{T(t) :\ t \geq 0\big\}$ est un C_0-semi-groupe. De plus,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} = \sup_{f\in\overline{B}_E} \|T(t)f\|_C = \sup_{f\in\overline{B}_E} \sup_{x+t\in[0,1]} |f(x+t)| = \sup_{f\in\overline{B}_E} \|f\|_C \leq 1,$$

et donc $\big\{T(t) :\ t \geq 0\big\}$ est un C_0-semi-groupe de contractions.
Maintenant, soit A le générateur infinitésimal du semi-groupe $\big\{T(t) :\ t \geq 0\big\}$. Soit $f \in E$ et soit $x \in [0,1]$, alors

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} & si\ x < 1 \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases} = \begin{cases} f'(x) & si\ x < 1 \\ 0 & si\ x = 1. \end{cases}$$

Donc pour que cette limite existe dans E, il faut que f soit dérivable et $f' \in E$, i.e., f' continue et $f'(1) = 0$. D'autre part, comme f est continue sur un compact donc elle est uniformément continue et bornée, on peut alors utliser la même preuve de l'Exemple 3.1.5 du cours, pour montrer que cette condition est suffisante. Par conséquent,

$$D(A) = \Big\{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \cap E :\ f' \in E\Big\} \text{ et } Af = f'.$$

2) Pour montrer que $\sigma(A) = \emptyset$, montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $g \in E$, l'équation $(\lambda I - A)f = g$ admet une solution unique dans E. En effet,

$$(\lambda I - A)f = g \Longleftrightarrow \lambda f - f' = g \Longleftrightarrow \lambda f(x) - f'(x) = g(x)\ \ \forall x \in [0,1].$$

La solution de l'équation sans second membre $\lambda f(x) - f'(x) = 0$ est de la forme $f(x) = ke^{\lambda x}$ avec k constante. Donc la solution de l'équation avec second membre $\lambda f(x) - f'(x) = g(x)$ est de la forme $f(x) = k(x)e^{\lambda x}$, où $k(\cdot)$ est une fonction qui dépend de x, que nous allons déterminer.

$$f(x) = k(x)e^{\lambda x} \Longrightarrow f'(x) = k'(x)e^{\lambda x} + \lambda k(x)e^{\lambda x}.$$

D'où,

$$\lambda f(x) - f'(x) = g(x) \Longleftrightarrow -k'(x) = g(x)e^{-\lambda x} \Longleftrightarrow \int_x^1 -k'(y)dy = \int_x^1 g(y)e^{-\lambda y}dy,$$

i.e.,

$$k(x) = k(1) + \int_x^1 g(y)e^{-\lambda y}dy,$$

et donc

$$f(x) = k(x)e^{\lambda x} = k(1)e^{\lambda x} + \int_x^1 g(y)e^{\lambda(x-y)}dy,$$

sachant que $f \in E$, et donc $f(1) = 0$, on obtient $k(1) = 0$ et donc l'équation considérée admet une solution unique dans E, donnée par

$$f(x) = \int_x^1 g(y)e^{\lambda(x-y)}dy,$$

c'est à dire pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - A$ est bijectif, et par suite $\sigma(A) = \emptyset$.

<u>Exercice 3</u>.

1) $\Longrightarrow$ 2) Soit $x \in D(A)$, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)Bx - Bx}{t} &\overset{1)}{=} \lim_{t\downarrow 0}\frac{BT(t)x - Bx}{t} \overset{B\,lin}{=} \lim_{t\downarrow 0} B\Big(\frac{T(t)x - x}{t}\Big) \overset{B\,cont}{=} B\Big(\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x - x}{t}\Big)\\ &= BAx,\end{aligned}$$

donc cette limite existe pour tout $x \in D(A)$, i.e., $Bx \in D(A)$ et $ABx = BAx$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Pour tout $x \in D(A)$ et tout $t > 0$, considérons la fonction $f : [0,t] \longrightarrow E$ définie par

$$f(s) = T(t-s)BT(s)x \quad \forall s \in [0,t].$$

Nous avons

$$f'(s) = \frac{d}{ds}(T(t-s))BT(s)x + T(t-s)B\frac{d}{ds}T(s)x.$$

Sachant que si A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\big\{T(t) :\ t \geq 0\big\}$, alors

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax,$$

il vient que

$$f'(s) = -AT(t-s)BT(s)x + T(t-s)BAT(s)x = -T(t-s)ABT(s)x + T(t-s)BAT(s)x,$$

par 2)

$$f'(s) = -T(t-s)ABT(s)x + T(t-s)ABT(s)x = 0,$$

par suite $f(s) =$ constante pour tout $s \in [0,t]$, et donc $f(0) = f(t)$. D'où, $T(t)Bx = BT(t)x$ pour tout $x \in D(A)$.

