

Chap 4: Géodésiques et Courbes.

1/ Courbes auto-parallèles:

Rappelons d'abord la définition absolue d'un vecteur:

$$\nabla \vec{V} = V^k{}_{;A} dx^A \otimes \vec{e}_k$$

$$V^k{}_{;A} = V^k{}_{,A} + \Gamma^k{}_{NA} V^N$$

La dérivée de $\vec{V}$ dans une direction $\vec{u}$ est:

$$\nabla_{\vec{u}} \vec{V} = \langle \nabla \vec{V}, \vec{u} \rangle = V^k{}_{;A} u^A \vec{e}_k$$

Si $\vec{u} = \vec{e}_N$, on a la forme suivante:

$$\nabla_{\vec{e}_N} \vec{V} = V^k{}_{;N} \vec{e}_k = \langle \nabla \vec{V}, \vec{e}_N \rangle$$

Introduisons maintenant la notion de courbe géodésique le long d'une courbe $C \in \mathbb{R}^N$.

C est une application: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$
 $\lambda \longrightarrow C(\lambda)$

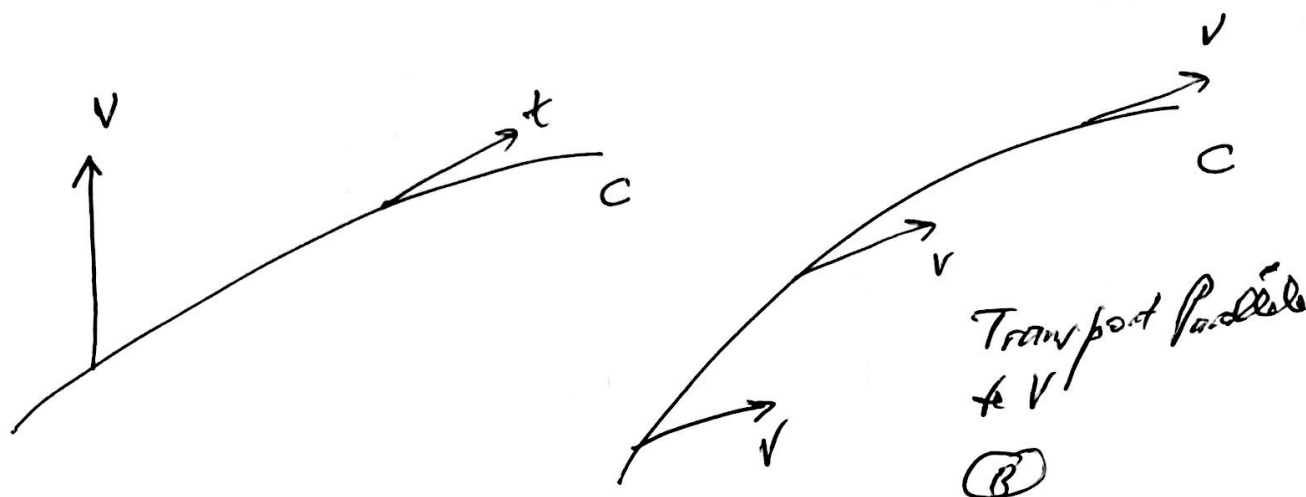
où λ est un paramètre.

Soit le vecteur $\vec{t}$ tangent à C en un pt de coords x^N :

$$\textcircled{1} \quad \vec{t} = t^N \vec{e}_N, \quad t^N = \frac{dx^N}{d\lambda} \quad \textcircled{1}$$

Si $\vec{V} \in \mathbb{R}^n$, on dit qu'il est parallèlement transporté le long de C si:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{V}} \vec{V} &= t^\kappa V^\lambda{}_{;\kappa} \vec{e}_\lambda \\ &= t^\kappa (V^\lambda{}_{;\kappa} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa} V^\mu) \vec{e}_\lambda = 0 \end{aligned}$$



L'équation définit le parallélisme le long de C .
 Il est facile de se dire que les vecteurs tangents ne sont pas transportés parallèlement à eux-mêmes. Mais il existe une sous classe de courbes C , appelées courbes auto-parallèles où un vecteur tangent transporté parallèlement à lui-même reste tangent à la courbe. Donc:

$$\nabla_{\vec{t}} \vec{t} = 0$$

$$\Rightarrow t^\nu t^\mu{}_{;\nu} \vec{e}_\mu = 0$$

$$\Rightarrow t^\nu t^\mu{}_{,\nu} = 0$$

$$\Rightarrow t^\nu (t^\mu{}_{,\nu} + \rho^\mu{}_{\rho\nu} t^\rho) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx^\nu}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) + \rho^\mu{}_{\rho\nu} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \rho^\mu{}_{\rho\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0}$$

qui est l'équation des courbes auto-parallèles.

