

1 - Quelques rappels sur les espaces connexes :

Définition: (espace séparé)

Un espace topologique X est dit séparé si :

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists V_x \in \mathcal{V}(x), \exists V_y \in \mathcal{V}(y) : V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Définition: (espace connexe)

Un espace topologique X est dit connexe s'il n'existe pas une partition de X en deux ouverts non triviaux.

$$(X = U \cup V, U \cap V = \emptyset, U, V \in \mathcal{T}_X) \Rightarrow (U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset)$$

Proposition: Soit X un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) X est connexe.
- 2) il n'existe pas de partition de X en deux fermés non triviaux.
- 3) les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$.

Théorème: L'image d'un espace topologique connexe par une application continue est connexe.

Exemples: Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.

Définition: Un espace topologique est localement connexe si tout point de X , admet un système fondamental $\mathcal{S}_f(x)$ de voisinages

Connexes.

$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{V}(x)$ connexe, tel que $W \subset V$.

Exemples:

- (X, τ_{Gros}) est localement connexe ($S_f(x) = X$)
- (X, τ_{Disc}) " " " ($S_f(x) = \{x\}$).

Définition: (espace compact)

2. Homéomorphismes locaux:

Définition: Soient X, Y deux espaces topologiques et $f: X \rightarrow Y$ une application continue. On dit que f est un homéomorphisme local si:

$\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{V}(x)$ ouvert tel que $f(U)$ est un ouvert dans Y et $f|_U: U \rightarrow f(U)$ est un homéomorphisme.

Proposition: Tout homéomorphisme local est une application ouverte.

Preuve: Soit W un ouvert de X et montrons que $f(W)$ est aussi un ouvert dans Y . Comme f est un homéomorphisme local, alors pour tout $x \in W \subset X$, il existe $U_x \in \mathcal{V}(x)$ ouvert tq. $f(U_x)$ est un ouvert de Y .

Comme W est un ouvert, on peut prendre $U_x \subset W$

Ce qui implique que $\bigcup_{x \in W} U_x \subset W$

Or, $x \in U_x \Rightarrow \bigcup_{x \in W} \{x\} \subset \bigcup_{x \in W} U_x \Rightarrow W \subset \bigcup_{x \in W} U_x$

d'où $W = \bigcup_{x \in W} U_x$.

et par suite $f(\omega) = f\left(\bigcup_{\kappa \in \omega} u_{\kappa}\right) = \bigcup_{\kappa \in \omega} f(u_{\kappa})$

donc $f(\omega)$ est réuniions d'ouverts de Y , donc il est un ouvert. $\square$

3- Définition des revêtements

Soit B un espace topologique. Un revêtement de B est la donnée d'un espace topologique X et une application continue $f: X \rightarrow B$ ayant la propriété de trivialité locale suivante :

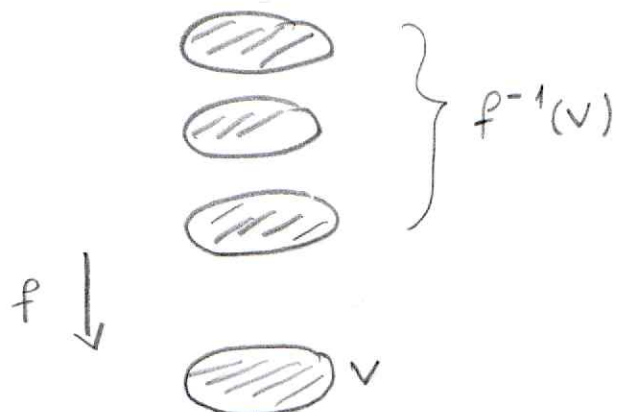
Pour tout point $y \in B$, il existe $V \in \mathcal{V}(y)$, un espace discret non vide D et un homéomorphisme $\Phi: f^{-1}(V) \rightarrow V \times D$

tel que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{\Phi} & V \times D \\ & \searrow f|_{f^{-1}(V)} & \downarrow p \\ & & V \end{array}$$

$p \circ \Phi = f$

Si on pense à V comme un disque $f^{-1}(V)$ est une « pile d'assiettes »



Remarque:

On dit aussi que $f: X \rightarrow B$ (ou même X) est un revêtement de B et que :

- * B est la base du revêtement.
- * X est l'espace total
- * $f^{-1}(y)$ la fibre au dessus du point y de B .
- * Φ une trivialisation locale de f au dessus de V .