Maintenant, soit $x \in E$, par le théorème de Hille-Yosida, $\overline{D(A)} = E$, donc il existe une suite $(x_n) \subset D(A)$ tel que $x_n \longrightarrow x$.

$$x_n \in D(A) \Longrightarrow T(t)Bx_n = BT(t)x_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T(t)Bx_n = \lim_{n\to\infty} BT(t)x_n \Longrightarrow T(t)Bx = BT(t)x$$

car la fonction $(t,y) \longmapsto T(t)y$ est continue et B est continu. On conclut que $T(t)Bx = BT(t)x$ pour tout $x \in E$, c'est à dire $T(t)B = BT(t)$.

<u>Exercice 4</u>.

1) Il est clair que pour tout $t \geq 0$, $T(t) \in \mathcal{L}(E)$, et nous avons pour tout $f \in E$ et tout $s \in [1, +\infty[$

(i) $T(0)f(s) = f(se^0) = f(s) \Longleftrightarrow T(0)f = f \Longleftrightarrow T(0) = I$.

(ii) Pour tous $t, t' \in [0, +\infty[$

$$T(t+t')f(s) = f(se^{t+t'}) = f(se^{t'}e^t) = T(t)f(se^{t'}) = T(t)T(t')f(s) \Longleftrightarrow T(t+t') = T(t)T(t').$$

Par conséquent, $\big\{T(t)\ :\ t \geq 0\big\}$ est un semi-groupe. D'autre part, on sait qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule à l'infini est uniformément continue, d'où pour tout $f \in E$

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)f - f\|_C = \lim_{t\downarrow 0} \sup_{s\in[1,+\infty[} |T(t)f(s) - f(s)| = \lim_{t\downarrow 0} \sup_{s\in[1,+\infty[} |f(se^t) - f(s)| = 0,$$

et donc $\big\{T(t)\ :\ t \geq 0\big\}$ est un C_0-semi-groupe.
2) On suppose que $E = L^p([1, +\infty[, \mathbb{R})$. Dans ce cas, pour tout $f \in E$

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)f - f\|_E = \lim_{t\downarrow 0} \Big(\int_1^\infty |T(t)f(s) - f(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} = \lim_{t\downarrow 0} \Big(\int_1^\infty |f(se^t) - f(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}},$$

on suppose dans un premier temps que $f \in C_c([1, +\infty[, \mathbb{R})$, c'est à dire que f est continue à support compact. Alors

$$\lim_{t\downarrow 0} |f(se^t) - f(s)| = 0$$

et

$$|f(se^t) - f(s)| \leq |f(se^t)| + |f(s)| \leq 2\|f\|_C,$$

par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue dans L^p, on conclut que

$$\lim_{t\downarrow 0} \Big(\int_1^\infty |f(se^t) - f(s)|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

et donc

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)f - f\|_E = 0.$$

Maintenant, on suppose que $f \in L^p([1, +\infty[, \mathbb{R})$, par le théorème de densité, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il exsite $f_\varepsilon \in C_c([1, +\infty[, \mathbb{R})$ tel que $\|f - f_\varepsilon\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)f - f\|_E &\leq \lim_{t\downarrow 0} \Big(\|T(t)f - T(t)f_\varepsilon\|_E + \|T(t)f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_E + \|f_\varepsilon - f\|_E \Big) \\
&\leq \lim_{t\downarrow 0} \Big(\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \|f - f_\varepsilon\|_E + \|T(t)f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_E + \|f_\varepsilon - f\|_E \Big) \\
&< \lim_{t\downarrow 0} \Big(\frac{\varepsilon}{2} \|T(t)\|_{\mathcal{L}} + \|T(t)f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_E + \frac{\varepsilon}{2} \Big) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ε étant arbitraire, on conclut que $\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)f - f\|_E = 0$. D'où, $\big\{T(t)\ :\ t \geq 0\big\}$ est un C_0-semi-groupe sur E.