On va montrer que dans un espace métrique cette équation est l'équation des géodésiques.

2/ Géodésiques:

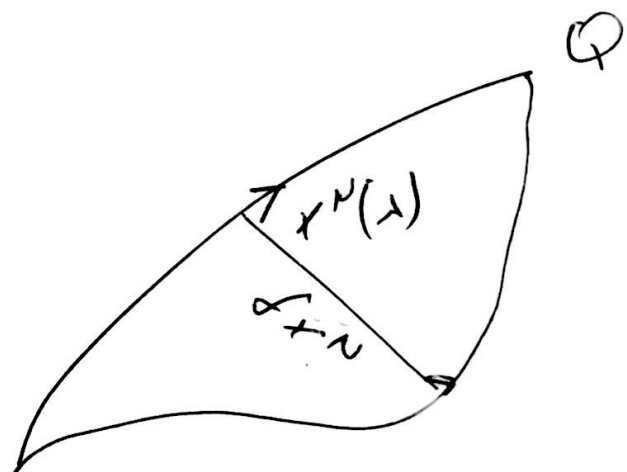
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$S = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

ou bien:

(3)

$$S = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda$$



qu'on peut écrire sous la forme:

$$S = \int \sqrt{L} dt, \quad L = L(x^N, \dot{x}^N) = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

L est un Lagrangien.

Une géodésique est un chemin de longueur extrême:

$$\delta S = 0 \implies \delta \int \sqrt{L} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^N} \delta \dot{x}^N + \frac{\partial L}{\partial x^N} \delta x^N \right) dt = 0$$

$$\Rightarrow \int \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^N} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^N} \right\} \delta x^N dt = 0$$

δx^N arbitraire:

$$\frac{\partial L}{\partial x^N} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^N} \right) = 0$$

$$\cdot \quad \frac{\partial L}{\partial x^N} = g_{\kappa\lambda, N} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^N} = 2g_{N\kappa} \dot{x}^\kappa$$

$$\cdot \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^N} \right) = 2g_{N\kappa, \lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda + 2g_{N\kappa} \ddot{x}^\kappa$$

$$\Rightarrow g_{\kappa\lambda, N} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - 2g_{N\kappa, \lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda - 2g_{N\kappa} \ddot{x}^\kappa = 0$$

(4)

Multipions par g^{NP} :

$$\ddot{x}^P + g^{NP} g_{NK,1} \dot{x}^K \dot{x}^1 - \frac{1}{2} g^{NP} g_{K1,N} \dot{x}^K \dot{x}^1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}^P + \Gamma^P_{K1} \dot{x}^K \dot{x}^1 = 0}$$

Exercice: Construis le plan en coordonnées polaires:

$$d\lambda^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

- Montrer que $h = r^2 \frac{d\phi}{ds} = \text{cte}$
- Déduire que: $h = r \cos(\phi - \phi_0)$

3/ Continuité géométrique:

Soit P un pt sur une géométrie, et $x^N(P)$ un pt au voisinage de P :

$$x^N(P) = x^N_P + \dot{x}^N_P \Delta + \frac{1}{2} \ddot{x}^N_P \Delta^2 + \frac{1}{6} \dddot{x}^N_P \Delta^3 + O(\Delta^4)$$

avec: $\ddot{x}^N + \Gamma^N_{\nu\kappa} \dot{x}^\nu \dot{x}^\kappa = 0$

$$\Rightarrow \ddot{x}^N_P = - \left(\Gamma^N_{\nu\kappa} \right)_P \dot{x}^\nu \dot{x}^\kappa, \quad \dot{x}^\nu = \underline{\underline{V^\nu_P}}$$

(5)