Exemples:

i) Revêtement trivial:

Soit D un espace discret. La projection $p: B \times D \rightarrow B$ est un revêtement de B .

Plus généralement, on dit qu'un revêtement $f: X \rightarrow B$ est trivial si f possède une trivialisation $\tilde{f}: X \rightarrow B \times D$ au dessus de B .

ii) Revêtement induit: Soit $f: X \rightarrow B$ un revêtement, et soit

$A \subset B$. $f|_{f^{-1}(A)}: f^{-1}(A) \rightarrow A$ est un revêtement de A

appelé le revêtement induit au dessus de A .

iii) Revêtement produit: Si $f_1: X_1 \rightarrow B_1$ et $f_2: X_2 \rightarrow B_2$

sont deux revêtements, alors $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow B_1 \times B_2$

est un revêtement de $B_1 \times B_2$, appelé le revêtement produit.

Proposition: L'application $f: X \rightarrow B$ est un revêtement si et

seulement si tout point $y \in B$ admet un voisinage V tel que

$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$, union disjointe non vide d'ouverts de X

et $f|_{U_i}: U_i \rightarrow V$ est un homéomorphisme.

Exemple:

L'application $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est un revêtement
 $t \mapsto f(t) = e^{2\pi i t}$

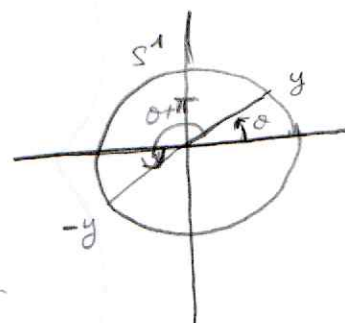
En effet, pour tout $y = e^{2\pi i \theta} \in S^1$, prenons $V = S^1 - \{-y\}$

On a : $f^{-1}(V) = f^{-1}(S^1 - \{-y\})$

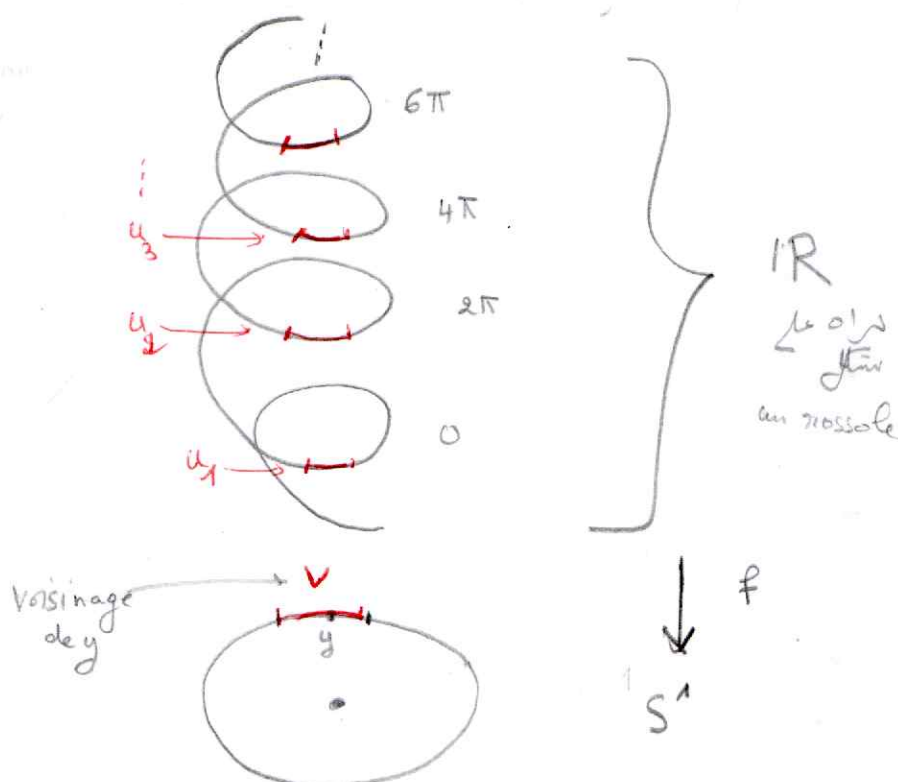
$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\theta + (2k-1)\pi, \theta + (2k+1)\pi[$$

$$= \dots \cup]\theta + \pi, \theta + 3\pi[\cup]\theta + 3\pi, \theta + 5\pi[\cup \dots$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$$



$f|_{U_k}: U_k \rightarrow V$ est un homéomorphisme



— Revêtement du cercle S^1 —