Exercice 5.
1) Il est clair que que pour tout $t \geq 0$, $T(t) \in \mathcal{L}(E)$, et nous avons pour tout $x = (x_n) \in E$
(i) $T(0)x = T(0)(x_n) = (e^{-a_n 0} x_n) = (x_n) = x \Longleftrightarrow T(0) = I$.
(ii) Pour tous $s, t \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
T(t+s)x &= T(t+s)(x_n) = (e^{-a_n(t+s)} x_n) = (e^{-a_n t} e^{-a_n s} x_n) = T(t)(e^{-a_n s} x_n) \\
&= T(t)T(s)(x_n) = T(t)T(s)x,
\end{aligned}$$

et donc $T(t+s) = T(t)T(s)$. Par suite $\big\{T(t)\ :\ t \geq 0\big\}$ est un semi-groupe. D'autre part, pour tout $x = (x_n) \in E = \ell_p$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)x - x\|_{\ell_p} &= \lim_{t\downarrow 0} \|(e^{-a_n t} x_n) - (x_n)\|_{\ell_p} = \lim_{t\downarrow 0} \Big(\sum_{n=1}^\infty |(e^{-a_n t} - 1)x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\sum_{n=1}^\infty \lim_{t\downarrow 0} |(e^{-a_n t} - 1)x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = 0.
\end{aligned}$$

D'où, $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est un C_0-semi-groupe.
2) Trouvons son générateur infinitésimal A. Soit $x=(x_n)\in E$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t} &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)(x_n)-(x_n)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{(e^{-a_nt}x_n)-(x_n)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{(e^{-a_nt}-1)(x_n)}{t}\\
&= (x_n)\Big(\lim_{t\downarrow 0}\frac{e^{-a_nt}-1}{t}\Big)=(x_n)\Big(-a_n\lim_{t\downarrow 0}\frac{e^{-a_nt}-1}{-a_nt}\Big)=(-a_nx_n),
\end{aligned}$$

donc cette limite existe pour tout $x\in E$, par conséquent,

$$D(A)=E \quad \text{et} \quad Ax=A(x_n)=(-a_nx_n).$$

3) Supposons que (a_n) est bornée et montrons que $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est uniformément continu. En effet, supposons qu'il existe une constante positive α tel que $a_n\leq\alpha$ pour tout $n\geq 1$, alors

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}}=\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\overline{B}_E}\|T(t)x-x\|_E=\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\overline{B}_E}\|((e^{-a_nt}-1)x_n)\|_{\ell_p}\\
=\ &\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\overline{B}_E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big|(e^{-a_nt}-1)x_n\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leq\lim_{t\downarrow 0}(1-e^{-\alpha t})\sup_{x\in\overline{B}_E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\
=\ &\lim_{t\downarrow 0}(1-e^{-\alpha t})\sup_{x\in\overline{B}_E}\|x\|_{\ell_p}=\lim_{t\downarrow 0}(1-e^{-\alpha t})=0.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\{T(t):\ t\geq 0\}$ est uniformément continu. Par le Théorème 3.1.3 du cours, on sait que ceci est équivalent à $D(A)=E$ et $A\in\mathcal{L}(E)$, donc il existe $c>0$ tel que

$$\|Ax\|_{\ell_p}\leq c\|x\|_{\ell_p}\quad\forall x\in\ell_p,$$

i.e.,

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big|-a_nx_n\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leq c\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\quad\forall(x_n)\in\ell_p,$$

en particulier pour $(x_n)=(1,0,0,\ldots)$, on obtient $a_1\leq c$, pour $(x_n)=(0,1,0,\ldots)$, on obtient $a_2\leq c$, pour $(x_n)=(0,0,0,\ldots,1,0,\ldots)$, on obtient $a_n\leq c$, ainsi de suite on obtient $a_n\leq c$ pour tout $n\geq 1$, c'est à dire que (a_n) est bornée.