$x^N(P) \in$
à une
géométrie

$$\Rightarrow \ddot{x}^\mu = \text{Sym} \left[-\Gamma^\mu_{\kappa\lambda, \rho} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\kappa} \Gamma^\alpha_{\rho\lambda} \right] \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho$$

$$= \Lambda^\mu_{\kappa\lambda\rho} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho$$

$$\Rightarrow \ddot{x}^\mu_\rho = \left(\Lambda^\mu_{\kappa\lambda\rho} \right)_\rho v^\kappa v^\lambda v^\rho$$

$$\Rightarrow x^\mu(\lambda) = x^\mu_\rho + v^\mu \lambda - \frac{1}{2} \left(\Gamma^\mu_{\nu\kappa} \right)_\rho v^\nu v^\kappa \lambda^2$$

$$+ \frac{1}{6} \left(\Lambda^\mu_{\kappa\lambda\rho} \right)_\rho v^\kappa v^\lambda v^\rho \lambda^3 + O(\lambda^4)$$

on définit les coordonnées géométriques y^μ par :

$$x^\mu = x^\mu_\rho + y^\mu - \frac{1}{2} \left(\Gamma^\mu_{\nu\kappa} \right)_\rho v^\nu v^\kappa \lambda^2$$

$$+ \frac{1}{6} \left(\Lambda^\mu_{\kappa\lambda\rho} \right)_\rho v^\kappa v^\lambda v^\rho \lambda^3 + O(\lambda^4)$$

$$\Rightarrow v^\mu \lambda - y^\mu + O(\lambda^4) = 0$$

on trouve :

$$y^\mu = v^\mu \lambda + O(\lambda^4) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{y}^\mu_\rho = v^\mu = \dot{x}^\mu_\rho$$

⑥

On définit alors p^* en coordonnées locales :

$$(\Gamma^N_{\nu\kappa})_p = 0 \quad \textcircled{\text{I}}$$

et $(\Lambda^N_{\kappa\lambda\rho})_p = 0 \quad \textcircled{\text{II}}$

c-a-d :

$$(\Gamma^N_{\nu\lambda,\rho})_p + (\Gamma^N_{\rho\kappa,\lambda})_p + (\Gamma^N_{\lambda\rho,\kappa})_p = 0$$

$$\textcircled{\text{I}} \Rightarrow \boxed{g_{\nu\mu,\kappa}|_p = 0} \Leftrightarrow \boxed{g_{\mu\nu}|_p = \text{cte}} =$$

$\textcircled{\text{II}}$ ne suffit pas à définir que la 1^{ère} dérivée (ou bien de P (ou bien la seconde dérivée de g s'annule) s'annule.

On définit p^* en coordonnées locales ainsi :

$$\boxed{(g_{\nu\mu,\kappa})_p = 0, (g_{\nu\mu,\kappa\rho})_p \neq 0}$$

$$\Uparrow$$

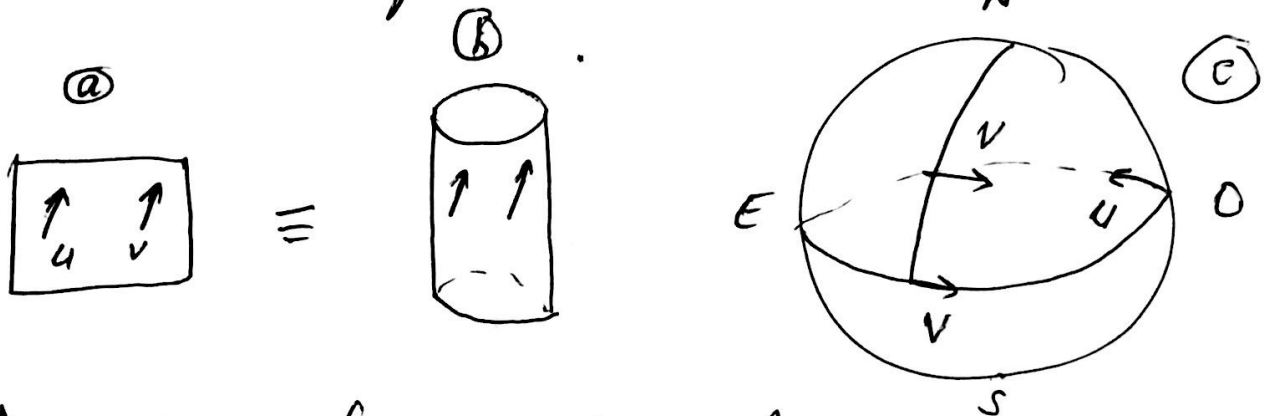
$$\boxed{(\Gamma^N_{\nu\kappa})_p = 0, (\Gamma^N_{\nu\kappa,\rho})_p \neq 0}$$

$g_{\nu\mu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow$ Espace de Minkowski $\Rightarrow$ Réf. Loc. Inertiel (Prentiss-Fulmer) $\textcircled{\text{Z}}$

3/ Combone: Pour définir mathématiquement la notion de Combne, nous allons utiliser le parallélisme et le transport parallèle.

Question: Quand peut-on dire que deux vecteurs en deux pts différents sont parallèles?

Réponse: En CC il suffit que leurs Cpts contiennent des ent. égales. En Gours comb^g, nous n'avons aucune réponse!

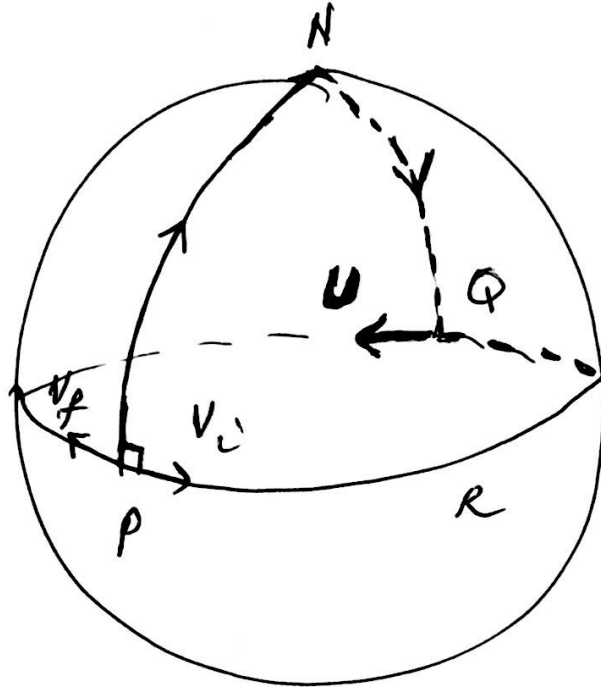


Le cylindre (comme le Combne) a un espace développable: elle se déduit au plan. La sphère ne l'est pas.

Nous allons nous concentrer sur (c), u et v qui sont tangents à l'équateur puis et une petite digue pointent vers l'EST. Or on voit qu'un vecteur tangent à une

géo-sphère transporté parallèlement le long de celle-ci vers un vecteur tangent, et donc le transport parallèle à V le long de l'équateur va ainsi tenir avec U , et donc U et V sont parallèles par définition.

Prenons un autre cas de figure :



Pour aller de V vers U nous allons prendre le chemin $P \rightarrow N \rightarrow Q$: le vecteur initial V_i est $\perp$ au chemin, et reste toujours $\perp$ à ce chemin (car l'angle entre un vecteur et un vecteur tangent à la géo-sphère est préservé par transport parallèle). Donc, quand V arrive en Q il pointe vers l'OUEST, mais $\parallel$ à U .

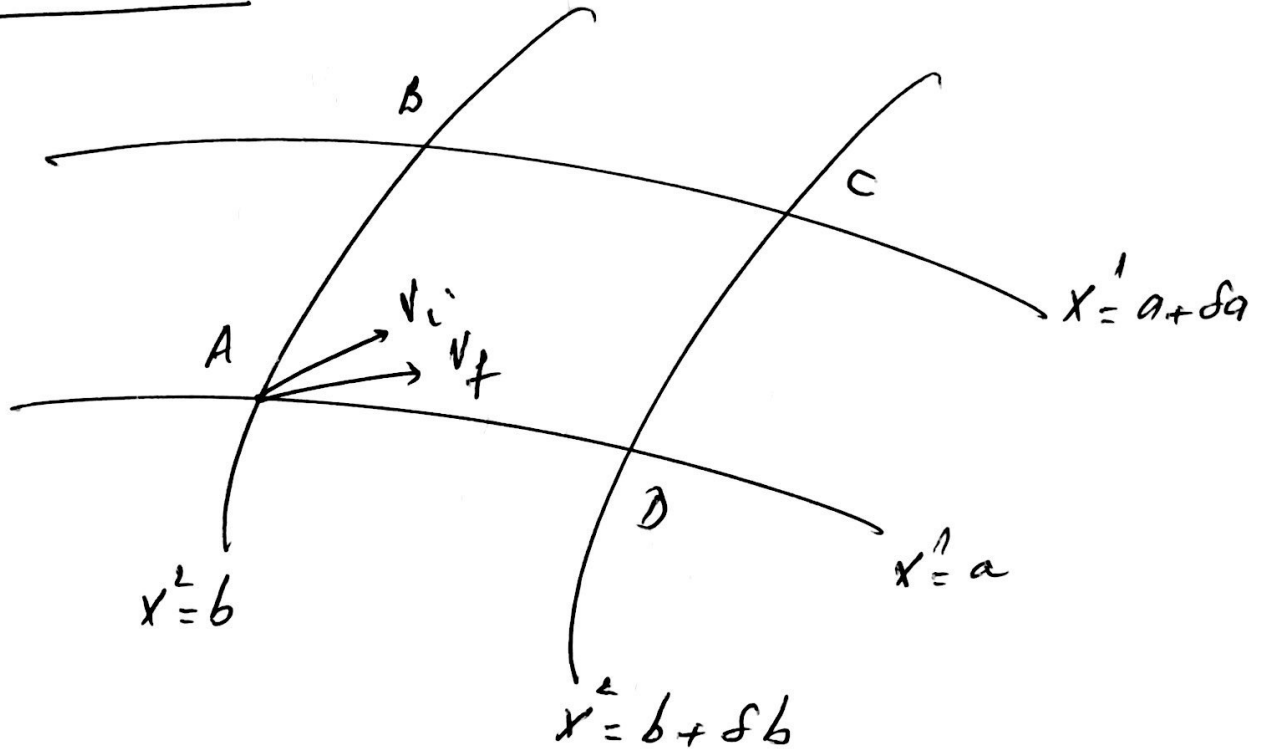
• Considérons maintenant le chemin $P \rightarrow N \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow P$:

(A)

* P: V_i pointe vers l'est.

* Q: V pointe vers l'OUEST et le
 vers le long de QP sur l'équateur,
 et donc V_f a effectué une rotation
 de π par rapport à V_i : $V_f \neq V_i$. Dans
 ce cas $\delta V = V_f - V_i$ mesure la
 courbure du chemin fermé $PNQRP$.

La théorie (voir figure).



On va transporter V^N le long du chemin fermé
 $ABCD A$ sur une surface à 2-dim. On effectue
 le transport suivant la direction U :

$$\nabla_U V = \nabla^k_{j\lambda} U^\lambda e_k = (V^k_{, \lambda} + \Gamma^k_{\lambda\mu} V^\mu) U^\lambda e_k = 0 \quad (10)$$

avec $U^1 = dx^1$ on obtient:

$$\delta V^k = - \Gamma^k_{\lambda\mu} V^\lambda dx^\mu \quad (*)$$

$$\Rightarrow V^k(B) - (V^k(A))_i = - \int_{x^2=b} \Gamma^k_{\lambda\mu} V^\lambda dx^\mu$$

$$= - \int_{x^2=b} \Gamma^k_{\lambda 1} V^\lambda dx^1$$

$$V^k(C) - V^k(B) = - \int_{x^1=a+\delta a} \Gamma^k_{\lambda 2} V^\lambda dx^2$$

$$V^k(D) - V^k(C) = + \int_{x^2=b+\delta b} \Gamma^k_{\lambda 1} V^\lambda dx^1$$

$$(V^k(A))_f - V^k(D) = + \int_{x^1=a} \Gamma^k_{\lambda 2} V^\lambda dx^2$$

on calcule $(V^k(A))_f - (V^k(A))_i$:

(14)

$$\begin{aligned}
 (V^k(A))_f - (V^k(A))_i &= \left\{ - \int_{x^1=a+\delta a} + \int_{x^1=a} \right\} \Gamma^k_{\lambda 2} V^\lambda dx^2 \\
 &+ \left\{ \int_{x^2=b+\delta b} - \int_{x^2=b} \right\} \Gamma^k_{\lambda 1} V^\lambda dx^1 \\
 &\simeq \int (-\delta a) \partial_1 (\Gamma^k_{\lambda 2} V^\lambda) dx^2 \\
 &+ \int (\delta b) \partial_2 (\Gamma^k_{\lambda 1} V^\lambda) dx^1 \\
 &\simeq \delta a \delta b \left[-\partial_1 (\Gamma^k_{\lambda 2} V^\lambda) + \partial_2 (\Gamma^k_{\lambda 1} V^\lambda) \right] \\
 &= \delta a \delta b \left[(-\Gamma^k_{\lambda 2,1} + \Gamma^k_{\lambda 1,2}) V^\lambda \right. \\
 &\quad \left. - \Gamma^k_{\lambda 2} (V^\lambda_{,1}) + \Gamma^k_{\lambda 1} (V^\lambda_{,2}) \right]
 \end{aligned}$$

Pour $V^\lambda_{,1}$ et $V^\lambda_{,2}$ on utilise $\otimes$:

$$\begin{aligned}
 \Delta V^k &\simeq \delta a \delta b \left[\Gamma^k_{\lambda 1,2} - \Gamma^k_{\lambda 2,1} + \Gamma^k_{\mu 2} \Gamma^\mu_{\lambda 1} \right. \\
 &\quad \left. - \Gamma^k_{\lambda 1} \Gamma^\lambda_{\mu 2} \right] V^\lambda
 \end{aligned}$$

Avec $\delta a \delta b = \delta x^1 \delta x^2$ et que la quantité entre crochets est antisymétrique par $1 \leftrightarrow 2$, on se dit que :

$$\begin{aligned} \Delta V^k &= \frac{1}{2} \delta x^\mu \delta x^\nu \left[\Gamma_{\mu, \nu}^k - \Gamma_{\nu, \mu}^k \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{\beta \nu}^k \Gamma_{\mu}^{\beta} - \Gamma_{\beta \mu}^k \Gamma_{\nu}^{\beta} \right] V^{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} R^k_{\mu \nu} \Delta A^{\mu \nu} \end{aligned}$$

on $\Delta A^{\mu \nu}$ est l'aire formée par le chemin fermé et :

$$R^k_{\mu \nu} = \Gamma_{\mu, \nu}^k - \Gamma_{\nu, \mu}^k + \Gamma_{\beta \nu}^k \Gamma_{\mu}^{\beta} - \Gamma_{\beta \mu}^k \Gamma_{\nu}^{\beta}$$

est le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel.

4/ Symétries de $R^k_{\mu \nu}$

a) $R^k_{\mu \nu} = -R^k_{\nu \mu}$

(13)

b) $R^k_{\lambda\nu}$ points to $4^4 = 256$ Cpts.

c) $R_{\kappa\lambda\nu\sigma} = g_{\kappa\sigma} R^{\sigma}_{\lambda\nu}$

$$R_{\kappa\lambda\nu\sigma} = -R_{\kappa\lambda\sigma\nu} \quad (C1)$$

$$R_{\kappa\lambda\nu\sigma} = -R_{\lambda\kappa\nu\sigma} \quad (C2)$$

$$R_{\kappa\lambda\nu\sigma} = +R_{\nu\sigma\kappa\lambda} \quad (C3)$$

$$3R_{\kappa[\lambda\nu\sigma]} = R_{\kappa\lambda\nu\sigma} + R_{\kappa\nu\sigma\lambda} + R_{\kappa\sigma\lambda\nu} = 0 \quad (C4)$$

At the fin it are used pure 20 Cpts interp.

5/ tensor de Ricci et Scalare de Einstein:

$$R_{\nu\nu} = R^{\sigma}_{\nu\rho\sigma} = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\nu\rho}$$

$$R_{\nu\nu} = R_{\nu\nu} \quad (10 \text{ Cpts interp})$$

$$R = g^{\nu\nu} R_{\nu\nu}$$

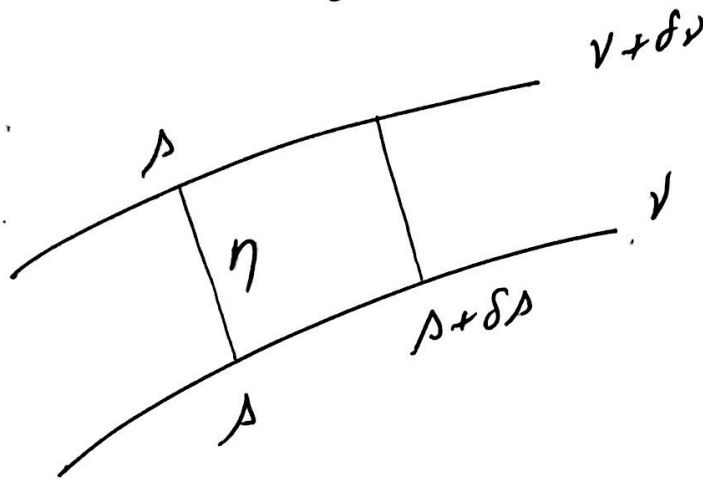
— 0 —

(1#)

6) Déviations géodésiques :

La déviation géodésique est une manifestation de la courbure. Pour la déterminer nous allons déterminer l'accélération relative de particules en deux positions voisines.

Soit une famille de géodésiques $x^\mu(s, v)$ où v est un label, et s la longueur d'arc sur une géodésique donnée.



Soit t le vecteur tangent : $t^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$

L'équation de la géodésique est :

$$\nabla_{\vec{t}} \vec{t} = 0, \quad t^\mu_{; \nu} t^\nu e_\mu = 0$$

On a : $\eta^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \delta v$

Calculons $\nabla_{\vec{t}} \vec{\eta}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{t}} \vec{\eta} &= \eta^\mu_{; \nu} t^\nu \vec{e}_\mu \\ &= \left(\frac{\partial \eta^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma \nu} \eta^\sigma \right) \frac{\partial x^\nu}{\partial s} \vec{e}_\mu \end{aligned}$$

(15)

$$= \left(\frac{\partial \eta^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} \right) \vec{e}_\mu$$

$$= \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} \right) \delta_\lambda \vec{e}_\mu$$

Calculons $D_{\vec{\eta}} \vec{t}$:

$$D_{\vec{\eta}} \vec{t} = t^\mu_{;\nu} \eta^\nu \vec{e}_\mu$$

$$= \left(\frac{\partial t^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} t^\rho \right) \eta^\nu \vec{e}_\mu$$

$$= \left(\frac{\partial t^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} t^\rho \right) \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} \delta_\lambda \vec{e}_\mu$$

$$= \left(\frac{\partial t^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} \right) \delta_\lambda \vec{e}_\mu$$

$$= \left(\frac{\partial t^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} \right) \delta_\lambda \vec{e}_\mu$$

$$= \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} \right) \delta_\lambda \vec{e}_\mu$$

$$= D_{\vec{\eta}} \vec{\eta} \quad (A)$$

Calculons maintenant l'accélération relative entre deux géodésiques:

$$D_{\vec{t}} (D_{\vec{\eta}} \vec{\eta}) = D_{\vec{\eta}} D_{\vec{t}} \vec{\eta}$$

On a $D_{\vec{t}} \vec{t} = 0 \Rightarrow D_{\vec{\eta}} D_{\vec{t}} \vec{t} = 0 \Rightarrow$

eq. de la géodesique. (B)

$$(\nabla_{\vec{t}} \nabla_{\vec{\eta}} + [\nabla_{\vec{\eta}}, \nabla_{\vec{t}}]) \vec{t} = 0 \quad (8)$$

En utilisant (4) et (8) on obtient:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{t}} \nabla_{\vec{t}} \vec{\eta} &= -[\nabla_{\vec{\eta}}, \nabla_{\vec{t}}] \vec{t} \\ &= [\nabla_{\vec{t}}, \nabla_{\vec{\eta}}] \vec{t} \\ &= f(\vec{t}, \vec{\eta}) \vec{t} \end{aligned}$$

En intégrant les Cphs on a:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{t}} \nabla_{\vec{t}} (\eta^\nu \vec{e}_\nu) &= \int (t^\nu e_\nu, \eta^\kappa e_\kappa) t^\nu \vec{e}_\nu \\ &= t^\nu \eta^\kappa t^\nu \int (\vec{e}_\nu, \vec{e}_\kappa) \vec{e}_\nu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 \eta^\sigma}{\partial s^2} \right) \vec{e}_\sigma = t^\lambda \eta^\kappa t^\nu R^\sigma_{\nu\lambda\kappa} \vec{e}_\sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \eta^\sigma}{\partial s^2} = t^\lambda \eta^\kappa t^\nu R^\sigma_{\nu\lambda\kappa}}$$

On a utilisé:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_\nu, \vec{e}_\nu) \vec{e}_\kappa &= [\nabla_\nu, \nabla_\nu] \vec{e}_\kappa \quad (\text{exercice}) \\ &= R^\sigma_{\kappa\nu\nu} \vec{e}_\sigma \end{aligned}$$

(17)